Integração Numérica

6.3 Primeira Regra de Simpson

6.3.1 Obtenção da Fórmula

A Primeira Regra de Simpson é obtida, aproximando a função $f(x)$ por um polinômio interpolador de Gregory-Newton de segunda ordem, ou seja:

$$f(x) = P_2(x) = y_0 + \frac{z\,\Delta y_0}{1!} + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2!}. \qquad (1)$$

6.3 Primeira Regra de Simpson

6.3.1 Obtenção da Fórmula

A Primeira Regra de Simpson é obtida, aproximando a função $f(x)$ por um polinômio interpolador de Gregory-Newton de segunda ordem, ou seja:

$$f(x) = P_2(x) = y_0 + \frac{z\,\Delta y_0}{1!} + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} \qquad (1)$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx \qquad (2)$$

6.3 Primeira Regra de Simpson

6.3.1 Obtenção da Fórmula

A Primeira Regra de Simpson é obtida, aproximando a função $f(x)$ por um polinômio interpolador de Gregory-Newton de segunda ordem, ou seja:

$$f(x) = P_2(x) = y_0 + \frac{z\,\Delta y_0}{1!} + \frac{z\,(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} \tag{1}$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx \tag{2}$$

que, substituindo a eq. (1) na eq. (2), obtém-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(y_0 + \frac{z\,\Delta y_0}{1!} + \frac{z\,(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} \right) dx \tag{3}$$

com $\quad z = \dfrac{x - x_0}{h} \qquad (4)$

Como $f(x)$ é função de x e o polinômio é em função de z, é necessário realizar a troca de variável na integral, assim, da eq. (4) fica:

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \text{ diferenciando } dx = hdz. \qquad (5)$$

Como $f(x)$ é função de x e o polinômio é em função de z, é necessário realizar a troca de variável na integral, assim, da eq. (4) fica:

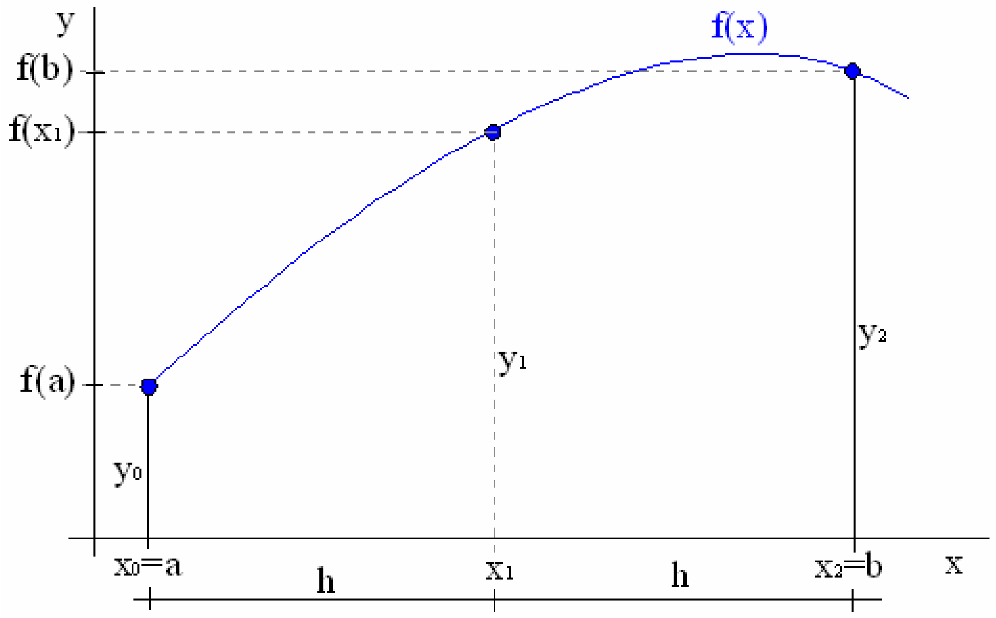
$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \text{ diferenciando } dx = hdz. \qquad (5)$$

Para aproximar a função $f(x)$ por um polinômio de segunda ordem, são necessários 3 pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2), igualmente espaçados, conforme figura abaixo.

Como $f(x)$ é função de x e o polinômio é em função de z, é necessário realizar a troca de variável na integral, assim, da eq. (4) fica:

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \text{ diferenciando } dx = hdz. \qquad (5)$$

Para aproximar a função $f(x)$ por um polinômio de segunda ordem, são necessários 3 pontos, (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2), igualmente espaçados, conforme figura abaixo.



Neste caso, $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, os limites de integração ficam:

$$\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h}$$

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, os limites de integração ficam:

$$\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0$$

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned} \qquad (6)$$

Como pode ser observado na figura anterior, (b - a) = 2h.

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{2h}{h} = 2. \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo as eqs. (5) e (6) na eq. (3), obtém-se:

$$I = \int_0^2 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z\,(z-1)\Delta^2 y_0}{2} \right) h dz$$

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{2h}{h} = 2. \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo as eqs. (5) e (6) na eq. (4), obtém-se:

$$I = \int_0^2 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2} \right) h dz$$

Integrando, obtém-se:

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo as eqs. (5) e (6) na eq. (4), obtém-se:

$$I = \int_0^2 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2} \right) h dz$$

$$I = h\left[y_0 z + \Delta y_0 \frac{z^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \right]_0^2$$

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned} \qquad (6)$$

Substituindo as eqs. (5) e (6) na eq. (4), obtém-se:

$$I = \int_0^2 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2} \right) hdz$$

$$I = h\left[y_0 z + \Delta y_0 \frac{z^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \right]_0^2$$

Substituindo os limites de integração, obtém-se:

