

# Simulação de Monte Carlo na Avaliação de Incertezas de Medição

## **Monte Carlo Simulation for the Evaluation of Measurement Uncertainty**

**GUSTAVO DANIEL DONATELLI**

*Universidade Federal de Santa Catarina (Florianópolis, Brasil)  
donatelli@labmetro.ufsc.br*

**ANDRÉA CRISTINA KONRATH**

*Universidade Federal de Santa Catarina (Florianópolis, Brasil)  
ack@labmetro.ufsc.br*

**RESUMO** Neste artigo explora-se a aplicação da simulação computacional na avaliação de incertezas de medição. Apresenta brevemente o método clássico ou de propagação de incertezas, sua formulação e suas limitações. A seguir, descreve-se o método de simulação de Monte Carlo, ou de propagação de distribuições, realizando considerações acerca de alguns aspectos críticos para a qualidade dos resultados da simulação, em particular, sobre o número de eventos de medição simulados e o processo de estimação do intervalo de abrangência. Para maior clareza, são incluídos exemplos artificiais. Conclui-se sobre as limitações da técnica, as dificuldades na sua aplicação e os desafios futuros.

**Palavras-chave** INCERTEZA DE MEDIÇÃO – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO.

**ABSTRACT** This paper addresses the use of computer simulation to estimate the uncertainty of a particular measurement. First, the basic principles and the limitations of the standard GUM method are briefly described. Then, the Monte Carlo simulation technique is presented, paying special attention to those aspects that are critical to the quality of the simulation results, such as the number of Monte Carlo trials and the procedure for determining the coverage interval. Some examples are given in order to clarify the discussion. Finally, some remarks are made about the limitations of the method, the difficulties in implementing it, and the future challenges.

**Keywords** MEASUREMENT UNCERTAINTY – MONTE CARLO SIMULATION.

## INTRODUÇÃO

Os resultados de medição afastam-se do valor verdadeiro da grandeza medida (valor do mensurando) por uma quantidade denominada *erro de medição*. Em primeira instância, os erros de medição podem ser classificados como “bem comportados” ou grosseiros. Os primeiros são próprios do processo de medição em condição de operação normal e caracterizam-se por apresentar um comportamento estocástico consistente. Estes últimos, por sua vez, são gerados por afastamentos com referência às condições normais de medição – mau funcionamento do sistema de medição, desvios incomuns das condições ambientais, execução errada de procedimentos, incorreções de transcrição ou tratamento de dados, entre outros. Eles produzem dados atípicos ou espúrios, identificados por meio de ferramentas estatísticas apropriadas, mas que não são descritos por uma distribuição de probabilidade definida. Já os que apresentam um comportamento estocástico consistente podem ser separados em componentes sistemáticos (de valor constante e repetido para medições sucessivas) e puramente aleatórios, cujo valor médio é zero e que respondem a um determinado modelo de distribuição. Em princípio, efeitos sistemáticos são passíveis de correção].

Pela sua própria natureza, os erros de medição não podem ser conhecidos com exatidão. Nos últimos anos, o reconhecimento desse fato, somado à constatação de que os efeitos sistemáticos e aleatórios não são facilmente diferenciáveis entre si nos processos de medição reais, levou a comunidade metroológica internacional a formular e difundir o conceito de *incerteza de medição*, indissolúvelmente conectado à noção moderna de *rastreabilidade* (Belanger, 2000). Segundo o Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia (VIM, 2000), a incerteza de medição é assim definida: “parâmetro associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser fundamentadamente atribuídos a um mensurando”.

Para uma melhor compreensão do conceito de *incerteza*, torna-se necessário diferenciá-lo claramente da concepção de *erro de medição*. Sabe-se que um resultado de medição, após correção dos efeitos sistemáticos reconhecidos, não é exatamente igual ao valor do mensurando, por conta de interferências pseudo-aleatórias, determinação imperfeita de correções para efeitos sistemáticos ou ainda falta de conhecimento sobre certos fenômenos físicos, caracterizados também por efeitos sistemáticos (GUM, 2003). Ao observar, ou mesmo suspeitar, a presença de um erro de medição, tenta-se avaliar a incerteza, tomando por base o conhecimento disponível sobre o processo de medição. Durante a avaliação da incerteza de medição, pode acontecer que fontes significativas de erro passem despercebidas, em razão do conhecimento limitado do avaliador. Nesse caso, a amplitude da faixa de incerteza pode ser menor que aquela que deveria ser declarada para que a rastreabilidade não fosse prejudicada. Em outras situações, a incerteza pode ser sobreestimada, em virtude de suposições excessivamente conservativas sobre a magnitude dos erros prováveis. Assim, embora os conceitos de *erro* e *incerteza* estejam associados, por referir-se ao mesmo fenômeno, pode não existir relação alguma entre o valor dos erros efetivamente existentes e a incerteza expressada para a medição em questão.

O Guia para a Expressão da Incerteza de Medição (GUM, 2003) – aqui denominado simplesmente Guia – estabelece regras gerais para avaliar e expressar a incerteza de medição. O método de avaliação de incertezas, proposto por ele, toma por base a propagação de incertezas (desvios padrões) através do modelo matemático da medição. Apesar de representar um consenso da comunidade internacional na prática da expressão da incerteza de medição, constituindo, assim, a referência para a avaliação de incerteza, tal método apresenta algumas peculiaridades que atentam contra sua difusão e correta aplicação. Entre outras, destacam-se as seguintes:

- complexidade conceitual;
- necessidade de construir um modelo matemático da medição;
- utilização de conceitos de probabilidade e estatística nem sempre claros para os profissionais da metrologia.

