Matemática das Aproximações

Sistemas de Equações Lineares

3.4 – Método Iterativo: A solução de um sistema de equações lineares pode ser obtida utilizando um método iterativo, que consiste em calcular uma seqüência de aproximações de $x^{(k)}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$.

Método de Gauss-Seidel:

Seja o sistema $Ax = b$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

O método de Gauss-Seidel consiste em:

a) iniciar as iterações a partir de uma aproximação inicial

$$x^{(0)} = \underbrace{\left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right]}^{\mathrm{T}}$$

Normalmente, utiliza-se, na aproximação inicial, zero para todas as incógnitas.

O método de Gauss-Seidel consiste em:

a) iniciar as iterações a partir de uma aproximação inicial

$$x^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}$$

b) calcular uma sequência de aproximações $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ... , $x^{(\mathrm{k})}$, utilizando as equações:

$$\underbrace{x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}}$$

Da primeira equação do sistema, foi explicitada a variável x_1.

O método de Gauss-Seidel consiste em:

a) iniciar as iterações a partir de uma aproximação inicial

$$x^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}$$

b) calcular uma sequência de aproximações $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ... , $x^{(\mathrm{k})}$, utilizando as equações:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}$$

Um novo x_1 da iteração (k+1) será calculado, usando o x_2 , x_3, ..., x_n da iteração anterior (k).

O método de Gauss-Seidel consiste em:

a) iniciar as iterações a partir de uma aproximação inicial

$$x^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}$$

b) calcular uma sequência de aproximações $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ... , $x^{(\mathrm{k})}$, utilizando as equações:

$$\underbrace{\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}} \end{aligned}}$$

Da segunda equação do sistema, foi explicitada a variável x_2.

O método de Gauss-Seidel consiste em:

a) iniciar as iterações a partir de uma aproximação inicial

$$x^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}$$

b) calcular uma sequência de aproximações $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ... , $x^{(\mathrm{k})}$, utilizando as equações:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}$$

$$\underbrace{x_2^{(k+1)}} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}}$$

Um novo x_2 da iteração (k+1) será calculado, usando o x_1 da iteração (k+1), recém calculado, e x_3, x_4, ... , x_n da iteração anterior (k). E assim segue.

O método de Gauss-Seidel consiste em:

a) iniciar as iterações a partir de uma aproximação inicial

$$x^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}$$

b) calcular uma sequência de aproximações $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ... , $x^{(\mathrm{k})}$, utilizando as equações:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \ldots + a_{3n}x_n^{(k)})}{a_{33}}$$

O método de Gauss-Seidel consiste em:

a) iniciar as iterações a partir de uma aproximação inicial

$$x^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}$$

b) calcular uma sequência de aproximações $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, ... , $x^{(\mathrm{k})}$, utilizando as equações:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \ldots + a_{3n}x_n^{(k)})}{a_{33}}$$

....

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})}{a_{nn}}$$

Equações de iterações:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \ldots + a_{3n}x_n^{(k)})}{a_{33}}$$

$\ldots$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})}{a_{nn}}$$

Fórmula Compacta:

Equações de iterações:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \ldots + a_{3n}x_n^{(k)})}{a_{33}}$$

$\ldots$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})}{a_{nn}}$$

Fórmula Compacta:

Representa todas as equações de iteração.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{e} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Fórmula Compacta:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Considera-se que o método de Gauss-Seidel converge quando o valor máximo de $\underbrace{\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|}\langle \varepsilon$, em que ε é o valor da tolerância.

Calcula-se o módulo diferença de todas as incógnitas das últimas duas iterações (k+1 e k), toma-se o maior valor e este deve ser menor que uma tolerância (precisão desejada).

