Aula 2

- Leia o material didático com muita atenção;
- Use uma calculadora e refaça os cálculos de todos os exemplos;
- Sempre que tiver dúvidas recorra ao tutor a distância.

Capitalização Composta

Os Juros Compostos

Os juros são chamados compostos quando a taxa de juros incide sobre o montante imediatamente anterior, ou seja, os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte.

Vejamos como fica uma aplicação de R$1.000,00 por um período de 4 meses a uma taxa de 20%a.m. a juros simples e a juros compostos:

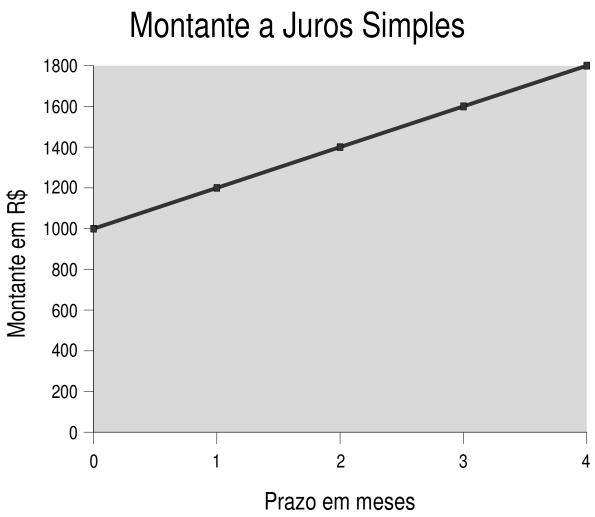
Juros Simples

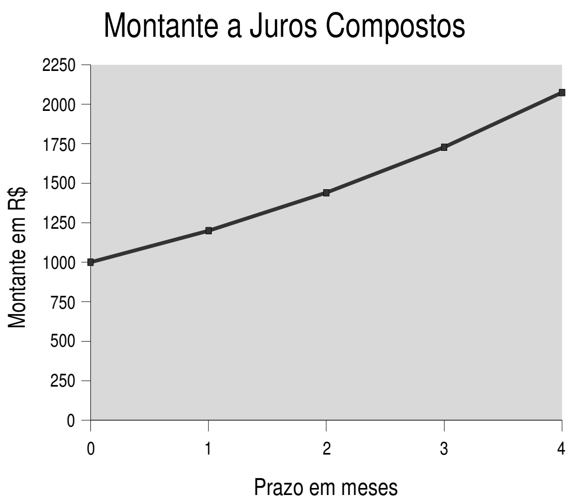
n	Juro por período	Montante
1	*1000,00 . 0,20 . 1 = 200,00*	*1200,00*
2	*1000,00 . 0,20 . 2 = 400,00*	*1400,00*
3	*1000,00 . 0,20 . 3 = 600,00*	*1600,00*
4	*1000,00 . 0,20 . 4 = 800,00*	*1800,00*

Juros Compostos

n	Juro por período	Montante
1	*1000,00 . 0,20 = 200,00*	*1200,00*
2	*1200,00 . 0,20 = 240,00*	*1440,00*
3	*1440,00 . 0,20 = 288,00*	*1728,00*
4	*1728,00 . 0,20 = 345,60*	*2073,60*

Faremos uma comparação gráfica entre os montantes a JS e a JC:





Observação: *O gráfico do montante a juros compostos apresenta um crescimento mais acentuado pois cresce exponencialmente enquanto que o gráfico do montante a juros simples cresce de forma linear.*

Montante em juros compostos

Para encontrarmos o montante, vamos considerar um capital inicial que representamos por $\mathbf{C_0}$ e uma taxa **i** e calculamos o montante período a período. Assim, temos:

$$C_1 = C_0(1+i)$$

$$C_2 = C_1(1+i) = C_0(1+i)(1+i) = C_0(1+i)^2$$

$$C_3 = C_2(1+i) = C_0(1+i)^2(1+i) = C_0(1+i)^3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$C_n = C_0 \ (1+i)^n$$

que é a fórmula geral do montante para juros compostos.