Além disso, na sua formulação mais usual, o método de propagação de incertezas requer o atendimento de certas condições de validade, como a linearidade do modelo e a normalidade da distribuição da variável aleatória que representa os valores possíveis do mensurando. Por isso, a sua aplicabilidade não é tão ampla como seria desejada.

Esses empecilhos associados à aplicabilidade e à validade do método tradicional de avaliação da incerteza de medição têm impellido o surgimento de técnicas alternativas, mas consistentes com aquele, para esse propósito. Entre elas, está a aplicação da simulação de Monte Carlo (SMC) para avaliar incertezas de medição. A utilização dessa técnica na metrologia, contudo, não é nova, mas só recentemente passou a circular, para revisão e comentário, um suplemento ao Guia (GUM Suppl 1, 2004), que busca estabelecer as bases para uma correta aplicação da SMC na avaliação de incertezas.

Este artigo apresenta brevemente o método clássico, ou de propagação de incertezas, contemplando aspectos como sua formulação e limitações. Na seqüência, é descrito o método da SMC, ou de propagação de distribuições, evidenciando alguns pontos críticos para a qualidade dos resultados da simulação, como o número de eventos de medição simulados e o processo de estimação do intervalo de abrangência. A fim de clarificar os conceitos, exemplos artificiais são incluídos na exposição do método. Finda-se o artigo com uma revisão do escopo de aplicação da técnica de simulação de Monte Carlo, enfatizando não apenas a importância dela no âmbito da metrologia científica e industrial, mas também levantando problemas intrínsecos à técnica ou associados à sua aplicação que precisam ser tratados de forma a possibilitar uma difusão bem direcionada da ferramenta.

## O MÉTODO CLÁSSICO OU DE PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

O método clássico, proposto pelo Guia, baseia-se na propagação das incertezas das grandezas de influência através de um modelo matemático que representa o mensurando:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

Onde  $Y$  representa o valor do mensurando e  $X_i$ , as grandezas de entrada. Segundo o Guia, as contribuições para a incerteza podem ser classificadas em dois tipos, dependendo do método de avaliação empregado. As incertezas *tipo A* podem ser estimadas a partir da análise estatística de um conjunto de resultados experimentais, ao passo que as incertezas *tipo B* são obtidas por outros meios. A incerteza padrão combinada é estimada usando a *lei de propagação de incertezas*:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right]^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_j} \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)} \quad (2)$$

Onde  $u_c(y)$  é a incerteza padrão combinada;  $u(x_i)$ , a incerteza de uma grandeza de influência  $x_i$ ;  $\partial y / \partial x_i$ , o coeficiente de sensibilidade da grandeza  $x_i$ ; e  $r(x_i, x_j)$ , o coeficiente de correlação entre duas grandezas de influência  $x_i$  e  $x_j$ .

A equação 2 é obtida a partir de um desenvolvimento em série de Taylor, quando se considera insignificante a influência dos termos de ordem superior. Assim, só produz resultados aceitáveis quando as condições de validade a seguir são atendidas (GUM, 2003): “Se a relação funcional entre  $Y$  e suas grandezas de entrada é não-linear e se uma expressão de primeira ordem da série de Taylor da relação não é uma aproximação aceitável, então a distribuição de probabilidade de  $Y$  não pode ser obtida pela convolução das grandezas de entrada. Em tais casos, outros métodos numéricos ou analíticos são requeridos”.

Em aplicações práticas reais, no entanto, é muitas vezes necessário dar uma medida de incerteza que defina um intervalo com maior probabilidade de abrangência. A medida adicional de incerteza que satisfaz esse requisito é denominada incerteza expandida, obtida por:

$$U = k \cdot u_c(y) \quad (3)$$

Onde  $U$  representa a incerteza expandida e  $k$ , um fator de abrangência, calculado a partir dos graus de liberdade efetivos  $V_{eff}$  e da probabilidade de abrangência desejada (tipicamente 95%). O Guia propõe que os graus de liberdade efetivos sejam calculados usando a fórmula de Welch-Satterthwaite:

$$V_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^n v_i^{-1} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot u(x_i)\right)^4} \quad (4)$$

Onde  $v_i$  são os graus de liberdade de uma grandeza de influência  $x_i$ . Com referência à validade desse procedimento de expansão, o Guia estabelece: “A avaliação da incerteza expandida U dada aqui (...) é somente uma aproximação e tem suas limitações. A distribuição de  $(y - \bar{y})/u(y)$  é dada pela distribuição t, somente se a distribuição de Y é normal, se a estimativa y e sua incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  são independentes e se a distribuição de  $u_c^2(y)$  é uma distribuição  $\chi^2$ ”.

Em alguns casos práticos, a normalidade da variável Y pode ser assumida a partir do atendimento das condições de aplicabilidade do Teorema do Limite Central: a estimativa do mensurando deve depender de um número significativo de grandezas de influência, cujo efeito sobre a incerteza padrão combinada seja de similar relevância.