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned} \qquad (6)$$

Substituindo as eqs. (5) e (6) na eq. (4), obtém-se:

$$I = \int_0^2 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2} \right) h dz$$

$$I = h\left[y_0 z + \Delta y_0 \frac{z^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \right]_0^2$$

$$I = h\left\{ 2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) \right\} = h\left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0 \right) \qquad (7)$$

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_2 = b$, então, os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned} \qquad (6)$$

Substituindo as eqs. (5) e (6) na eq. (4), obtém-se:

$$I = \int_0^2 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2} \right) h dz$$

$$I = h \left[y_0 z + \Delta y_0 \frac{z^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \right]_0^2$$

Agora, basta substituir as diferenças finitas.

$$I = h \left\{ 2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) \right\} = h \overbrace{\left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3} \Delta^2 y_0 \right)} \qquad (7)$$

As diferenças finitas são expressas por:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

As diferenças finitas são expressas por:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

e (8)

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0.$$

As diferenças finitas são expressas por:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

e \hfill (8)

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0.$$

Substituindo as eqs. (8) na eq. (7), obtém-se:

$$I = h\left\{2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right\}$$

As diferenças finitas são expressas por:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

e \hfill (8)

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0.$$

Substituindo as eqs. (8) na eq. (7), obtém-se:

$$I = h\left\{2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right\}$$

$$I = h\left\{\left(2 - 2 + \frac{1}{3}\right)y_0 + \left(2 - \frac{2}{3}\right)y_1 + \frac{1}{3}y_2\right\}$$

As diferenças finitas são expressas por:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

e (8)

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0.$$

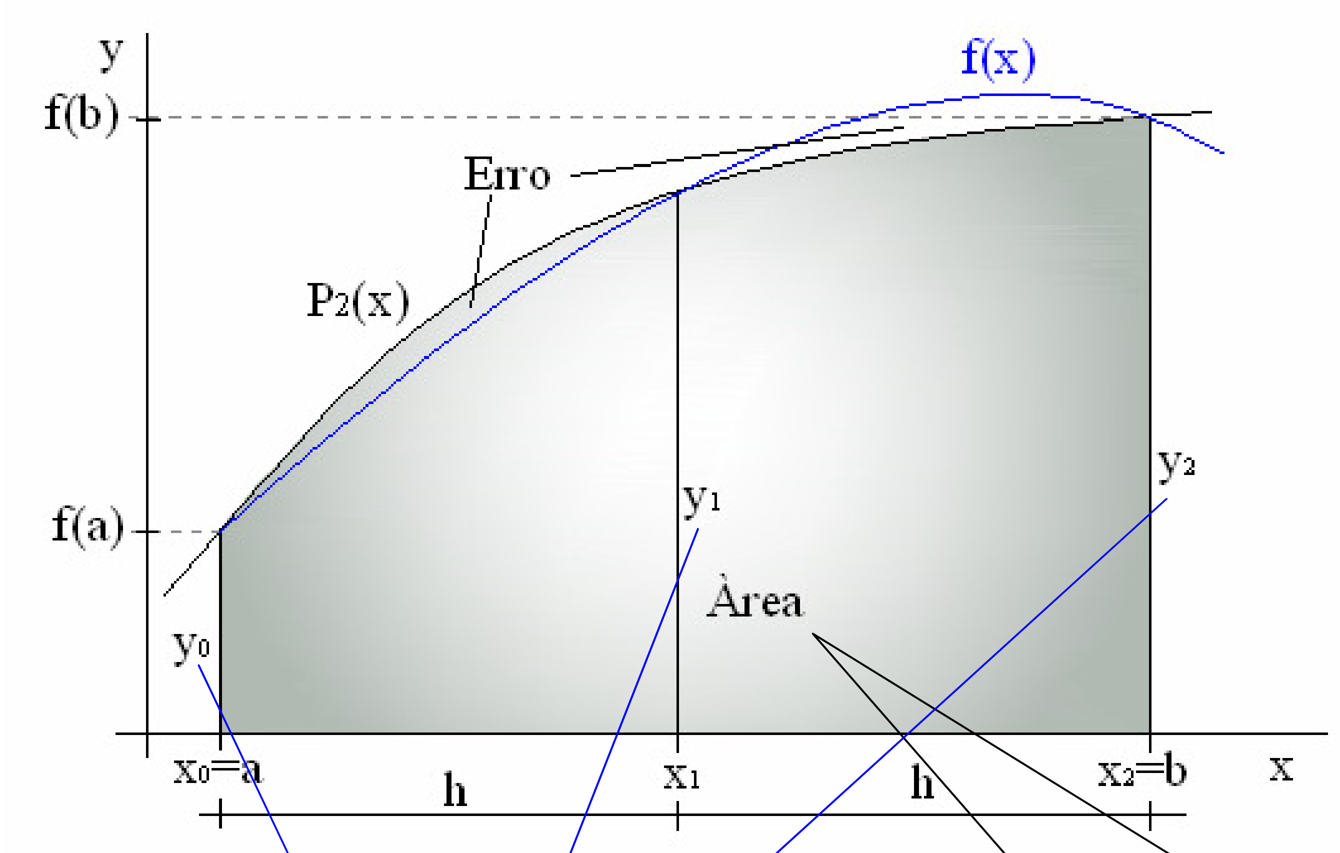
Substituindo as eqs. (8) na eq. (7), obtém-se:

$$I = h\left\{2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right\}$$

$$I = h\left\{\left(2 - 2 + \frac{1}{3}\right)y_0 + \left(2 - \frac{2}{3}\right)y_1 + \frac{1}{3}y_2\right\}$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \rightarrow \quad \text{Primeira Regra de Simpson} \qquad (9)$$

6.3.2 Interpretação Geométrica



$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

É a área aproximada (I), calculada através da Primeira Regra de Simpson:

6.3.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução da integral aproximada, calculado por:

$$E = \int_a^b R_2 dx$$

6.3.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução da integral aproximada, calculado por:

$$E = \int_a^b R_2 dx$$

onde R_2 é o resíduo que, para a primeira regra de Simpson, é dado por:

$$R_2 = \frac{z(z-1)(z-2)h^3 f'''(\varepsilon)}{3!}$$

6.3.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução da integral aproximada, calculado por:

$$E = \int_a^b R_2 dx$$

onde R_2 é o resíduo que, para a primeira regra de Simpson, é dado por:

$$R_2 = \frac{z(z-1)(z-2)h^3 f'''(\varepsilon)}{3!}$$

Então,

$$E = \int_a^b \frac{z(z-1)(z-2)h^3 f'''(\varepsilon)}{3!} dx$$

6.3.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução da integral aproximada, calculado por:

$$E = \int_a^b R_2 dx$$

onde R_2 é o resíduo que, para a primeira regra de Simpson, é dado por:

$$R_2 = \frac{z(z-1)(z-2)h^3 f'''(\varepsilon)}{3!}$$

Então,

$$E = \int_a^b \frac{z(z-1)(z-2)h^3 f'''(\varepsilon)}{3!} dx$$

Substituindo os limites de integração e o dx por hdz, integrando, obtém-se :

$$E = h^4 f'''(\varepsilon) \int_0^2 \frac{z(z-1)(z-2)}{3!} dz = 0.$$

Como o resíduo de segunda ordem zera a integral, toma-se o resíduo de terceira ordem. Então, a integral fica:

$$E = h^5 f^{(IV)}(\varepsilon) \int_0^2 \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4!} dz$$

Como o resíduo de segunda ordem zera a integral, toma-se o resíduo de terceira ordem. Então, a integral fica:

$$E = h^5 f^{(IV)}(\varepsilon) \int_0^2 \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4!} dz$$

que, resolvendo a integral, obtém-se:

$$E = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\varepsilon)$$

Como o resíduo de segunda ordem zera a integral, toma-se o resíduo de terceira ordem. Então, a integral fica:

$$E = h^5 f^{(IV)}(\varepsilon)\int_0^2 \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4!}dz$$

que, resolvendo a integral, obtém-se:

$$E = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\varepsilon)$$

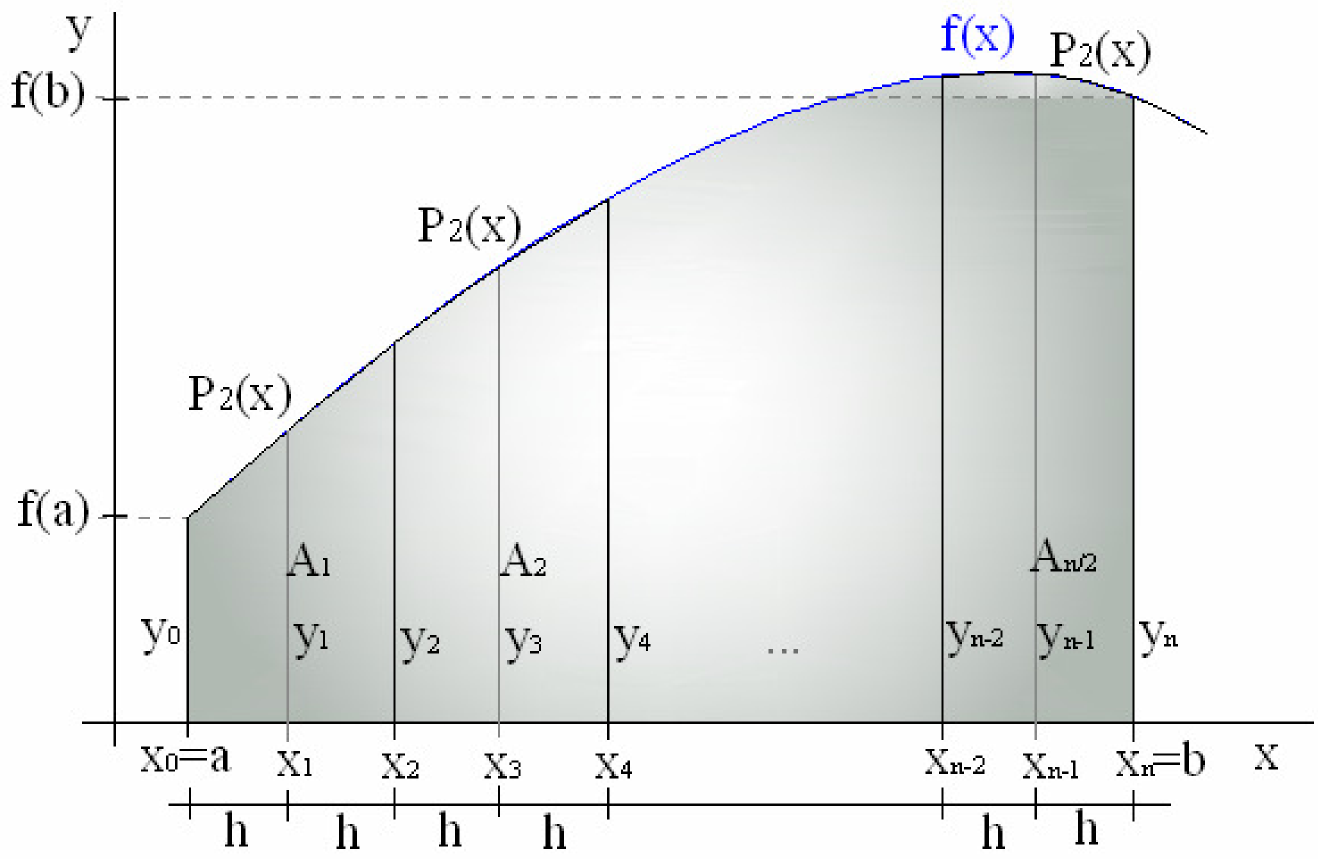
onde E é o erro de truncamento da Primeira Regra de Simpson e ε é um valor entre $a \le \varepsilon \le b$, para gerar um valor máximo da derivada quarta.