O termo $\mathbf{(1+i)^n}$ é chamado de **FAC** ***(fator de acumulação de capitais)*** e muitos livros já têm esses valores calculados em tabelas financeiras.

Observações:

1) A taxa deve ser usada na forma unitária;

2) O prazo e a taxa devem estar em uma unidade comum de tempo.

Exemplos:

1) Calcular o montante a juros compostos de um capital de R$8.000,00 à taxa de 3%a.m., durante 6 meses.

Resolução:

$C_0 = 8000,00$

$i = 0,03$ a.m.

$n = 6$ meses

$C_6 = ?$

Utilizando a fórmula geral do montante, temos:

$C_n = C_0\ (1 + i)^n$

$C_6 = 8000\ (1,03)^6$

$C_6 = 8000\ (1,19405)$ *Use uma calculadora e refaça os cálculos*

$C_6 = 9552,42$

Logo, o montante será de R$ 9552,42.

2) Um comerciante consegue um empréstimo de R$25.000,00 que deverão ser pagos, ao fim de 1 ano, acrescido de juros compostos de 2% a.m. Quanto o comerciante deverá pagar ao fim do prazo combinado?

Resolução:

$C_0 = 25000,00$

$i = 0,02$ a.m. *(A unidade de tempo do prazo tem que ser a mesma unidade de tempo da taxa)*

$n = 1$ ano $= 12$ meses

$C_{12} = ?$

$C_{12} = 25000\ (1,02)^{12}$

$C_{12} = 25000\ (1,26824)$ *Use uma calculadora e refaça os cálculos*

$C_{12} = 31706,04$

Logo, o valor a ser pago é R$ 31706,04.

3) Queremos ter R$ 39.117,39 dentro de 7 meses. Se a taxa de juros for de 5% a.m., quanto devemos aplicar hoje para alcançar esse objetivo?

$C_7 = 39117,39$

$n = 7$ meses

$i = 0,05$ a.m.

$C_0 = ?$

$$C_0(1,05)^7 = 39117,39$$

$$C_0 = \frac{39117,39}{(1,05)^7} = 27800,00$$

Use uma calculadora e refaça os cálculos

Logo, devemos aplicar R$ 27800,00 para alcançar tal objetivo.

4) Um administrador aplica R$ 42.000,00 em 02/01/2007 e resgata R$ 48.378,74 em 02/08/2007. Qual a taxa de juros mensal?

$C_0 = 42000,00$

$n = 7$ meses

$C_7 = 48378,74$

$i = ?$

$$42000(1+i)^7 = 48378,74$$

$$(1+i)^7 = \frac{48378,74}{42000}$$

$$(1+i)^7 = 1,15187$$

$$\sqrt[7]{(1+i)^7} = \sqrt[7]{1,15187}$$

$$1+i = 1,0204 \Rightarrow i = 0,0204 \text{ a.m.}$$

Use uma calculadora e refaça os cálculos

Logo a taxa de juros compostos nessa aplicação é de 2,04% ao mês.

5) Um economista aplicou um excedente de R$12.500,00 em um fundo que paga 3% a.m. e resgatou R$ 15.834,63 alguns meses depois. Calcule esse tempo.

C_0 = 12500,00

i = 0,03 a.m.

C_n = 15834,63

n = ?

$$12500(1{,}03)^n = 15834{,}63$$

$$(1{,}03)^n = \frac{15834{,}63}{12500}$$

$$(1{,}03)^n = 1{,}2667704$$

Use uma calculadora e refaça os cálculos

$$\log(1{,}03)^n = \log(1{,}2667704)$$

$$n = \frac{\log(1{,}2667704)}{\log(1{,}03)} = 8 \quad meses$$

Cálculo dos Juros

O juro é a diferença entre o montante e o capital inicial. Veja:

$$J_n = C_n - C_0$$

$$J_n = C_0(1+i)^n - C_0$$

$$J_n = C_0[(1+i)^n - 1]$$

Exemplo:

Calcular o juro de um capital de R$7.000,00 à taxa de 2%a.m., durante 4 meses.

C_0 = 7000,00

i = 0,02 a.m.

n = 4 meses

J_4 = ?