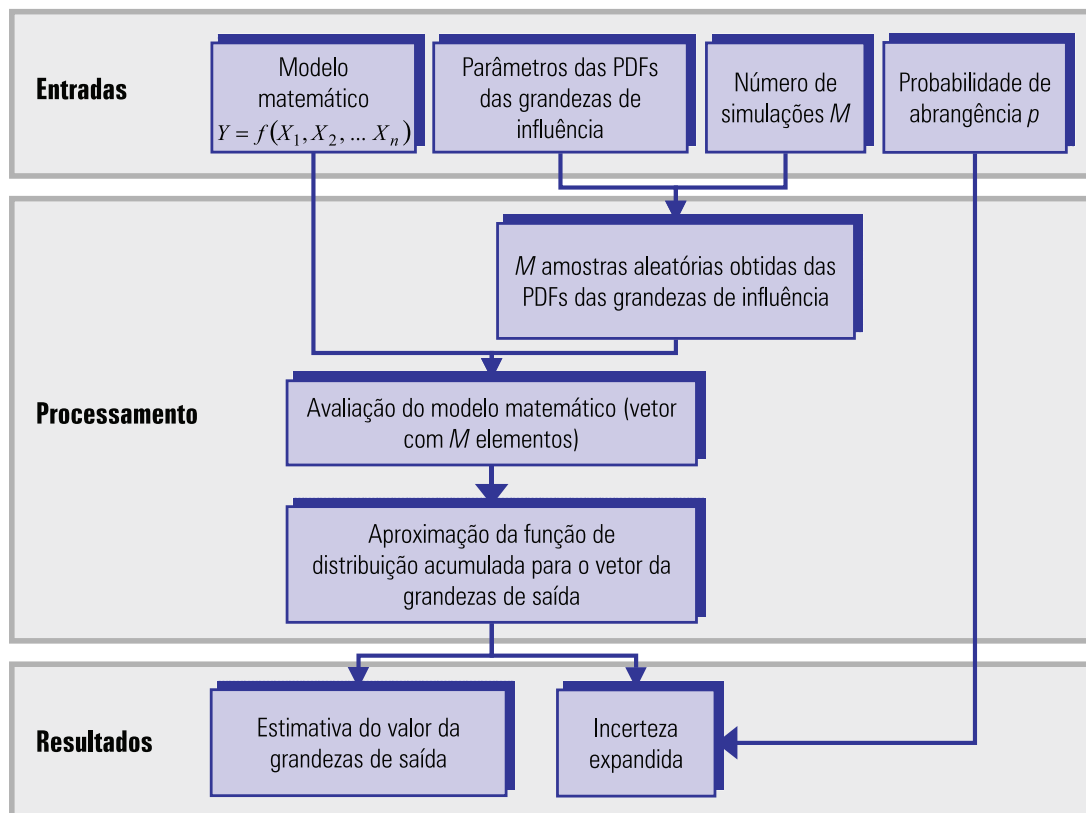
A partir da sucinta análise anterior, pode-se afirmar que as condições de aplicabilidade do método de propagação de incertezas tornam-se restritivas demais para garantir resultados confiáveis em muitas situações reais. O uso desse método na avaliação da incerteza de medições que respondam a modelos não-lineares ou apresentem grandezas de influência não-normais dominantes pode resultar em incertezas pouco realistas.

## O MÉTODO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO OU DE PROPAGAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES

Quando se utiliza um modelo matemático para descrever um sistema, é possível que o modelo seja complexo demais, ou então, não permita uma solução analítica. Nesse caso, a simulação computacional pode ser considerada uma ferramenta de grande valia na obtenção de uma resposta para um problema particular. Quando o modelo envolve amostragem aleatória de uma distribuição probabilística, o método é designado Simulação de Monte Carlo. Os matemáticos norte-americanos John Von Neumann e Stanislaw Ulam são considerados os principais autores da técnica de SMC. Já antes de 1949 foram resolvidos vários problemas estatísticos de amostragem aleatória empregando-se essa técnica. Entretanto, pelas dificuldades de realizar simulação de variáveis aleatórias à mão, a adoção da SMC como técnica numérica universal tornou-se realmente difundida com a chegada dos computadores (Sobol, 1994).

De acordo com Cox et al. (2001), a avaliação da incerteza de medição usando a técnica de SMC é realizada em duas fases. A primeira consiste em estabelecer o modelo de medição, ao passo que a segunda envolve a avaliação do modelo. As diferenças fundamentais entre o método clássico e a SMC estão no tipo de informação descrevendo as grandezas de entrada e na forma em que essa informação é processada para se obter a incerteza de medição. No método clássico, cada variável de entrada deve ser caracterizada pela função densidade de probabilidade (PDF), sua média e desvio padrão e os graus de liberdade. Na SMC, esse último parâmetro não é envolvido nos cálculos, tornando-se desnecessário, porém, não irrelevante na análise dos resultados. Na SMC, o formato da distribuição de saída será obtido a partir da avaliação do modelo matemático por meio da combinação de amostras aleatórias das variáveis de entrada, respeitando as respectivas distribuições. Assim, a SMC produz a propagação das PDFs das grandezas de entrada através do modelo matemático da medição, fornecendo como resultado uma PDF que descreve os valores do mensurando consistentes com a informação que se possui. Por isso, é conhecido como *método da propagação de distribuições*. Na figura 1, pode-se observar a seqüência de ações necessárias para avaliar a incerteza de medição usando SMC, de acordo com o Suplemento 1 do Guia para a Expressão da Incerteza de Medição, intitulado Métodos Numéricos para a Propagação de Distribuições (GUM Suppl 1, 2004).