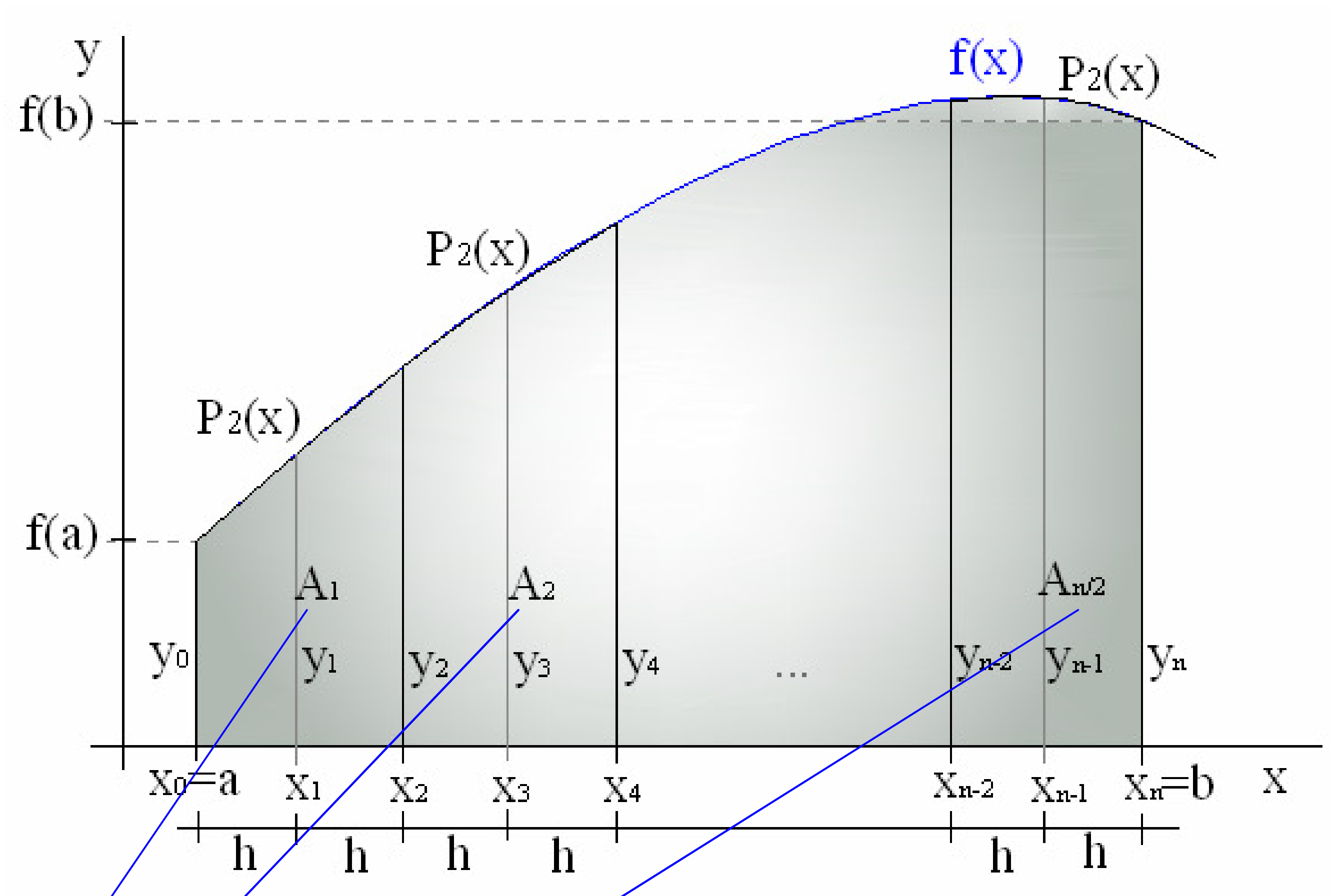
6.3.4 Fórmula Composta:

Para obter a fórmula composta, basta subdividir o intervalo de integração num número par de subintervalos igualmente espaçados e, a cada par de subintervalos, aplicar a Primeira Regra de Simpson.

