

# Adaptação de um código computacional de escoamentos incompressíveis 3-D para problemas com superfície livre

Lucas Vanini<sup>1</sup> & Paulo R. de F. Teixeira<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Mestrando do Curso de Engenharia Oceânica – FURG, Rio Grande, RS –  
lucasvanini@bol.com.br*

<sup>2</sup> *Departamento de Materiais e Construção – FURG, Rio Grande, RS –  
teixeira@dmc.furg.br*

**RESUMO:** Neste trabalho, apresenta-se a adaptação de um código computacional de simulação numérica de escoamentos incompressíveis tridimensionais (FLUINCO) para tratar problemas com superfície livre. É adotada uma descrição arbitrária lagrangeana euleriana (ALE), onde o movimento da malha é realizado através de um esquema de suavização das velocidades. O algoritmo, desenvolvido em FORTRAN, baseia-se no Método dos Elementos Finitos (MEF). As equações diferenciais governantes do fluido são discretizadas no tempo e no espaço por um método semi-implícito de Taylor-Galerkin de dois passos usando elementos tetraédricos lineares. É analisado o problema do escoamento sobre um canal com uma depressão trapezoidal no fundo (trench) e os resultados são comparados com os obtidos por outros autores.

**PALAVRAS-CHAVE:** Simulação Numérica, Elementos Finitos, Fluidos Incompressíveis, Superfície Livre.

## 1. INTRODUÇÃO

O aumento da capacidade dos computadores e da precisão dos códigos computacionais, bem como os custos elevados de laboratórios experimentais, tornam os modelos numéricos cada vez mais presentes na solução dos problemas de engenharia. A possibilidade dos Métodos Numéricos de simular situações simples, identificando a influência de cada variável sobre o fenômeno físico envolvido, a busca pela otimização do projeto e a rapidez de resposta da solução, são outros fatores que justificam o uso da simulação numérica para o tratamento destes problemas.

O uso da simulação numérica no estudo da circulação de oceanos, em regiões costeiras, de estuários, rios e lagunas é de fundamental importância para o clima e para as atividades comerciais e industriais. Também, a interação fluido-estrutura nestes meios tem despertado um interesse muito grande dos cientistas nos últimos anos. Abalos sísmicos em meio fluido, interação navio-água, dinâmica de estruturas oceânicas devido às ações do ambiente, são alguns exemplos destes tipos de problemas. Aplicativos consagrados como o POM (*princeton ocean model*) [4], Delft3D-Flow [6], entre outros, foram e estão sendo utilizados em diversas regiões do mundo.

A análise de escoamentos viscosos incompressíveis através do MEF foi introduzida por Oden e Welford [21] através dos métodos mistos, os quais utilizam diferentes funções de interpolação para as componentes de velocidade e para a pressão, com o objetivo de evitar modos espúrios de pressão. Os chamados métodos fracionados foram introduzidos por Chorin [5] e após foram apresentados por diversos outros autores tais como Donea et al. [7] e Kim e Moin [15]. Nesses

métodos, primeiramente calcula-se o campo de velocidades com a equação de movimento, omitindo os gradientes de pressão. Calcula-se a pressão através de uma equação de Poisson, usando as componentes de velocidade aproximadas obtidas do passo anterior e, finalmente, o campo de velocidades é corrigido usando a pressão obtida pela equação de Poisson. Os esquemas que analisam os escoamentos viscosos incompressíveis desta forma permitem o uso de funções de interpolação de mesma ordem para a pressão e para as componentes de velocidade e são considerados métodos eficazes. Esses métodos foram empregados por muitos autores tais como Gresho et al. [8], Ren e Utnes [25] e Kovacs e Kawahara [17], entre outros.