$J_4 = 7000\,[(1{,}02)^4 - 1\,]$

J_4 = 577,03

Logo, o juro nesse período foi de 577,03

Valor Atual e Valor Nominal

A idéia é a mesma de como foi vista em juros simples. O **valor nominal** de um título é o valor do montante de uma aplicação, ou seja, é quanto o título vale no vencimento.

$$N = V_a (1 + i)^n$$

O **valor atual** é a operação inversa do cálculo do montante.

$$V_a = \frac{N}{(1+i)^n}$$

Exemplo:

Por quanto devo comprar um título vencível daqui a 5 meses, com valor nominal de R$1.131,41, se a taxa de juros compostos for de 2,5% a.m.?

N = 1131,41

n = 5 meses

i = 0,025 a.m.

$V_a = ?$

$$V_a = \frac{1131{,}41}{(1{,}025)^5} = 1000{,}00$$

Taxas Proporcionais em Juros Compostos

Duas taxas são **proporcionais** quando existe entre elas a mesma relação que a dos períodos a que se refere.

Exemplo:

As taxas de 36% a.a. e de 3% a.m. são proporcionais de forma análoga ao juro simples.

Taxas Equivalentes em Juros Compostos

Veja a seguinte situação:

Um capital de R$100,00 aplicados por 12 meses a uma taxa de juros compostos de 2% a.m. e o mesmo capital aplicado pelo mesmo período a uma taxa de juros compostos de 24% a.a. terão o mesmo montante?

$C_0 = 100{,}00$	$C_0 = 100{,}00$
$n = 12$ meses	$n = 1$ ano
$i = 0{,}02$ a.m.	$i = 0{,}24$ a.a.
$C_{12} = 100 \cdot (1{,}02)^{12} = 126{,}82$	$C_1 = 100 \cdot (1{,}24)^1 = 124{,}00$

Como podemos observar os montantes não são iguais.

Então, **taxas equivalentes** são aquelas que aplicadas ao **mesmo principal**, durante o **mesmo espaço de tempo**, produzem **montantes iguais.**

Logo, as taxas de 2% a.m. e 24% a.a., do exemplo anterior **não são** equivalentes.

IMPORTANTE: ao calcularmos o montante, se as unidades de tempo da taxa e do prazo não forem as mesmas, não podemos utilizar taxas proporcionais.

Cálculo da Taxa Equivalente

Seja:

i = taxa anual

k = nº de períodos por ano

$\mathbf{i_K}$ = taxa equivalente a i

Faremos os cálculos dos montantes para 1 ano:

$$C_0(1+i)^1 = C_0(1+i_k)^k$$

$$1+i = (1+i_k)^k$$

$$\mathbf{i = (1+i_k)^k - 1}$$

Da mesma igualdade, temos:

$$\mathbf{i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1}$$

Observação: *Na fórmula, a variável **i** se refere ao maior espaço de tempo e a variável* $\mathbf{i_k}$ *se refere a um espaço sempre menor que o de **i**.*

Exemplos:

1) Que taxa de juros anual é equivalente a taxa de 3%a.m.?

i = taxa anual = ?

$i_k = 0,03$ *a.m.*

k = 12 (períodos - meses por ano)

$i = (1 + 0,03)^{12} - 1 = 0,4258$ *a.a. = 42,58%a.a.*

Na prática, o que fazemos?

Temos uma taxa de 0,03 a.m. Se fosse juros simples multiplicaríamos por 12 para encontrarmos a taxa anual, mas a capitalização é composta, então ao invés de multiplicarmos, somamos “1” à taxa e ficamos com (1+0,03) e elevamos na 12ª potência e depois subtraímos “1” fora dos parenteses e ficamos com $(1+0,03)^{12} - 1$ sendo essa a taxa anual equivalente.

De uma forma geral, quando temos a taxa mensal e queremos a taxa anual, procedemos da seguinte maneira: Pegamos a taxa mensal na forma decimal e somamos “1” a ela. O resultado ao invés de multiplicarmos por 12, **elevamos na 12ª potência** e depois subtraímos 1.