**Fig. 1.** Fluxograma simplificado da avaliação de incerteza de medição usando a SMC (adaptado de GUM Suppl 1, 2004).



Na SMC, modelos matemáticos não-lineares, distribuições assimétricas das grandezas de influência, contribuições não-normais dominantes, correlações entre grandezas de influência e outras dificuldades para a aplicação do método clássico não precisam receber atenção especial. De maneira similar, considerações sobre a normalidade da estimativa de saída e a aplicabilidade da fórmula de Welch-Satterthwaite tornam-se desnecessárias. No entanto, a qualidade dos resultados obtidos irá depender dos seguintes fatores:

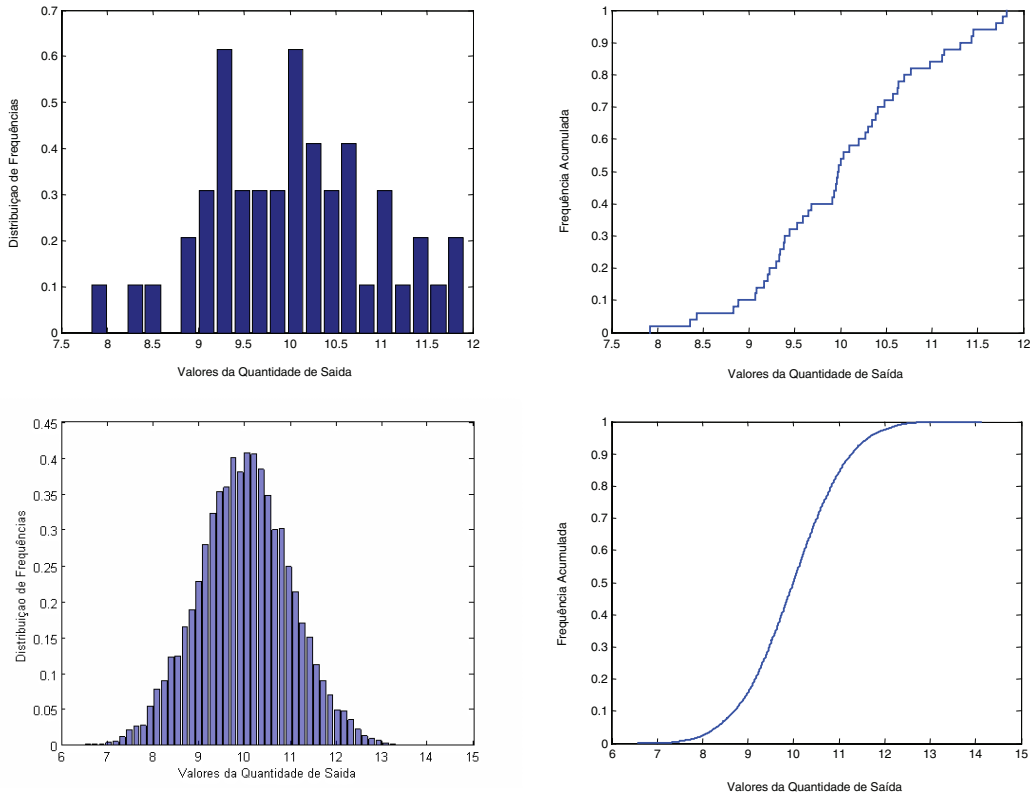
- representatividade do modelo matemático;
- qualidade da caracterização das variáveis de entrada;
- características do gerador de números pseudo-aleatórios utilizado;
- número de simulações realizadas ( $M$ );
- procedimento de definição do intervalo de abrangência.

Nas seções seguintes, serão analisados alguns aspectos chaves para a correta aplicação da técnica de SMC na avaliação de incertezas de medição.

### O número de medições simuladas

O número  $M$  de medições simuladas possui forte influência no erro amostral esperado para as estimativas obtidas por SMC. Na figura 2, é possível observar o efeito de  $M$  sobre distribuição empírica de uma variável distribuída normal, com média  $\mu = 10$  e desvio padrão  $\sigma = 1$ . A linha de gráficos superior apresenta o histograma (à esquerda) e a correspondente distribuição de frequências acumuladas (à direita), obtidos com uma amostra de tamanho  $M = 50$ . A linha de gráficos inferior mostra os resultados de uma simulação realizada com uma amostra bem maior,  $M = 10^4$ .

**Fig. 2.** Distribuições empíricas obtidas por geração de números aleatórios com distribuição normal  $N(10,1)$  para distintos tamanhos de amostra ( $M = 50$ , na posição superior, e  $M = 10^4$ , na posição inferior da tabela).



Observa-se que a distribuição de frequências acumuladas fica fortemente afetada com a redução do tamanho da amostra. A intensidade do ruído amostral e a redução na amplitude dos valores obtidos são significativas, quando se trabalha com amostras de tamanho reduzido. Isso tudo afeta drasticamente a capacidade de definir com exatidão os valores da variável que correspondem a uma dada probabilidade, particularmente com relação a probabilidades próximas aos valores 0 e 1, nos quais as amostras menores apresentam valores esparsos.

Embora os gráficos da figura 2 descrevam o comportamento de uma variável isolada (uma das grandezas de influência, por exemplo), o fenômeno é similar quando se trata de uma variável originada da combinação matemática de várias variáveis aleatórias (entre outras, o valor do mensurando). Assim, o aumento do valor de  $M$  produzirá uma diminuição do ruído amostral, resultando em estimativas mais confiáveis do valor do mensurando e da incerteza de medição associada.