O método de Gauss-Seidel funciona da seguinte forma:

a) escolhe-se uma aproximação inicial $x^{(0)}$;

O método de Gauss-Seidel funciona da seguinte forma:

a) escolhe-se uma aproximação inicial $x^{(0)}$;

b) gera-se aproximações sucessivas $x^{(k+1)}$ até a convergência;

O método de Gauss-Seidel funciona da seguinte forma:

a) escolhe-se uma aproximação inicial $x^{(0)}$;

b) gera-se aproximações sucessivas $x^{(k+1)}$ até a convergência;

c) critério de convergência:

máximo $\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon$, em que ε = tolerância;

O método de Gauss-Seidel funciona da seguinte forma:

a) escolhe-se uma aproximação inicial $x^{(0)}$;

b) gera-se aproximações sucessivas $x^{(k+1)}$ até a convergência;

c) critério de convergência:

máximo $\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon$, em que ε = tolerância;

d) para obter a convergência do sistema, é necessário que os coeficientes a_{ii} sejam os coeficientes de maior valor absoluto, ou seja:

$$\left.\alpha_i = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} |}{| a_{ii} |}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Somatório módulo dos coeficientes a_{ij} da equação i, com exceção a_{ii}, dividido pelo módulo de a_{ii}.

O método de Gauss-Seidel funciona da seguinte forma:

a) escolhe-se uma aproximação inicial $x^{(0)}$;

b) gera-se aproximações sucessivas $x^{(k+1)}$ até a convergência;

c) critério de convergência:

$$\text{máximo } \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon \text{, em que } \varepsilon = \text{tolerância;}$$

d) para obter a convergência do sistema, é necessário que os coeficientes a_{ii} sejam os coeficientes de maior valor absoluto, ou seja:

$$\left.\alpha_i = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} |}{| a_{ii} |}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Somatório módulo dos coeficientes a_{ij} da equação i, com exceção a_{ii}, dividido pelo módulo de a_{ii}.

$$\text{O valor máximo de } (\alpha_i) < 1$$

O maior valor de α_i deve ser menor que 1 (um) para o método convergir.

Exemplo 1:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel, com $\varepsilon \leq 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \quad 0]^T$:

$$\begin{aligned} 4x_1 - \ \ x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 3{,}5 \end{aligned}$$

Exemplo 1:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel,com $\varepsilon \leq 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{aligned} 4x_1 - \ \ x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 3{,}5 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\alpha_i = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad i = 1, 2, \ldots, n}$$

Para verificar se o método de Gauss-Seidel converge.

Exemplo 1:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel, com $\varepsilon \leq 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{aligned} 4x_1 - \ \ x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 3{,}5 \end{aligned}$$

$$\alpha_i = \frac{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|} \\ \alpha_2 &= \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|} \end{aligned}\right\}$$

Exemplo 1:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel,com $\varepsilon \leq 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \quad 0]^T$:

$$4x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 = 3{,}5$$

$$\alpha_i = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|} = \frac{1}{4} \\ \alpha_2 &= \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$$

Substituindo os coeficientes do sistema, obtém-se os valores dos α_i.

Exemplo 1:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel,com $\varepsilon \leq 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \quad 0]^T$:

$$\begin{aligned} 4x_1 - \quad x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 3{,}5 \end{aligned}$$

$$\alpha_i = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\alpha_1 = \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha_2 = \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|} = \frac{1}{3}$$

Comparando α_1=1/4 e α_2=1/3, verifica-se que 1/3 é o maior valor.

$$\text{máximo}\,(\alpha_i) \langle\ 1$$

$$\text{como } \frac{1}{3} \langle\ 1, \text{então, o método de Gauss - Seidel converge.}$$

Sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} 4x_1 - \quad x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 3{,}5 \end{aligned}$$

Sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} 4x_1 - \quad x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 3{,}5 \end{aligned}$$

Equações de iteração:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (1 + x_2)/4 \\ x_2 &= (3{,}5 - x_1)/3 \end{aligned}\right\}$$

Da primeira equação do sistema foi explicitada a incógnita x_1 e da segunda equação x_2.