Por exemplo, tenho a taxa de 2% .am. E quero saber qual é a taxa equivalente anual. Então pego 2% na forma decimal:

$\mathbf{(0,02 + 1)^{12} - 1 = 1,2682 - 1 = 0,2682 = 26,82\%}$ **a.a.**

2) Qual é a taxa semestral equivalente a taxa de 40%a.a.?

i = 0,40 a.a.

i_k *= taxa equivalente semestral = ?*

k = 2 (número de semestres por ano)

$i_k = \sqrt[2]{1+0,40} - 1 = 0,1832$ *= 18,32% a.sem.*

Na prática...

Se temos a taxa anual e queremos saber a taxa equivalente mensal, pegamos a taxa anual na forma decimal e somamos 1 a ela. Ao invés de dividirmos por 12, **extraímos uma raiz de índice 12** e depois subtraímos 1.

Por exemplo, temos a taxa de 79,59% a.a. e queremos saber qual é a taxa mensal equivalente. Vejamos como fica:

$$\sqrt[12]{(0{,}7959+1)}\;-1=\;1{,}05\;-\;1=\;0{,}05\;=5\%\text{a.m.}$$

Convenção Exponencial para o Cálculo do Montante para Períodos Não Inteiros

Em juros compostos, quando o período não é inteiro utilizamos a convenção exponencial em que os períodos não inteiros são calculados utilizando a taxa equivalente.

O cálculo é feito em duas etapas:

1ª etapa: calcula-se o montante a juros compostos para n inteiro.

2ª etapa: aplica-se ao montante calculado na 1ª etapa juros compostos para n fracionário, com taxas equivalentes.

Veja o exemplo:

Um capital de R$1.000,00 foi emprestado à taxa de JC de 12%a.a. por 30 meses. Tendo por base a capitalização anual, qual será o montante **utilizando a convenção exponencial**?

Retirando os dados:

C= 1000,00

i= 12%a.a = 0,12 a.a.

n=30 meses = 2 anos e 6 meses

M = ?

1ª etapa:	**2ª etapa:**
$C_2=1000.(1+0{,}12)^2=1254{,}40$	Encontramos a taxa equivalente mensal: $i_{12}=\sqrt[12]{1+0{,}12}-1=0{,}009489\,\text{a.m.}$ Calculamos o montante para o prazo não inteiro utilizando a taxa equivalente mensal: $C_{2,5}=1254{,}40.(1+0{,}009489)^6=1327{,}53$

Note que $(1{,}009489)=\sqrt[12]{1{,}12}=1{,}12^{\frac{1}{12}}$

Podemos abreviar essas duas etapas. Acompanhe o raciocínio:

1ª etapa:

2ª etapa:

$$((1{,}12)^{1/12})^{6}=(1{,}12)^{6/12}=(1{,}12)^{0{,}5}$$

Multiplicação de potência de mesma base

$$C_{2,5}=1000.(1{,}12)^{2}.(1{,}12)^{6/12}=1000.(1{,}12)^{2}.(1{,}12)^{0{,}5}=1000.(1{,}12)^{2+0{,}5}$$

$$C_{2,5}=1000.(1{,}12)^{2{,}5}=1327{,}53$$

Esta convenção nos diz que podemos encontrar o montante referente a um período não inteiro, fracionando o prazo de aplicação em relação ao período da taxa, ou seja, utilizando o **prazo fracionando.**

Exemplo:

A quantia de R$ 2400,00 foi aplicada por 15 meses em uma instituição financeira que paga juros de 12%a.a. Calcule o montante dessa aplicação.

C_0 = 2400,00

i = 12% a.a.

n = 15 meses

C_n = ?

Não podemos utilizar a taxa proporcional em juros compostos, mas podemos usar o prazo fracionando em relação à taxa, logo

n = 15/12 = 1,25 anos

Usando a fórmula geral do montante, temos:

Taxa anual

Prazo fracionado em anos

$$C_n=2400.(1{,}12)^{1{,}25}=2765{,}25$$

Outro exemplo:

1) A empresária da "AMS S.A". aplicou um excedente de caixa de R$ 18.450,00 no "Banco da Terra" e resgatou R$ 22.269,52 após 21 meses. Qual foi a taxa anual de juros compostos que foi paga pelo banco neste período? *(Dica: pode ser usada a convenção exponencial)*

$C_0 = 18450,00$ $C_n = 22269,52$ $n = 21$ meses $i = ?$ a.a.