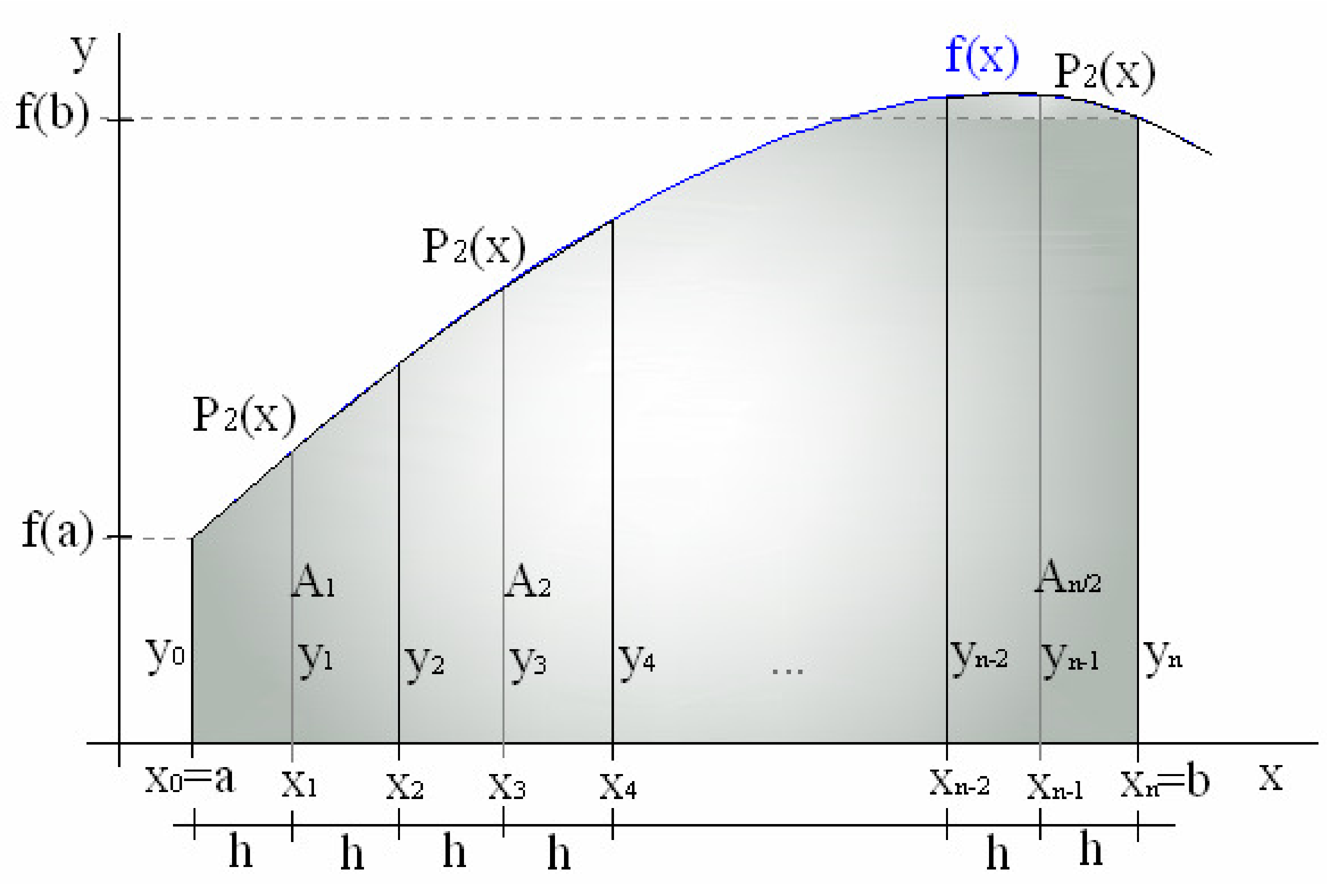
6.3.4 Fórmula Composta:

Para obter a fórmula composta, basta subdividir o intervalo de integração num número par de subintervalos igualmente espaçados e, a cada par de subintervalos, aplicar a Primeira Regra de Simpson.