Sistema de equações lineares:

$$4x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 = 3{,}5$$

Equações de iteração:

$$x_1 = (1 + x_2)/4$$
$$x_2 = (3{,}5 - x_1)/3$$

ou seja:

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$
$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–

Observações:

• *Para facilitar os cálculos, elaborou-se uma tabela com as seguintes colunas: k, para indicar o número da iteração;* x_1 *e* x_2*, para escrever as aproximações da solução; e* ε*, para escrever o valor da tolerância.*

• *Na primeira linha (k = 0), escreve-se os valores da aproximação inicial* $\mathbf{x} = [\,0 \quad 0]^T$*, ou seja,* $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 0$*. A tolerância ainda não pode ser calculada, porque não se tem duas aproximações sucessivas.*

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (1 + x_2^{(k)})/4 \\ x_2^{(k+1)} &= (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3 \end{aligned}\right\}$$

Estas são as duas equações utilizadas para calcular iterativamente as aproximações da solução.

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	?		

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(1)} = (1 + x_2^{(0)})/4$$

Utiliza-se a primeira equação para calcular x_1 da primeira iteração, $x_1^{(1)}$, substituindo-se x_2 da aproximação inicial, $x_2^{(0)}$. Veja:

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	0,25000		

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(1)} = (1 + x_2^{(0)})/4 = (1+0)/4 = 0{,}25$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	0,25000	?	

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(1)} = (1 + x_2^{(0)})/4 = (1+0)/4 = 0{,}25$$

$$x_2^{(1)} = (3{,}5 - x_1^{(1)})/3$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	0,25000	1,08333	

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(1)} = (1 + x_2^{(0)})/4 = (1+0)/4 = 0{,}25$$

$$x_2^{(1)} = (3{,}5 - x_1^{(1)})/3 = (3{,}5 - 0{,}25)/3 = 1{,}08333$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	0,25000	1,08333	?

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(1)} = (1 + x_2^{(0)})/4 = (1+0)/4 = 0{,}25$$

$$x_2^{(1)} = (3{,}5 - x_1^{(1)})/3 = (3{,}5 - 0{,}25)/3 = 1{,}08333$$

$$\varepsilon = \text{máx}\,|\,x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\,|$$

Calcula-se a diferença entre $|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}|$ *e* $|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}|$ *e toma-se o valor máximo. Veja a seguir:*

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	0,25000	1,08333	?

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(1)} = (1 + x_2^{(0)})/4 = (1+0)/4 = 0{,}25$$

$$x_2^{(1)} = (3{,}5 - x_1^{(1)})/3 = (3{,}5 - 0{,}25)/3 = 1{,}08333$$

$$\varepsilon = \text{máx}\,| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} | = | x_2^{(1)} - x_2^{(0)} |$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	-
1	0,25000	1,08333	1,08333

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(1)} = (1 + x_2^{(0)})/4 = (1+0)/4 = 0{,}25$$

$$x_2^{(1)} = (3{,}5 - x_1^{(1)})/3 = (3{,}5 - 0{,}25)/3 = 1{,}08333$$

$$\varepsilon = \text{máx}\,| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} | = | x_2^{(1)} - x_2^{(0)} | = | 1{,}08333 - 0 | = 1{,}08333$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	0,25000	1,08333	1,08333
2	?		

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	0,25000	1,08333	1,08333
2	0,52083	?	

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(2)} = (1 + x_2^{(1)})/4 = (1 + 1{,}08333)/4 = 0{,}52083$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	0,25000	1,08333	1,08333
2	0,52083	0,99306	?

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$
$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(2)} = (1 + x_2^{(1)})/4 = (1 + 1{,}08333)/4 = 0{,}52083$$
$$x_2^{(2)} = (3{,}5 - x_1^{(2)})/3 = (3{,}5 - 0{,}52083)/3 = 0{,}99306$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	-
1	0,25000	1,08333	1,08333
2	0,52083	0,99306	0,27083

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$x_1^{(2)} = (1 + x_2^{(1)})/4 = (1 + 1{,}08333)/4 = 0{,}52083$$

$$x_2^{(2)} = (3{,}5 - x_1^{(2)})/3 = (3{,}5 - 0{,}52083)/3 = 0{,}99306$$

$$\varepsilon = \text{máx}\,|\,x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\,| = |\,x_1^{(2)} - x_1^{(2)}\,| = |\,0{,}25 - 0{,}52083\,| = 0{,}27083$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	-
1	0,25000	1,08333	1,08333
2	0,52083	0,99306	0,27083
3			