Nos últimos anos, os problemas envolvendo superfície livre receberam maior atenção dos pesquisadores. Tais problemas são de difíceis soluções, pois possuem condições de contorno não lineares impostas a superfícies em movimento, onde a posição do objeto no domínio faz parte da solução do problema. A solução numérica envolvendo fluidos viscosos em superfície livre foi introduzida por Harlow e Welch [9,10], onde apresentaram o método MAC (*marker and cell*). O MAC foi desenvolvido para simular tanto escoamentos internos como externos com superfícies livres. Seu nome decorre do emprego de partículas marcadoras (*markers*) para identificar a posição da superfície livre do fluido. Uma versão diferente desta aproximação é o método desenvolvido por Hirt e Nichols [12], denominado método VOF (*volume of fluid*). Outros autores, como por exemplo, Ramaswamy e Kawahara [24], Radovitzky e Ortiz [23], usaram a descrição Lagrangeana, enquanto que a descrição Lagrangeana euleriana arbitrária (ALE) foi utilizada por Hirt et al. [11,12], Onâte e Garcia [22], Navti et al. [20], Saulaimani e Saad [27], dentre muitos outros, para resolver problemas envolvendo superfície livre. Um método popular utilizado para tratar condições de contorno e domínios em movimento é o método DST/ST (*Deforming Spatial Domain/Stabilized Space-Time*), que foi introduzido nos anos 90 por Tezduyar et al. [31] e aplicado com muito sucesso por Mittal e Tezduyar et al. [18,19] nos problemas envolvendo interação fluido-estrutura.

Neste trabalho, apresenta-se uma adaptação de um código 3D utilizado para a modelagem de escoamentos tridimensionais de fluidos incompressíveis, FLUINCO [29,30], para tratar problemas com superfície livre. O código utiliza um método fracionado de Taylor-Galerkin de dois passos para discretizar no tempo e no espaço as equações de Navier-Stokes. Adota-se um elemento tetraédrico linear, o qual tem a vantagem de se adaptar aos domínios de geometrias complexas e é um elemento de ótima eficiência computacional. Uma formulação lagrangeana euleriana arbitrária (ALE) é utilizada para permitir a solução de problemas que envolvem grandes movimentos relativos de superfícies móveis. A formulação ALE foi estendida para a Técnica de Elementos Finitos por Hughes et al. [13], e consiste basicamente na introdução de um domínio de referência descrito pelas coordenadas de referência, permitindo que o seu movimento seja arbitrário e independente dos pontos materiais e espaciais.

## **2. O MÉTODO FRACIONADO DE TAYLOR-GALERKIN DE DOIS PASSOS**

### **2.1 As equações que governam o escoamento de fluidos**

As equações fundamentais que governam o escoamento dos fluidos são as equações de Navier-Stokes compostas pelas equações da continuidade, da quantidade de movimento e da energia, expressas na descrição arbitrária lagrangeana euleriana (ALE) da forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i = w_j \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \varepsilon v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i p) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = w_i \frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial x_i}, \quad (3)$$

onde  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $v_i$  é o vetor velocidade do fluido,  $w_i$  é o vetor velocidade da malha,  $p$  é a pressão termodinâmica,  $\tau_{ij}$  são as componentes do tensor desviador,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $g_i$  é o vetor aceleração da gravidade,  $T$  é a temperatura,  $\varepsilon$  é a energia total específica e  $k$  é a condutividade térmica. Os termos de fonte foram omitidos nas equações (1) e (3) para simplificar o equacionamento. As componentes do tensor desviador para um fluido newtoniano são expressas pela relação constitutiva dada por:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (4)$$

onde  $i, j, k = 1, 2, 3$ ;  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade de cisalhamento e  $\lambda$  é o coeficiente de viscosidade volumétrica, sendo que, de acordo com as hipóteses de Stokes,  $\lambda = \frac{-2\mu}{3}$ . A velocidade do som  $c$  é definida em um escoamento isoentrópico como segue:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (5)$$

Para escoamentos de fluidos incompressíveis a equação da conservação de energia pode ser solucionada de forma independente, após o campo de velocidades ser estabelecido, diferentemente dos escoamentos em fluidos compressíveis, nos quais todas as equações estão acopladas. Também, a equação (1), com o auxílio da equação (5), pode ser escrita da forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6)$$

onde  $U_i = \rho v_i$ . A equação da quantidade de movimento pode ser escrita da forma:

$$\frac{\partial(U_i)}{\partial t} = -\frac{\partial(f_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i + w_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,3) \quad (7)$$

sendo,  $f_{ij} = v_j(\rho v_i) = v_j U_i$  ( $i,j=1,2,3$ ).

As Eq. (6) e (7), acrescidas das condições de contorno e condições iniciais, definem unicamente o problema a ser solucionado.