Infelizmente, a ampliação do tamanho de amostra  $M$  traz consigo um aumento nos requisitos sobre o *hardware* usado na simulação e, conseqüentemente, um acréscimo no tempo necessário para se dispor do resultado. Na bibliografia consultada (GUM Suppl 1, 2004; Cox, et al., 2001), os exemplos foram resolvidos com tamanhos de amostra  $M = 10^5$  ou  $M = 10^6$ . Na experiência relatada neste artigo, tal quantidade de amostras pode resultar em tempos de espera longos, quando modelos matemáticos complexos estão envolvidos, e tem-se à disposição, para a execução da simulação, um computador de configuração moderna, porém, padrão. Por isso, para definir o número de simulações, deve-se fazer um balanço entre a qualidade dos resultados desejada e as disponibilidades de *hardware* e de tempo. Entretanto, cabe lembrar sempre que o erro amostral de simulação não é a única fonte de desvios potenciais na análise de incerteza

por SMC. Em particular, modelos matemáticos pouco representativos e grandezas de influência mal caracterizadas podem gerar desvios bem maiores e mais difíceis de serem detectados. Na solução desses problemas mal definidos, aumentar radicalmente o número de simulações  $M$  para reduzir o erro amostral pode não trazer o retorno esperado.

### Estimativa da incerteza expandida para certa probabilidade de abrangência

A maior flexibilidade do método de avaliação de incerteza por SMC permite que ele seja usado para estimar a incerteza expandida, em situações nas quais a distribuição que representa os valores possíveis do mensurando não é normal. Nesses casos, a solução de multiplicar o desvio padrão estimado por um certo fator de abrangência deixa de ser válida, pois resulta em incertezas pouco realistas.

Quando a distribuição da variável que representa os valores possíveis do mensurando é simétrica, é possível usar o recurso de ordenar o vetor de saída do menor para o maior valor e identificar os limites do intervalo de abrangência por meio da contagem dos seus elementos. Assim, por exemplo, supondo que  $M = 10^5$  e  $p = 95\%$ , os limites de um intervalo de abrangência simétrico são estimados pelos valores dos elementos número 2.500 e 97.500 do vetor ordenado. Na construção dos limites do intervalo, cabe considerar ainda que ele deve ser simétrico com referência à média aritmética do vetor, a qual representa o valor estimado do mensurando. Variações amostrais deste e dos limites estimados perturbam a condição de simetria e obrigam a tomar decisões de compromisso, como usar a média dos semi-intervalos inferior e superior ou, eventualmente, o maior de ambos os semi-intervalos para representar a incerteza de medição. Contudo, antes de tomar uma decisão nesse sentido, vale lembrar que uma assimetria excessiva pode indicar a necessidade de aumentar o tamanho de amostra  $M$ .

Infelizmente, esse método revela-se inadequado, quando a distribuição de saída não é simétrica. Nesses casos, é conveniente aplicar o procedimento recomendado para a estimação do intervalo de abrangência mínimo, conforme GUM Suppl (2004), descrito a seguir. Seja  $0 \leq \alpha \leq (1-p)$ , onde  $p$  é a probabilidade de abrangência desejada. Os extremos de um intervalo de abrangência de probabilidade  $p$ , denominado  $I_p$ , estão definidos pelas equações:

$$I_{p\text{inf}} = G^{-1}(\alpha) \tag{5}$$

$$I_{p\text{sup}} = G^{-1}(p + \alpha)$$

Onde  $I_{p\text{inf}}$  e  $I_{p\text{sup}}$  são, respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo de abrangência e  $G^{-1}(\xi)$ , a inversa da função de probabilidade acumulada (CDF), calculada para o valor de probabilidade entre parênteses. Para obter o menor intervalo de abrangência  $I_{p\text{min}}$ , um valor de  $\alpha$  deve ser calculado de forma tal que a seguinte condição seja satisfeita:

$$I_{p\text{min}} = \text{mínimo} [G^{-1}(p + \alpha) - G^{-1}(\alpha)] \forall \alpha / 0 \leq \alpha \leq (1-p) \tag{6}$$

Para funções de densidade de probabilidade unimodais, a condição imposta em (6) equivale a:

$$g(G^{-1}(\alpha)) = g(G^{-1}(p + \alpha)) \tag{7}$$

Onde  $g(\xi)$  é o valor da função de densidade de probabilidade para o argumento entre parênteses.

A fim de mostrar o comportamento do menor intervalo de abrangência para variáveis de saída com distribuição simétrica e assimétrica, foi resolvido um caso hipotético, no qual o valor do mensurando depende de duas variáveis aleatórias independentes:

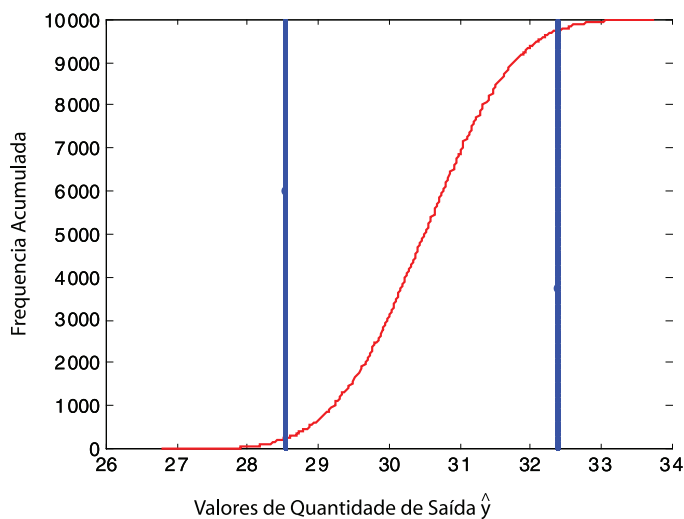
$$Y = X_1 + X_2 \tag{8}$$

Para maior flexibilidade, adotaram-se para as variáveis  $X_1$  e  $X_2$  a função de densidade de probabilidade Beta generalizada. A distribuição Beta generalizada, identificada como  $X \sim \text{Beta}(LI, LS, a, b)$ , é finita e depende de quatro parâmetros: dois extremos ( $LI$  e  $LS$ ) e dois coeficientes de forma ( $a$ ,  $b$ ). Alterando-se os coeficientes, diversas PDFs, simétricas e assimétricas, podem ser simuladas. Por exemplo, a PDF Beta aproxima-se da normal, quando os dois coeficientes são iguais e de valor elevado, e torna-se retangular, quando ambos os

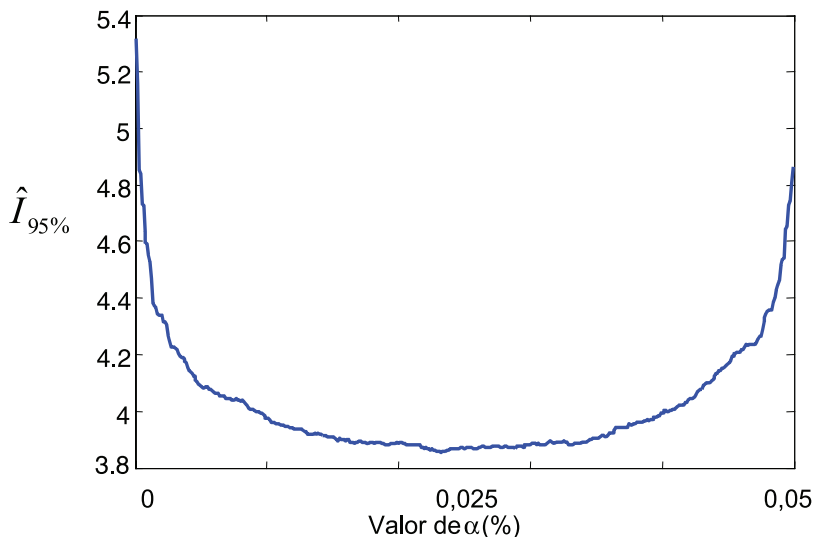
coeficientes são iguais à unidade. É possível obter distribuições assimétricas com coeficientes de valores distintos. Maiores informações sobre a distribuição Beta podem ser obtidas em Bury (1999) e a sua aplicação para simulação de processos metrológicos, em Donatelli (1999).

Na simulação do caso simétrico, foram combinadas duas variáveis  $X_1 \sim \text{Beta}(20, 28, 10, 10)$  e  $X_2 \sim \text{Beta}(4, 9, 15, 15)$ , aproximadamente normais. Realizaram-se  $M = 10^4$  simulações, calculando-se igual número de valores da variável de saída  $Y$ . Na figura 3, observa-se a distribuição de frequências acumuladas de  $Y$ , que apresenta uma característica simétrica. A seguir, estimaram-se os valores de diferentes intervalos de abrangência  $\hat{I}_{p, p} = 0, 95$ , para valores de  $\alpha$  no intervalo  $0 \leq \alpha \leq (1 - p)$ . A figura 4 mostra que o valor de  $\alpha$  que minimiza a amplitude do intervalo de abrangência é, aproximadamente,  $\alpha(I_{95\% \text{ min}}) = 0, 025$ . Assim, o resultado da análise é um intervalo de incerteza probabilisticamente simétrico, com extensão igual a  $\alpha(I_{95\% \text{ min}}) = 3, 855$  e cujos extremos são  $\hat{I}_{95\% \text{ inf}} = 28,512$  e  $\hat{I}_{95\% \text{ sup}} = 32,367$ .

**Fig. 3.** Distribuição acumulada da variável de saída  $Y$  (caso simétrico, com  $M = 10^4$  simulações)



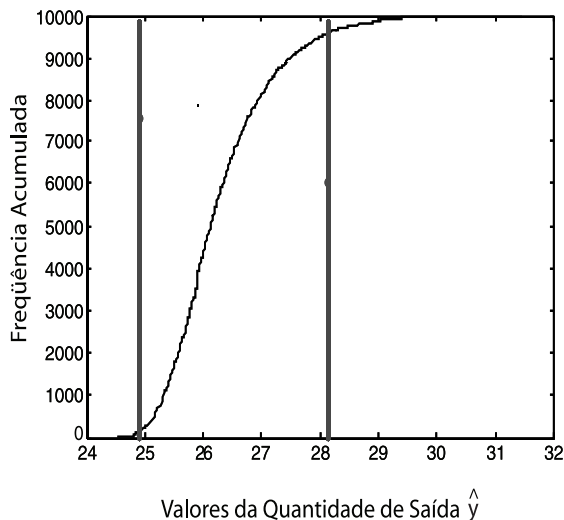
**Fig. 4.** Variação do intervalo de abrangência para distintos valores de  $\alpha$  entre 0 e 5% (caso simétrico, com  $M = 10^4$  simulações).