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$\varepsilon = \text{máx}\,|\,x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\,|\,,\ i = 1,\ 2$$

A demais operações devem ser acompanhadas pelo aluno. Veja os resultados:

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	-
1	0,25000	1,08333	1,08333
2	0,52083	0,99306	0,27083
3	0,49826	1,00058	0,02257

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$\varepsilon = \text{máx}\,|\,x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\,|\,,\ i = 1,\ 2$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	-
1	0,25000	1,08333	1,08333
2	0,52083	0,99306	0,27083
3	0,49826	1,00058	0,02257
4	0,50014	0,99995	0,00188

$$x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/4$$

$$x_2^{(k+1)} = (3{,}5 - x_1^{(k+1)})/3$$

$$\varepsilon = \text{máx}\,|\,x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\,|\,,\ i = 1,\ 2$$

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	–
1	0,25000	1,08333	1,08333
2	0,52083	0,99306	0,27083
3	0,49826	1,00058	0,02257
4	0,50014	0,99995	0,00188
5	0,49999	1,00000	0,00016

Esta é a solução aproximada do sistema, visto que, $\varepsilon = 0{,}00016$, calculado na tabela, é menor que a tolerância exigida no enunciado do exemplo ($\varepsilon \leq 0{,}001$).

Tabela:

k	x_1	x_2	ε
0	0,0	0,0	-
1	0,25000	1,08333	1,08333
2	0,52083	0,99306	0,27083
3	0,49826	1,00058	0,02257
4	0,50014	0,99995	0,00188
5	0,49999	1,00000	0,00016

Solução: $x = [\ 0{,}49999 \quad 1{,}00000]^T$

Exemplo 2:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel, com $\varepsilon \leq 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ -6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Exemplo 2:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel, com $\varepsilon \leq 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ -6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Reorganização das equações do sistema para colocar os maiores coeficientes na diagonal principal da matriz a_{ij} e, após, analisar o critério de convergência.

Exemplo 2:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel, com $\varepsilon \le 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ -6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

$$\alpha_i = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplo 2:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel, com $\varepsilon \leq 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ -6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

$$\alpha_i = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \dfrac{1+1}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \dfrac{1+1}{5} = \dfrac{2}{5} \\ \alpha_3 = \dfrac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} = \dfrac{1+1}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Exemplo 2:

Resolver o sistema de equações lineares abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel, com $\varepsilon \leq 0{,}001$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$:

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 5x_2 - x_3 &=& 8 \\ -6x_1 + x_2 + x_3 &=& -1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &=& 11 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcr} -6x_1 + x_2 + x_3 &=& -1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &=& 8 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &=& 11 \end{array}$$

$$\alpha_i = \frac{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \dfrac{1+1}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \dfrac{1+1}{5} = \dfrac{2}{5} \\ \alpha_3 = \dfrac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} = \dfrac{1+1}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{máximo } (\alpha_i) \langle\ 1$$

como $\dfrac{1}{2} \langle\ 1$, então, o método de Gauss - Seidel converge.

Sistema de equações lineares:

$$
\begin{aligned}
-6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\
x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\
x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11
\end{aligned}
$$

Sistema de equações lineares:

$$
\begin{aligned}
-6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\
x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\
x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11
\end{aligned}
$$

Equações de iterações são, conforme mostrado anteriormente:

$$x_1 = \frac{-1 - x_2 - x_3}{-6}$$

$$x_2 = \frac{8 - x_1 + x_3}{5}$$

$$x_3 = \frac{11 - x_1 + x_2}{4}$$

Sistema de equações lineares:

$$
\begin{aligned}
-6x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\
x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\
x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11
\end{aligned}
$$

Equações de iterações são, conforme mostrado anteriormente:

$$x_1 = \frac{-1 - x_2 - x_3}{-6} \qquad\qquad x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6}$$

$$x_2 = \frac{8 - x_1 + x_3}{5} \qquad \text{ou} \qquad x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5}$$

$$x_3 = \frac{11 - x_1 + x_2}{4} \qquad\qquad x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4}$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	–
1	?			