## 2.2 Discretização temporal das equações governantes

O algoritmo utiliza o método de Taylor-Galerkin de dois passos para a discretização no tempo e no espaço das equações de Navier-Stokes [29]. A discretização no domínio do tempo é realizada através de uma expansão em série de Taylor das variáveis de campo  $U_i$ . Primeiramente, determina-se as variáveis  $U_i$  no instante  $t + \Delta t / 2$  ou  $n + 1/2$  da seguinte forma [29]:

$$\tilde{U}_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - w_j^n \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} - \rho g_i \right) \quad (i,j=1,2,3) \quad (8)$$

onde, a variável  $\tilde{U}_i^{n+1/2}$  não considera o termo de variação de pressão  $\Delta p = p^{n+1} - p^n$ . A discretização no tempo da equação da continuidade, Eq. (6), permite o cálculo de  $\Delta p$ , resultando na seguinte expressão:

$$\Delta \rho = \frac{1}{c^2} \Delta p = -\Delta t \left[ \frac{\partial \tilde{U}_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right] \quad (i = 1,2,3) \quad (9)$$

As variáveis de campo em  $n + 1/2$ , corrigidas com o termo de variação de pressão, são expressas da forma:

$$U_i^{n+1/2} = \tilde{U}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3) \quad (10)$$

O passo seguinte consiste em determinar as variáveis  $U_i$  no instante  $t + \Delta t$  ou  $n + 1$  da seguinte maneira:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t \left( \frac{\partial f_{ij}^{n+1/2}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{n+1/2}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_i} - w_j^{n+1/2} \frac{\partial U_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - \rho g_i \right) \quad (i=1,2,3) \quad (11)$$

## 2.3 Discretização espacial das equações governantes

Na discretização espacial, aplica-se a técnica padrão de Galerkin, utilizando para as variáveis no instante de tempo  $t + \Delta t/2$  ou  $n + 1/2$  uma função de interpolação constante no elemento  $P_E$  e para as variáveis em  $t$  e  $t + \Delta t$  ou  $n$  e  $n + 1$ , respectivamente, uma função de interpolação linear  $N$ . Aplicando este procedimento nas Eq. (8) a (11), têm-se [29]:

$$\Omega_E^{n+1/2} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{U}}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ \mathbf{L}_j (\bar{\mathbf{f}}_{ij}^n - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ij}^n) + \mathbf{L}_i \bar{\mathbf{p}}^n - \mathbf{T} \bar{\mathbf{U}}_i^n - \Omega_E^{n+1/2} \overline{\boldsymbol{\rho} g_i} \right] \quad (12)$$

$$\left( \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{H} \right) \Delta \bar{\mathbf{p}} = \Delta t \left( \mathbf{L}_i^T \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} + \mathbf{f}_a \right) \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4 \Omega_E} \mathbf{L}_i \Delta \bar{\mathbf{p}} \quad (14)$$

$$\mathbf{M}^{n+1} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \mathbf{M}^n \bar{\mathbf{U}}_i^n + \Delta t \left[ \mathbf{L}_j^T (\bar{\mathbf{f}}_{ij}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_j^{n+1/2} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2}) - \mathbf{Q}_j \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ij}^n + \mathbf{Q}_i (\bar{\mathbf{p}}^n + \Delta \bar{\mathbf{p}}/2) + \mathbf{S}_{bi} - \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{g}}_i \right] \quad (15)$$

onde as variáveis com barra superior que estão nos instantes  $n$  e  $n + 1$  representam valores nodais, enquanto que aquelas que estão no instante  $n + 1/2$  representam valores constantes no elemento. As matrizes e vetores que envolvem as Eq. (12) a (15) são resultantes das integrais de volume e de superfície obtidas pela aplicação da técnica padrão de Galerkin [29], descrita como:

$$\begin{aligned} \Omega_E^{n+1/2} &= \int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{P}_E^T \mathbf{P}_E \, d\Omega & \mathbf{C} &= \int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \mathbf{N} \, d\Omega & \mathbf{L}_i &= \int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \, d\Omega & \mathbf{T} &= \int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_i^n \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \, d\Omega \\ \tilde{\mathbf{M}} &= \int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \left( \frac{1}{c^2} \right) \mathbf{N} \, d\Omega & \mathbf{H} &= \int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \, d\Omega & \mathbf{f}_a &= - \int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{P}_E \mathbf{n}_i \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} \, d\Gamma \\ \mathbf{M}^n &= \int_{\Omega^n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega & \mathbf{Q}_i &= \int_{\Omega^n} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} \, d\Omega & \mathbf{S}_{bi} &= - \int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{P}_E \mathbf{n}_j \, d\Gamma (\bar{\mathbf{f}}_{ij}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_j^{n+1/2} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2}) \end{aligned} \quad (16)$$

A equação da continuidade, Eq. (13), é solucionada pelo método iterativo dos gradientes conjugados [2] utilizando-se um pré-condicionamento diagonal.