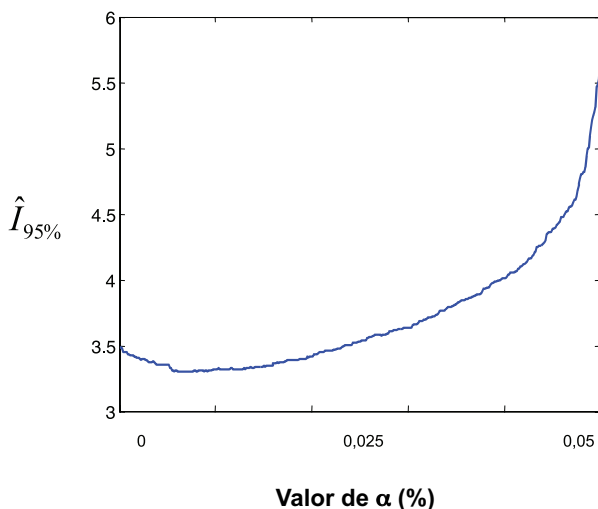


Para simular o caso assimétrico, foram combinadas duas variáveis  $X_1 \sim \text{Beta}(20, 28, 1, 8)$  e  $X_2 \sim \text{Beta}(4, 9, 8, 20)$ , sendo a primeira aproximadamente normal e a segunda aproximadamente exponencial. Como anteriormente, realizaram-se  $M = 10^4$  simulações. A distribuição acumulada da variável  $Y$  pode ser observada na figura 5, com destaque para a sua assimetria.

**Fig. 5.** Distribuição acumulada da variável de saída  $Y$  (caso assimétrico, com  $M = 10^4$  simulações).



**Fig. 6.** Variação do intervalo de abrangência para distintos valores de  $\alpha$  entre 0 e 5% (caso simétrico, com  $M = 10^4$  simulações).



A figura 6 mostra a variação do intervalo de abrangência  $\hat{I}_p, p = 0,95$ , estimado para cada valor de  $\alpha$ . Observa-se que a variação desses intervalos de abrangência comporta-se de forma claramente assimétrica. Isso resulta num intervalo de abrangência mínimo probabilisticamente assimétrico, posicionado de maneira tal que  $\alpha \ll 1 - (p + \alpha)$ , com amplitude  $\hat{I}_{95\% \min} = 3,299$ , sendo seus extremos  $\hat{I}_{95\% \inf} = 24,816$  e  $\hat{I}_{95\% \sup} = 28,114$ .

Quando se realiza a busca de  $\hat{I}_{pmin}$ , deve-se atentar para o efeito das variações amostrais. Dada a baixa curvatura da função  $I_p$  na região adjacente ao mínimo, ligeiras variações amostrais no valor das estimativas  $\hat{I}_p$  podem resultar em intervalos mínimos fortemente deslocados da posição teórica ou ainda posicionados de modo ambíguo (por exemplo, quando se encontram dois ou mais valores de  $\hat{I}_{pmin}$  iguais). Isso irá acontecer ao se implementar rotinas convencionais de busca do mínimo elemento no vetor que armazena as estimativas de  $\hat{I}_p$  para diferentes valores de  $\alpha$ , especialmente com amostras  $M$  relativamente pequenas e valores de  $\hat{I}_p$  expressos com baixa resolução. É possível atenuar tal problema com o uso de variáveis de alta resolução (*double* ou *long double*) e tamanhos de amostra grandes, como as adotadas nas referências consultadas (GUM Suppl 1, 2004; Cox, et al., 2001). Uma solução alternativa, que permite relaxar os requisitos anteriores, é ajustar uma função de interpolação aos dados e buscar, por métodos numéricos ou analíticos, o mínimo dessa função. Na implementação dessa solução, deve-se sempre confirmar que, na região adjacente ao mínimo, os resíduos da interpolação sejam insignificantes.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo foi brevemente descrita a aplicação da técnica de Simulação de Monte Carlo para a avaliação de incertezas de medição. Mostrou-se que a SMC constitui uma alternativa válida ao método clássico, aplicável em qualquer situação prática, mas especialmente indicada a casos em que as condições de aplicabilidade do método clássico são violadas, como a seguir:

- o modelo matemático da medição apresenta uma acentuada não-linearidade;
- a distribuição de probabilidade da grandeza de saída afasta-se significativamente da normal.

O método da SMC também é particularmente útil, quando modelos matemáticos complexos estão envolvidos, nos quais é difícil ou inconveniente determinar as derivadas parciais exigidas pelo método clássico, ou quando a grandeza medida não pode ser explicitamente expressa em razão das grandezas de influência.

Cabe salientar também que o uso de ferramentas computacionais, no âmbito da metrologia científica e industrial, tem sido cada vez mais aceito. As atividades metrológicas vêm sendo fortemente beneficiadas pela aquisição de dados e pelo processamento de resultados via computador, com a conseqüente redução do trabalho rotineiro e dos erros grosseiros, aspectos esses inevitáveis quando grandes quantidades de números precisam ser manipuladas. As ferramentas computacionais são bem-aceitas pelos organismos de acreditação de laboratórios, segundo a norma ISO/IEC 17025, e pelas certificadoras de sistemas da qualidade (ISO 9000 e ISO/TS 16949, entre outras). Adicionalmente, a rápida evolução dos computadores tem disponibilizado aos metrologistas das indústrias e de pequenos laboratórios poderosas ferramentas de cálculo, que viabilizam a execução da SMC a um custo razoável e em tempos compatíveis com a dinâmica do serviço metrológico.