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4}$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	–
1	0,16667	?		

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6} = \frac{-1-0-0}{-6} = 0{,}16667$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4}$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	–
1	0,16667	1,56667	?	

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6} = \frac{-1-0-0}{-6} = 0{,}16667$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5} = \frac{8 - 0{,}16667 + 0}{5} = 1{,}56667$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4}$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	–
1	0,16667	1,56667	3,10000	?

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6} = \frac{-1-0-0}{-6} = 0{,}16667$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5} = \frac{8-0{,}16667+0}{5} = 1{,}56667$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4} = \frac{11-0{,}16667+1{,}56667}{4} = 3{,}1$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	-
1	0,16667	1,56667	3,10000	3,10000

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6} = \frac{-1-0-0}{-6} = 0{,}16667$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5} = \frac{8-0{,}16667+0}{5} = 1{,}56667$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4} = \frac{11-0{,}16667+1{,}56667}{4} = 3{,}1$$

$$\varepsilon = \text{máx}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| = | x_3^{(1)} - x_3^{(0)} | = | 3{,}1 - 0{,}0 | = 3{,}1$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	-
1	0,16667	1,56667	3,10000	3,10000
2				

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4}$$

$$\varepsilon = \text{máx} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| =$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	-
1	0,16667	1,56667	3,10000	3,10000
2	0,94444	2,03111	3,02167	

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6} = \frac{-1 - 1{,}56667 - 3{,}1}{-6} = 0{,}94444$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5} = \frac{8 - 0{,}94444 + 3{,}1}{5} = 2{,}03111$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4} = \frac{11 - 0{,}94444 + 2{,}03111}{4} = 3{,}02167$$

$$\varepsilon = \text{máx} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| =$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	-
1	0,16667	1,56667	3,10000	3,10000
2	0,94444	2,03111	3,02167	0,77778

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6} = \frac{-1 - 1,56667 - 3,1}{-6} = 0,94444$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5} = \frac{8 - 0,94444 + 3,1}{5} = 2,03111$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4} = \frac{11 - 0,94444 + 2,03111}{4} = 3,02167$$

$$\varepsilon = \text{máx}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| = \text{máx}\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = \text{máx}\left|0,16667 - 0,94444\right| = 0,77778$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	–
1	0,16667	1,56667	3,10000	3,10000
2	0,94444	2,03111	3,02167	0,77778
3				

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6} =$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5} =$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4} =$$

$$\varepsilon = \text{máx} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| =$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	-
1	0,16667	1,56667	3,10000	3,10000
2	0,94444	2,03111	3,02167	0,77778
3	1,00880	2,00257	2,99844	0,06435

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{-6} =$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{5} =$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{11 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}}{4} =$$

$$\varepsilon = \text{máx} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| =$$

Tabela:

k	x_1	x_2	x_3	ε
0	0,0	0,0	0,0	–
1	0,16667	1,56667	3,10000	3,10000
2	0,94444	2,03111	3,02167	0,77778
3	1,00880	2,00257	2,99844	0,06435
4	1,00017	1,99966	2,99987	0,00863
5	0,99992	1,99999	3,00002	0,00034

Solução: $x = [0{,}99992 \quad 1{,}99999 \quad 3{,}00002]^T$

Exemplos complementes:

1) Resolver o sistema de equações abaixo, utilizando o método de Gauss-Seidel, com $\varepsilon \leq 0{,}01$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \quad\quad - x_4 &= -2 \\ - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 \quad\quad + x_4 &= 1 \\ 0{,}5x_1 \quad + x_3 \quad\quad &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Solução: $x = \begin{bmatrix} 0{,}998 & -1{,}000 & 0{,}998 & -0{,}998 \end{bmatrix}^T$

Fim