Fracionando o prazo em relação à taxa temos:

$$n = \frac{21}{12} \text{anos} = 1,75 \text{anos}$$

$$22269,52 = 18450.(1+i)^{1,75}$$

$$1+i = \sqrt[1,75]{\frac{22269,52}{18450}}$$

$$i = 0,1135 \text{a.a.}$$

i = 11,35% a.a.

2) JF usou R$ 2300,00 do seu limite do cheque especial por 18 dias. Informado em seus extratos bancários que as taxa de juros cobradas são de 7% a.m. e 125,22% a.a. calcule o valor do juro que deve ser pago no período.

(Confira em seus extratos de conta corrente se têm duas taxas: uma mensal e outra anual)

Dados:

$C_0 = 2300,00$

$n = 18$ dias

$i_{mensal} = 7\%$ a.m. = 0,07 a.m.

$i_{anual} = 125,22\%$ a.a. = 1,2522 a.a.

Calculemos o montante usando as duas taxas (somente para verificação):

Taxa mensal: $C_n = 2300.(1+0,07)^{\frac{18}{30}}$ $C_n = 2300.(1,07)^{0,6}$ $C_n = 2300.(1,04143)$ $C_n = 2395,29$	*Taxa anual:* $C_n = 2300.(1+1,2522)^{\frac{18}{360}}$ $C_n = 2300.(2,2522)^{0,05}$ $C_n = 2300.(1,04143)$ $C_n = 2395,29$
Ou seja, podemos utilizar apenas uma das taxas já que são equivalentes	

Desconto Composto

A idéia de desconto em juros compostos é a mesma vista em juros simples: corresponde ao abatimento por saldar-se um compromisso antes do vencimento.

Desconto Racional Composto

É o desconto obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual de um compromisso que seja saldado n períodos antes do vencimento, calculado o valor atual à taxa de desconto.

Sendo:

$\mathbf{V_a = \frac{N}{(1+i)^n}}$ o valor atual ou valor descontado, o desconto racional composto será:

$$\mathbf{d = N - V_a}$$

Exemplo:

Um título no valor de R$ 6500,00 foi saldado 4 meses antes do vencimento. O possuidor do título obteve uma taxa de desconto de 2,5%a.m. Qual o desconto racional e qual a quantia recebida?

Calculamos, primeiramente, o valor atual e depois calculamos o desconto:

N = 6500,00

n = 4 meses

i = 0,025 a.m.

d =? (desconto racional composto)

V_a *= ? (valor atual ou quantia recebida)*

$$V_a = \frac{6500}{(1{,}025)^4} = 5888{,}68$$ *Use uma calculadora e refaça os cálculos*

Agora, calculemos o desconto:

$$d = 6500 - 5888{,}68 = 611{,}32$$

Observação: *Quando é pedido somente a quantia recebida ou o valor atual, não é necessário calcular o desconto, basta calcular o valor atual usando a fórmula:*

$$\mathbf{Va = \frac{N}{(1+i)^n}}$$

Exemplo:

A Casa de Carnes "Boi Gordo" tem um cheque pré- datado a receber que vence daqui a 120 dias no valor de R$ 900,00. O banco cobra uma taxa de desconto composto de 3% a.m. Qual será o valor líquido recebido em tal operação?

Resolução:

O que está sendo pedido é o valor atual, então nesse caso não precisa calcular o valor do desconto e usamos a fórmula do V_a:

$N = 900,00$

$i = 3\%$ *a.m.* $= 0,03$ *a.m.*

$n = 120$ *dias* $= 4$ *meses*

$V_a = ?$

$$V_a = \frac{900}{(1,03)^4} = 799,64$$

Logo, o valor recebido será de R$ 799,64.