A combinação das vantagens da SMC com a evolução dos meios computacionais de processamento de dados indica que ela poderá ser, no futuro, a técnica preferida para a avaliação de incertezas de medição, substituindo total ou parcialmente o método de propagação de incertezas. Seguramente, técnicos e engenheiros atuantes em metrologia estariam de acordo com essa perspectiva, uma vez que a simulação é muito mais intuitiva que a tradicional combinação de incertezas. Entretanto, existem ainda questões que precisam ser tratadas a fim de tornar isso possível. Algumas delas foram levantadas neste artigo. É necessário desenvolver uma sistemática que permita minimizar o tamanho de amostra  $M$ , porém, sem comprometer a qualidade dos resultados da simulação, de modo que os objetivos da análise possam ser atendidos. A adoção de técnicas de reamostragem (conhecidas como técnicas de *bootstrap*) pode constituir um recurso interessante para diminuir o tempo de processamento e aumentar a qualidade das estimativas.

Existem também outros empecilhos à aplicação massiva da SMC que parecem mais difíceis de ser superados. Um deles desafia a principal vantagem do conceito de incerteza: fornecer as bases para melhorar o processo de medição. Um balanço de incerteza clássico, realizado segundo o método de propagação de incertezas, possibilita individualizar o efeito de cada contribuição para a incerteza. Assim, torna-se simples identificar as contribuições dominantes e agir nelas para diminuir a incerteza da medição com boa relação impacto/

esforço. Em contrapartida, a SMC não realiza explicitamente derivadas da variável de saída a respeito das grandezas de influência. A importância relativa das diferentes contribuições fica, conseqüentemente, oculta aos olhos do analista, limitando sua capacidade de induzir melhorias no processo. Métodos de análise de sensibilidade (experimentos virtuais programados  $2^k$ , entre outros) poderiam ser aplicados para superar essa limitação, mas o tempo total de simulação e processamento de resultados tornar-se-ia proibitivo.

Outro grande empecilho é a dificuldade de muitos metrologistas em construir um modelo matemático da medição. Em princípio, esse modelo revela-se necessário também no método de propagação de incertezas. Porém, na prática, é muitas vezes evitado, realizando-se a avaliação de incerteza com a ajuda de tabelas, nas quais cada contribuição caracteriza-se pela sua incerteza padrão e por um fator de sensibilidade (que substitui a derivada parcial da grandeza medida com relação à grandeza de influência). Esse tipo de operação simplificada é impossível ao usar a SMC: sem modelo matemático, não existe simulação possível. Assim, a generalização do uso da SMC traria como conseqüência a necessidade de treinar os metrologistas na difícil tarefa de analisar sistemas físicos e construir modelos matemáticos que os representem.

Como foi mostrado nos parágrafos anteriores, a correta aplicação de SMC na avaliação de incertezas de medição não é simples, nem está carente de desafios dos mais diversos cunhos. Apesar disso, a sua universalidade e a capacidade de operar na análise de sistemas de medição complexos a tornam uma ferramenta de grande valor na metrologia científica e industrial, merecendo detalhada atenção por parte de profissionais e pesquisadores.

#### AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Brasil.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BELANGER, B.C. et al. Traceability: an evolving concept. In: *A Century of Excellence in Measurements, Standards and Technology – a chronicle on selected NBS/NIST publications 1901-2000*. Gaithersburg: Ed. D.R. Lide, NIST SP 958, 2000.
- BURY, K. *Statistical Distributions in Engineering*. USA, Cambridge University Press, 1999.
- COX, M.G. et al. Use of Monte Carlo Simulation for Uncertainty Evaluation in Metrology. In: *Advanced Mathematical & Computational Tools in Metrology V*. Singapore: World Scientific Publishing, 2001.
- DONATELLI, G. D. *Capability of Measurement Systems for 100% Inspection Tasks*. Universidade Fed. de Sta. Catarina, 1999.
- GUM. *Guia para a Expressão da Incerteza de Medição*. 3ª. ed. bras. do *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. Rio de Janeiro: INMETRO, ABNT, 2003.
- GUM Suppl 1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) – Supplement 1: numerical methods for the propagation of distributions*. In accordance with the ISO/IEC Directives, Part 1, 2001, Clause A5, this draft is submitted to the ISO national bodies for approval. International Organization for Standardization, 2004.
- ISO/TS 16949. *Quality Management Systems – particular requirements for the application of ISO 9001: 2000 for automotive production and relevant service part organizations*. 2ª. ed., 2002.
- NBR ISO 9000:2000. *Sistemas de Gestão da Qualidade – fundamentos e vocabulário*. Rio de Janeiro: ABNT, 2002.
- NBR ISO/IEC 17025. *Requisitos Gerais para a Competência de Laboratórios de Ensaio e Calibração*. RJ: ABNT, 2001.
- SOBOL, I.M. *A Primer for the Monte Carlo Method*. Flórida: CRC, 1994.
- VIM. *Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia*. Brasília: Senai/DN, 2000.

#### Dados dos autores

##### GUSTAVO DANIEL DONATELLI

Professor doutor e visitante do Departamento de Engenharia Mecânica e do Programa de Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial da UFSC.

##### ANDRÉA CRISTINA KONRATH

Mestre em engenharia de produção e sistemas e doutoranda em engenharia mecânica, na área de concentração metrologia e instrumentação, pela UFSC.

Recebimento do Artigo: 27/jul./05

Aprovado: 4/nov./05