## 3. ADAPTAÇÃO DO FLUINCO PARA PROBLEMAS COM SUPERFÍCIE LIVRE

### 3.1 Condições de contorno de superfície livre

Os problemas de escoamento de fluidos com superfície livre são caracterizados por existir uma superfície de interface entre dois fluidos (água e ar). Neste contorno, a pressão atmosférica é

prescrita como um valor constante de referência. Neste algoritmo é utilizada a descrição ALE e imposta a condição de contorno cinemática da superfície livre, dada por [24]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (v_i - w_i) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (17)$$

onde  $\eta$  é a elevação da superfície livre,  $v_i$  e  $w_i$  são as componentes de velocidade do fluido e da malha na superfície livre, respectivamente.

No plano horizontal ( $xy$ ), o contorno é fixo. Assim, não existe movimento dos nós no interior do domínio nestas direções. Portanto, o sistema adotado nas direções  $x$  e  $y$  é o sistema Euleriano (ver Fig. 1). Já na direção vertical ( $z$ ), duas superfícies estabelecem a condição de contorno para o movimento de malha dos nós no interior do domínio. Os nós da superfície do fundo, considerados fixos, possuem velocidade de malha nula. Com a equação cinemática da superfície livre Eq. (17), o algoritmo calcula a velocidade de malha e, por consequência os deslocamentos dos nós pertencentes à superfície livre. É realizada uma atualização da posição dos nós no interior do domínio para que os elementos não sofram distorções excessivas.

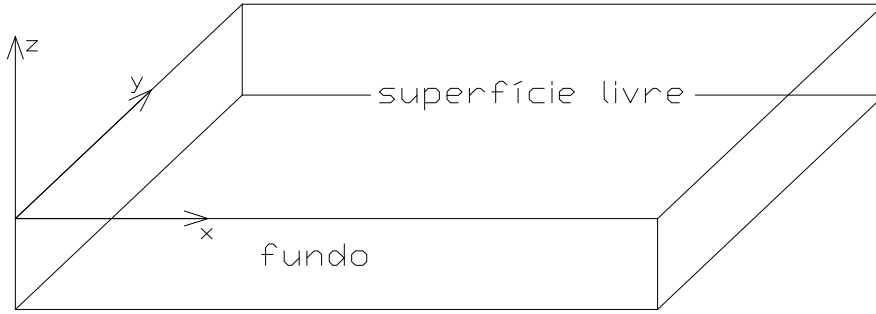


Figura 1- Domínio dos problemas de escoamentos incompressíveis com superfície livre

### 3.1.1 Discretização temporal da equação cinemática da superfície livre

A discretização temporal no domínio da superfície livre é realizada de forma análoga à apresentada para as equações da quantidade de movimento. Aplicando-se uma expansão em série de Taylor até a segunda ordem da Equação Cinemática da superfície livre, encontram-se as seguintes equações correspondentes a discretização do tempo no domínio da superfície livre:

$$\eta^{n+1/2} = \eta^n + \frac{\Delta t}{2} \left( v_3 - v_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^n \quad (18)$$

$$\eta^{n+1} = \eta^n + \Delta t \left( v_3 - v_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^{n+1/2} \quad (19)$$

### 3.2.1 Discretização espacial da equação cinemática da superfície livre

O domínio da equação é o da superfície livre, discretizada pelas faces dos elementos tetraédricos que a compõe. As equações da superfície livre são discretizadas no espaço considerando o elemento triangular linear, da forma:

$$\eta^{n+1/2} = \mathbf{N}_s \bar{\eta}^{n+1/2} \quad \eta^n = \mathbf{N}_s \bar{\eta}^n \quad \eta^{n+1} = \mathbf{N}_s \bar{\eta}^{n+1} \quad (20)$$

onde  $N_s$  é a função interpolação linear do elemento triangular,  $\bar{\eta}^n$ ,  $\bar{\eta}^{n+1/2}$  e  $\bar{\eta}^{n+1}$  são os valores nodais das elevações nos instantes  $t$ ,  $t + \Delta t / 2$  e  $t + \Delta t$ , respectivamente. Logo, aplicando o Método de Galerkin, as equações (18) e (19) obtêm-se:

$$\int_{A^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \bar{\eta}^{n+1/2} = \int_{A^n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \bar{\eta}^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \int_{A^n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \bar{v}_3^n - \int_{A^n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \left( \bar{v}_i \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_i} \right)^n \right) \quad (21)$$

e

$$\int_{A^{n+1}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \bar{\eta}^{n+1} = \int_{A^n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \bar{\eta}^n + \Delta t \left( \int_{A^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \bar{v}_3^{n+1/2} - \int_{A^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \left( \bar{v}_i \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_i} \right)^{n+1/2} \right) \quad (22)$$

onde  $i = 1, 2$  e  $A$  é a área da face do elemento. Representando as equações (21) e (22) na forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{M}_S^{n+1/2} \bar{\eta}^{n+1/2} = \mathbf{M}_S^n \bar{\eta}^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \mathbf{M}_S^n \bar{v}_3^n + \mathbf{M}_S^n \left( \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_1} \right)^n + \mathbf{M}_S^n \left( \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_2} \right)^n \right) \quad (23)$$

$$\mathbf{M}_S^{n+1} \bar{\eta}^{n+1} = \mathbf{M}_S^n \bar{\eta}^n + \Delta t \left( \mathbf{M}_S^{n+1/2} \bar{v}_3^{n+1/2} + \mathbf{M}_S^{n+1/2} \left( \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_1} \right)^{n+1/2} + \mathbf{M}_S^{n+1/2} \left( \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_2} \right)^{n+1/2} \right) \quad (24)$$

onde:

$$\mathbf{M}_S = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \quad (25)$$

As equações (23) e (24) são solucionadas de forma iterativa, similar à solução das equações da quantidade de movimento.

### 3.2 A lei de movimento da malha

Os métodos de solução de problemas que envolvem movimentos de superfícies de contorno utilizando uma formulação lagrangeana euleriana arbitrária (ALE), necessitam de uma lei que

estabeleça o movimento dos nós no interior do domínio. A distribuição espacial da velocidade da malha deve ser tal que a distorção dos elementos seja a menor possível, respeitando as condições de contorno.

No FLUINCO, as velocidades no interior do domínio são suavizadas através de funções que ponderam a influência da velocidade de cada nó pertencente às superfícies de contorno. A atualização da velocidade da malha, nos pontos  $i$  do interior do domínio, está baseada na velocidade da malha nos pontos  $j$ , pertencentes às superfícies de contorno da seguinte forma [29]:

$$\mathbf{w}^i = \frac{\sum_{j=1}^{ns} a_{ij} \mathbf{w}^j}{\sum_{j=1}^{ns} a_{ij}} \quad (26)$$

onde  $ns$  é o número total de nós pertencentes às superfícies e  $a_{ij}$  são os coeficientes de influência entre os nós no interior do domínio e os de superfície, dados pela seguinte expressão:

$$a_{ij} = \frac{1}{d_{ij}^4} \quad (27)$$

sendo,  $d_{ij}$  a distância entre os nós  $i$  e  $j$ . Na realidade,  $a_{ij}$  representa o peso que cada nó  $j$  da superfície tem sobre o valor da velocidade da malha nos nós  $i$  do interior do domínio.

Este método proporciona movimentos de malhas bastante suavizados, com configurações ao longo do tempo de ótima qualidade, mesmo quando a superfície apresenta grandes deslocamentos.

### 3.3 Modelo de turbulência

Para modelar a turbulência, utiliza-se uma viscosidade turbulenta (*eddy viscosity*), definida por Mital e Tezduyar et al. [18,19], como segue:

$$\nu_t = (kl)^2 \sqrt{2(S_{ij} S_{ij})}, \quad (28)$$

onde  $k=0.41$  é a constante de Von Kármán,  $S_{ij}$  é dado por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (29)$$

$l$  é o comprimento de mistura que, para este problema, é calculado conforme a proposta de Johns [14], como abaixo:

$$l = \frac{(z + h + z_0)(\eta - z + z_s)}{h + \eta + z_0 + z_s}, \quad (30)$$



sendo  $\eta$  a elevação da superfície,  $z_0$  e  $z_s$  os comprimentos de rugosidade do fundo e da superfície livre, respectivamente e  $h$  a profundidade.