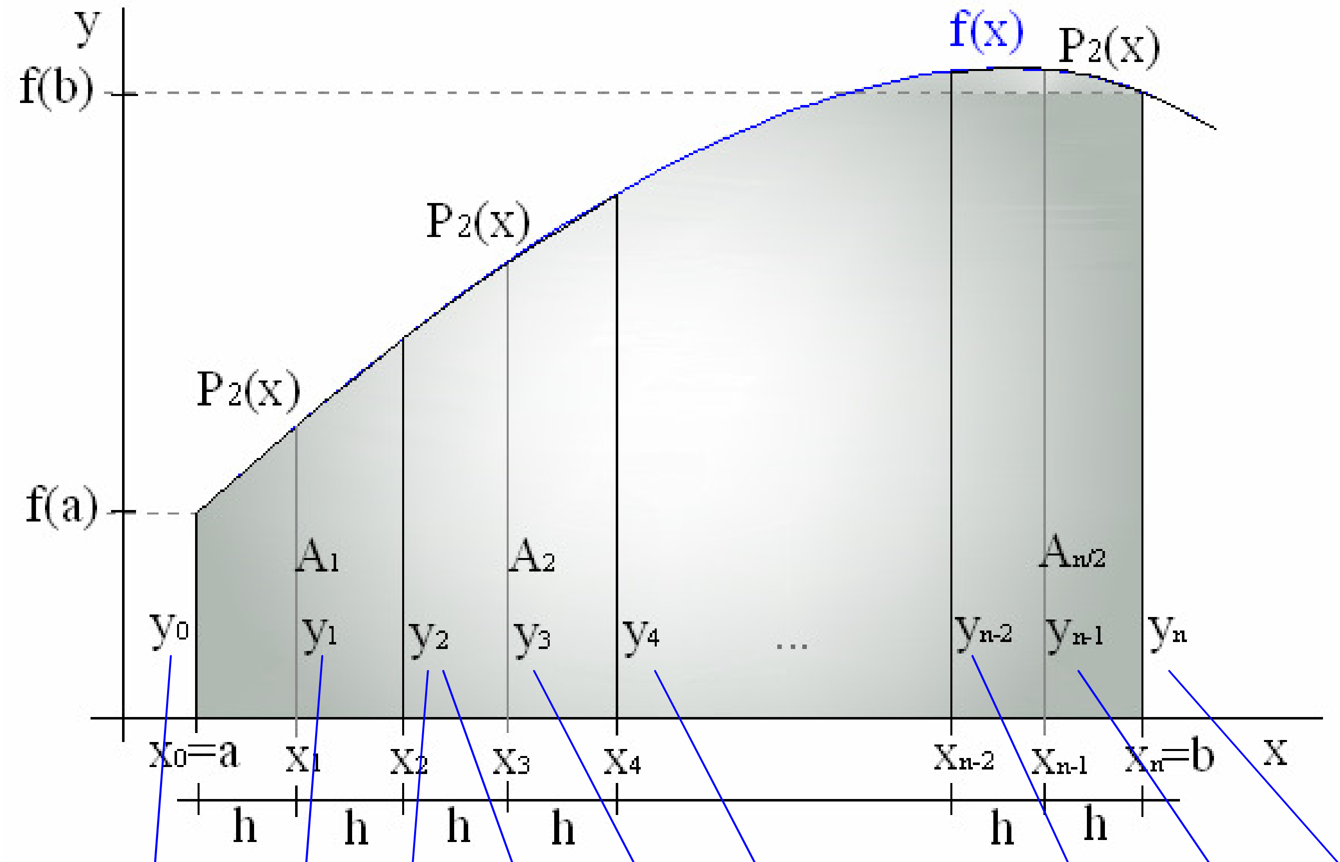


$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n/2}$$



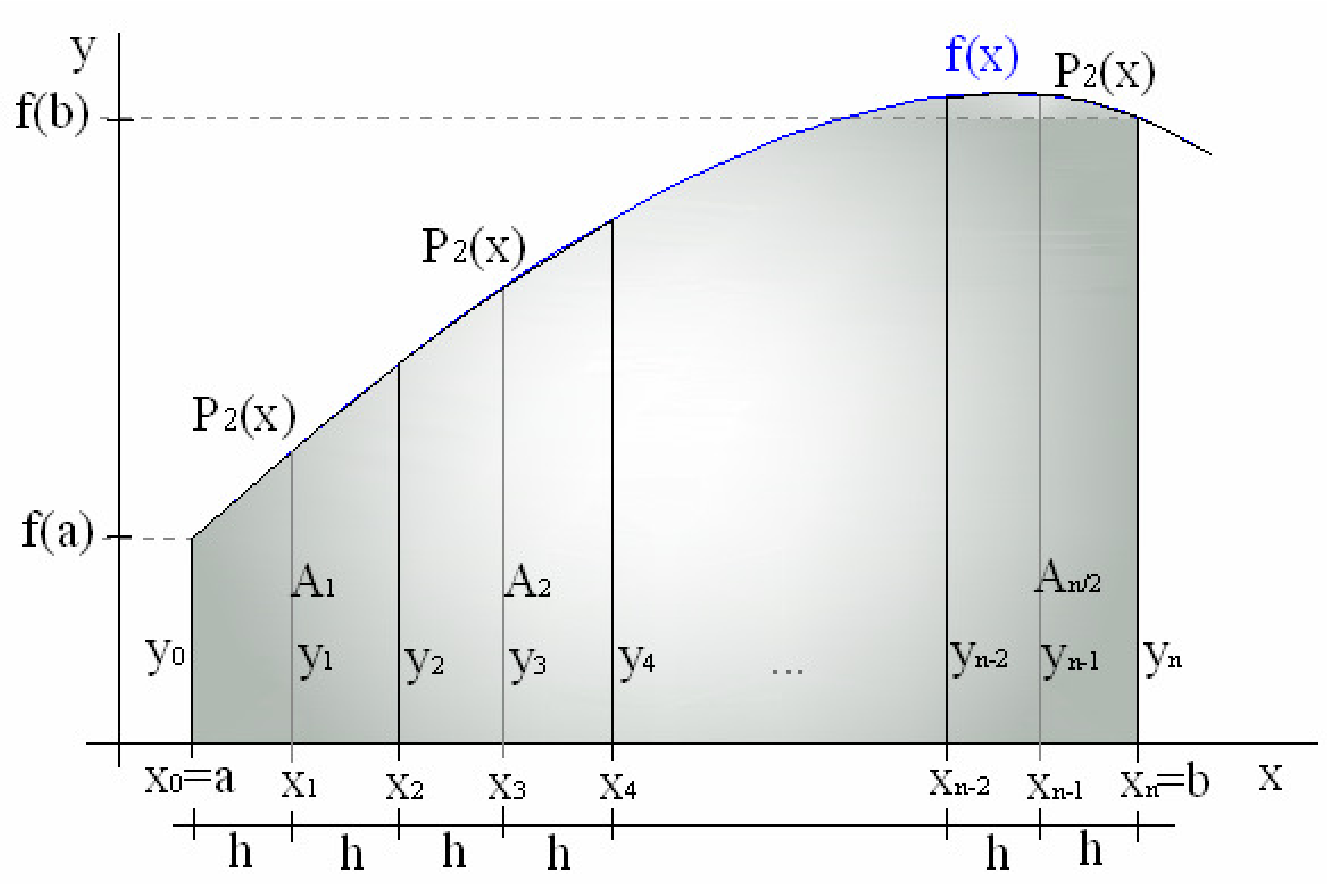
$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n/2}$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$