#### 4. APLICAÇÃO NUMÉRICA

Neste trabalho é apresentada a análise do escoamento da água sobre um canal com uma depressão trapezoidal no fundo (trench), conforme mostra o esquema da figura 2.

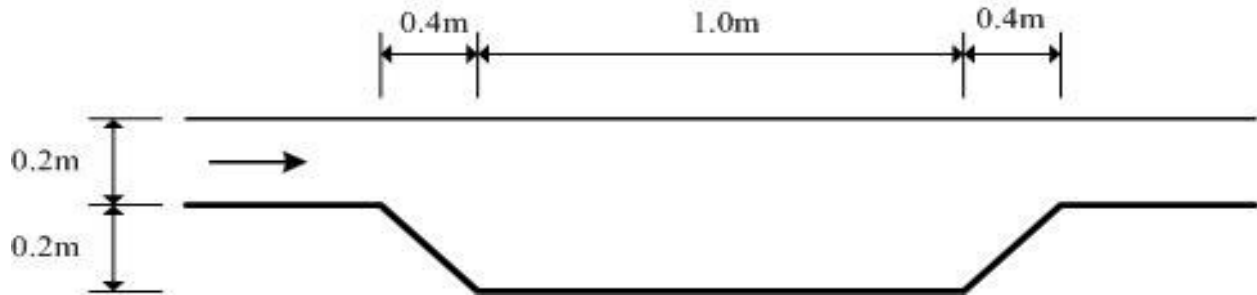


Figura 2 – Esquema do exemplo de uma corrente sobre uma fossa.

Existem muitos exemplos práticos de escoamentos turbulentos em domínios com esta geometria (trenches) nos oceanos, mares, lagoas e rios. Frequentemente, para facilitar o movimento de carregadores largos, é escavada uma fossa próxima a um porto. Também quando se deseja enterrar pipelines ou um túnel através de rios. Nesta região, o processo de transporte de sedimentos torna-se muito importante. A profundidade e o perfil da fossa são determinantes neste processo, havendo uma tendência de deposição na parte frontal e erosão a montante da fossa. A determinação da localização ótima da fossa e a frequência de dragagem dependem de um estudo de transporte de sedimentos na região, o qual passa pelo conhecimento detalhado do escoamento médio e da estrutura da turbulência.

A tarefa de modelar este tipo de escoamento é muito complexa. Alguns autores apresentaram resultados deste exemplo, citam-se Koutitas e O'Connor [16], Alfrink e Van Rijn [1], Basara e Younis [3], Stansby e Zhou [28]. Destacam-se as diferentes propostas de modelos de turbulência utilizados para este caso de estudo.

O problema estudado tem profundidade da água igual a 0.2m e o fundo é considerado rugoso. Na entrada, é imposta uma componente de velocidade horizontal  $v_1$  que segue a seguinte expressão:

$$v_1 = \frac{0.033}{k} \ln \left[ 30 \frac{(z' - 0.0067)}{k_s} \right] \text{ [m/s]} \quad (31)$$

onde  $z'$  é a coordenada vertical com origem no fundo,  $k=0.4$  é a constante de Kármán e  $k_s=0.002\text{m}$  é a altura de rugosidade equivalente. O sistema de referência tem origem localizada na superfície livre e no começo da fossa.

As propriedades adotadas para o fluido são  $\rho = 1000.0 \text{ Kg/m}^3$  e  $\mu = 1.0 (10^{-3}) \text{ Ns/m}^2$ . As condições de contorno impostas para o campo de velocidade são de velocidade prescrita na entrada de fluxo, conforme a Eq. (31), e componentes de velocidade nas direções vertical e

transversal ao escoamento nulas na saída. Para o campo de pressão impõe-se para as variações de pressão com o tempo nulas na entrada de fluxo e na superfície livre. A elevação de superfície é anulada na entrada e na saída de fluxo. A tração normal à superfície é anulada para todas as superfícies de contorno com exceção da superfície de entrada e de saída de fluxo.

É utilizado o modelo de turbulência apresentado na seção 3.3, onde  $z_0=0,0067\text{m}$  e  $z_s=0,0004\text{m}$ . A malha de elementos finitos possui 8187 nós e 22076 elementos tetraédricos com uma camada de elementos no plano transversal ao escoamento (ver Fig.3). Na região da depressão do fundo têm-se aproximadamente 17 camadas de elementos distribuídos na direção vertical  $z$ . O passo de avanço no tempo adotado é de  $0.0003\text{s}$ , atingindo-se o regime permanente em um instante de tempo aproximado de  $23\text{s}$ .

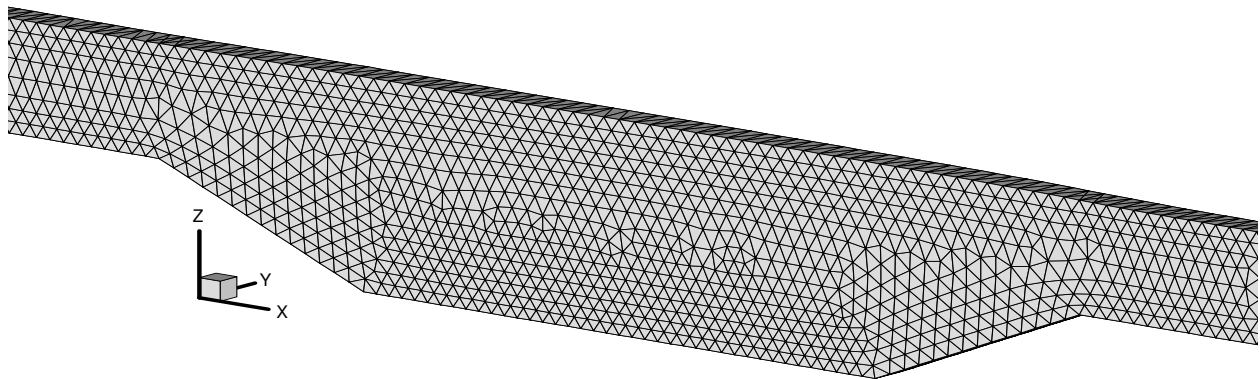


Figura 3 – Malha de elementos finitos do exemplo de uma corrente em um canal com depressão trapezoidal.

A figura 4 apresenta a distribuição da componente de velocidade obtida pelo FLUINCO na direção  $x$  e as linhas de corrente. Stansby e Zhou [28] também modelaram este problema usando o Método de Volumes Finitos Semi-Implícito, o modelo de turbulência  $K - \epsilon$  e 30 camadas de células na vertical apresentando os resultados das linhas de corrente reproduzidas na figura 5.

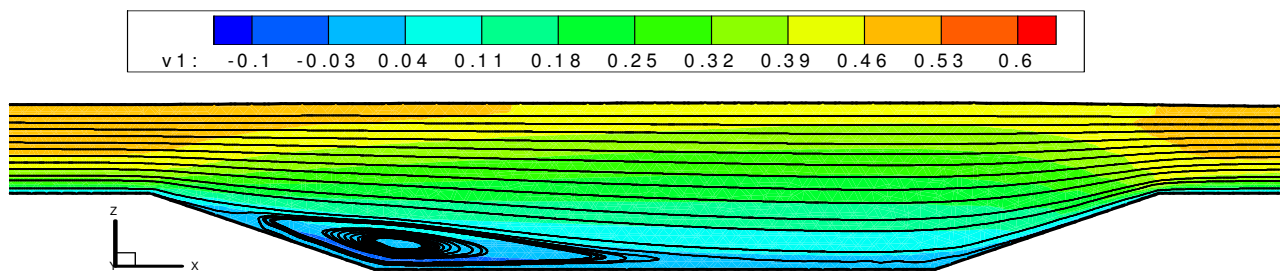


Figura 4 – Isoregiões da componente de velocidade horizontal e linhas de corrente para o exemplo de uma corrente em um canal com depressão trapezoidal.