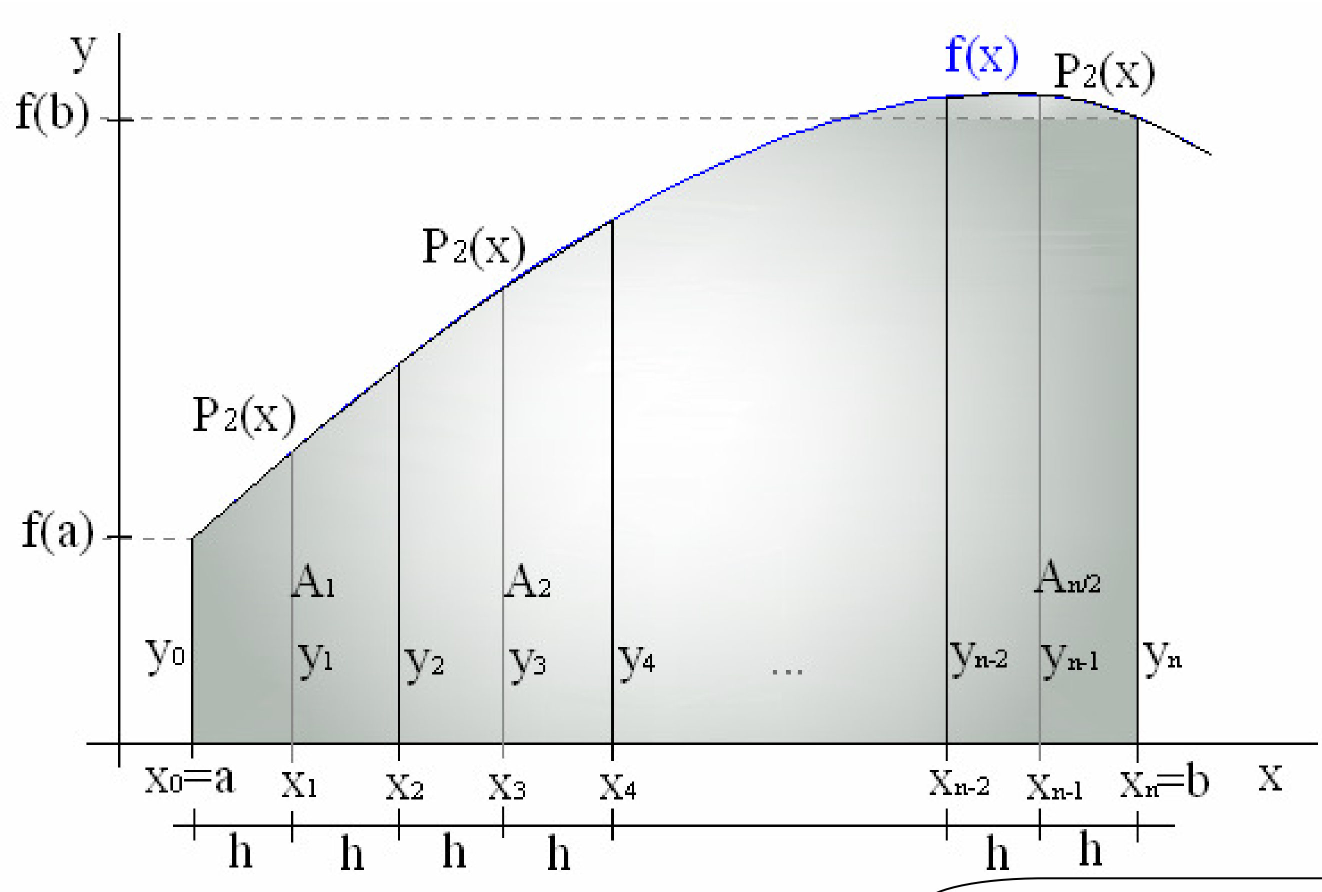
$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n/2}$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$



$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n/2}$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$



$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n/2}$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

É a fórmula composta da Primeira Regra de Simpson.

6.3.5 Erro de Truncamento da Fórmula Composta:

O erro de truncamento total é a soma dos erros cometidos a cada aplicação da fórmula da Primeira Regra de Simpson.

6.3.5 Erro de Truncamento da Fórmula Composta:

O erro de truncamento total é a soma dos erros cometidos a cada aplicação da fórmula da Primeira Regra de Simpson.

$$E = E_1 + E_2 + ... + E_{n/2}$$

6.3.5 Erro de Truncamento da Fórmula Composta:

O erro de truncamento total é a soma dos erros cometidos a cada aplicação da fórmula da Primeira Regra de Simpson.

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_{n/2}$$

$$E = -\frac{n}{2}\,\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\varepsilon)$$

6.3.5 Erro de Truncamento da Fórmula Composta:

O erro de truncamento total é a soma dos erros cometidos a cada aplicação da fórmula da Primeira Regra de Simpson.

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_{n/2}$$

$$E = -\frac{n}{2}\ \frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\varepsilon) = -\frac{n}{180}\left(\frac{b-a}{n}\right)^5 f^{(IV)}(\varepsilon)$$

6.3.5 Erro de Truncamento da Fórmula Composta:

O erro de truncamento total é a soma dos erros cometidos a cada aplicação da fórmula da Primeira Regra de Simpson.

$$E = E_1 + E_2 + ... + E_{n/2}$$

$$E = -\frac{n}{2}\,\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\varepsilon) = -\frac{n}{180}\left(\frac{b-a}{n}\right)^5 f^{(IV)}(\varepsilon)$$

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(IV)}(\varepsilon)$$

Exercícios:

1) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Primeira Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 10 subintervalos (n = 10):

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Exercícios:

1) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Primeira Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 10 subintervalos (n = 10):

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_9 + y_{10})$$

Exercícios:

1) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Primeira Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 10 subintervalos (n = 10):

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_9 + y_{10})$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Note que, a e b são os limites de integração e n é o número de subintervalos.

Exercícios:

1) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Primeira Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 10 subintervalos (n = 10):

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_9 + y_{10})$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$$

Exercícios:

1) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Primeira Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 10 subintervalos (n = 10):

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_9 + y_{10})$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$$

$$y_i = \frac{4}{1+x_i^{\,2}}$$

É a função de integração, observe a integral acima.

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0			
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

O primeiro valor de x_i é $x_0 = 0{,}0$ que é o valor do limite inferior da integral.

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	4,00000		

O valor de y_i é obtido substituindo x_i na função de integração $y_0 = 4/(1 + x_0^2) = 4/(1+ 0^2) =4,0$.

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	4,00000	1	

É o multiplicador de y_0. Veja na fórmula abaixo.

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	0,0	4,00000	1	4,00000

É o resultado do produto $m_0 * y_0$.

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1			

O valor de x_i é obtido pela expressão:
$x_{n+1} = x_n + h = 0{,}0 + 0{,}1 = 0{,}1$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040		

O valor de y_i é obtido substituindo x_i na função de integração $y_1 = 4/(1 + x_1^2) = 4/(1+ 0,1^2) = 3,9604$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_9 + y_{10}) \therefore \quad y_i = \frac{4}{1+x_i^{\ 2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	

É o multiplicador de y_1. Veja na fórmula abaixo.

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + {x_i}^2}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158

É o resultado do produto $m_1{*}y_1$.

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158

E assim segue . . .

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158
2	0,2			

Acompanhe os cálculos.

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \;\therefore\; y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158
2	0,2	3,84615		

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\ 2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158
2	0,2	3,84615	2	

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \quad \therefore \quad y_i = \frac{4}{1 + x_i^{\ 2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158
2	0,2	3,84615	2	7,69231

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \;\therefore\; y_i = \frac{4}{1 + {x_i}^2}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158
2	0,2	3,84615	2	7,69231
3	0,3	3,66972	4	14,67890

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10}) \;\therefore\; y_i = \frac{4}{1+x_i^{\,2}}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158
2	0,2	3,84615	2	7,69231
3	0,3	3,66972	4	14,67890
4	0,4	3,44828	2	6,89655
5	0,5	3,20000	4	12,80000
6	0,6	2,94118	2	5,88235
7	0,7	2,68456	4	10,73826
8	0,8	2,43902	2	4,87805
9	0,9	2,20994	4	8,83978
10	1,0	2,00000	1	2,00000

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158
2	0,2	3,84615	2	7,69231
3	0,3	3,66972	4	14,67890
4	0,4	3,44828	2	6,89655
5	0,5	3,20000	4	12,80000
6	0,6	2,94118	2	5,88235
7	0,7	2,68456	4	10,73826
8	0,8	2,43902	2	4,87805
9	0,9	2,20994	4	8,83978
10	1,0	2,00000	1	2,00000
Somatório de m_i*y_i				94,24778

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	0,0	4,00000	1	4,00000
1	0,1	3,96040	4	15,84158
2	0,2	3,84615	2	7,69231
3	0,3	3,66972	4	14,67890
4	0,4	3,44828	2	6,89655
5	0,5	3,20000	4	12,80000
6	0,6	2,94118	2	5,88235
7	0,7	2,68456	4	10,73826
8	0,8	2,43902	2	4,87805
9	0,9	2,20994	4	8,83978
10	1,0	2,00000	1	2,00000
Somatório de m_i*y_i				94,24778

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_9 + y_{10})$$

$$I = \frac{0{,}1}{3}(94{,}24778) = 3{,}1415926139$$

Note que o valor de Pi é calculado com uma boa precisão.

2) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Primeira Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 8 subintervalos (n = 8):

$$I = \int_1^3 \ln(x+1)dx$$

2) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Primeira Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 8 subintervalos (n = 8):

$$I = \int_1^3 \ln(x+1)dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8)$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{8} = 0{,}25$$

$$y_i = \ln(x_i + 1)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	1,00			

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	1,00	0,69315		

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	1,00	0,69315	1	

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	1,00	0,69315	1	0,69315

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	1,00	0,69315	1	0,69315
1	1,25			

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	1,00	0,69315	1	0,69315
1	1,25	0,81093		

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	1,00	0,69315	1	0,69315
1	1,25	0,81093	4	

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	1,00	0,69315	1	0,69315
1	1,25	0,81093	4	3,24372

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	1,00	0,69315	1	0,69315
1	1,25	0,81093	4	3,24372
2	1,50	0,91629	2	1,83258

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	1,00	0,69315	1	0,69315
1	1,25	0,81093	4	3,24372
2	1,50	0,91629	2	1,83258
3	1,75	1,01160	4	4,04640

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	1,00	0,69315	1	0,69315
1	1,25	0,81093	4	3,24372
2	1,50	0,91629	2	1,83258
3	1,75	1,01160	4	4,04640
4	2,00	1,09861	2	2,19722
5	2,25	1,17865	4	4,71462
6	2,50	1,25276	2	2,50553
7	2,75	1,32176	4	5,28702
8	3,00	1,38629	1	1,38629

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8) \quad \therefore \quad y_i = \ln(1 + x_i)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	1,00	0,69315	1	0,69315
1	1,25	0,81093	4	3,24372
2	1,50	0,91629	2	1,83258
3	1,75	1,01160	4	4,04640
4	2,00	1,09861	2	2,19722
5	2,25	1,17865	4	4,71462
6	2,50	1,25276	2	2,50553
7	2,75	1,32176	4	5,28702
8	3,00	1,38629	1	1,38629
Somatório de m_i*y_i				25,90654

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	1,00	0,69315	1	0,69315
1	1,25	0,81093	4	3,24372
2	1,50	0,91629	2	1,83258
3	1,75	1,01160	4	4,04640
4	2,00	1,09861	2	2,19722
5	2,25	1,17865	4	4,71462
6	2,50	1,25276	2	2,50553
7	2,75	1,32176	4	5,28702
8	3,00	1,38629	1	1,38629
Somatório de $m_i{*}y_i$				25,90654

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_7 + y_8)$$

$$I = \frac{0{,}25}{3}(25{,}90654) = 2{,}15888$$

3) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Primeira Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 8 subintervalos (n = 8):

a) $I = \int_0^1 e^x dx = 1{,}719713$

b) $I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+x} dx = 0{,}601414$

Obrigado.