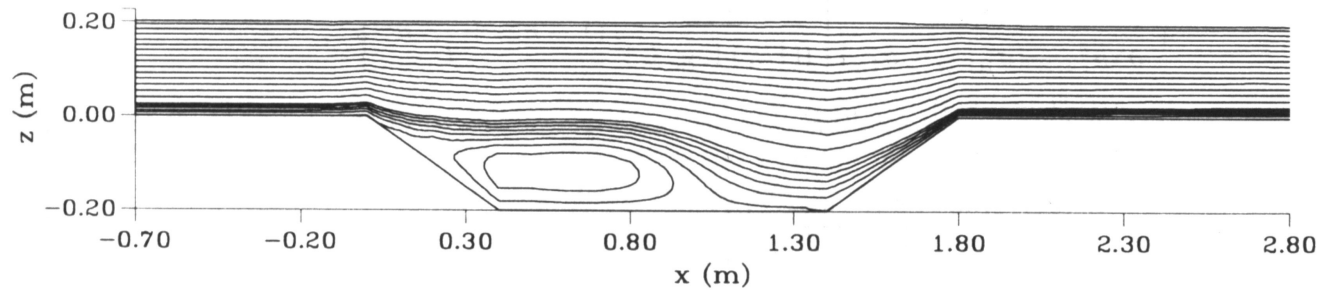


Figura 5 – Linhas de corrente apresentadas por Stansby e Zhou [28].

Observa-se a semelhança dos vórtices apresentados pela referência e pelo presente trabalho.

Na figura 6, apresentam-se os perfis dos vetores de velocidade em três estações: na metade da rampa à montante ( $x=0,2$ ), no centro da depressão ( $x=0,9$ ) e na metade da rampa à jusante ( $x=1,6$ ).

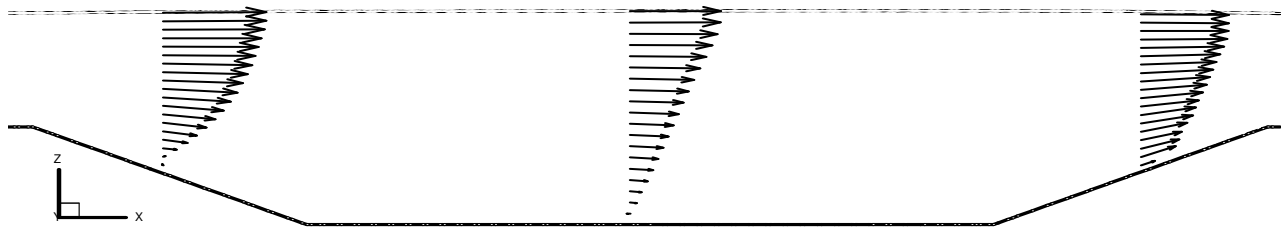


Figura 6 – Vetores de velocidade obtidos para o exemplo de um canal com depressão trapezoidal.

As Fig. 7, 8 e 9 mostram os perfis da componente de velocidade na direção  $x$  nas três estações citadas. Os resultados são comparados com os obtidos experimentalmente por Rijn [26].

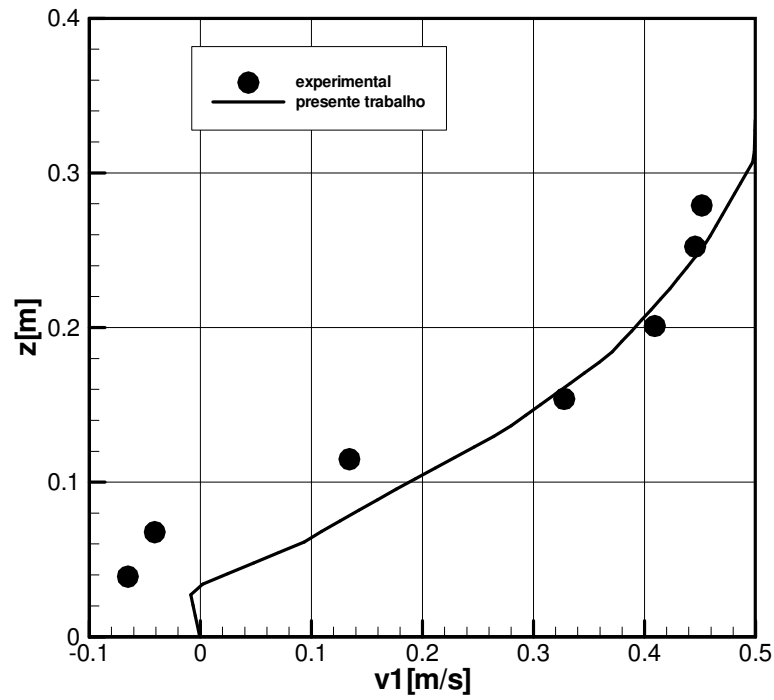


Figura 7 – Comparação do perfil da componente de velocidade  $v_1$  em  $x=0.2m$

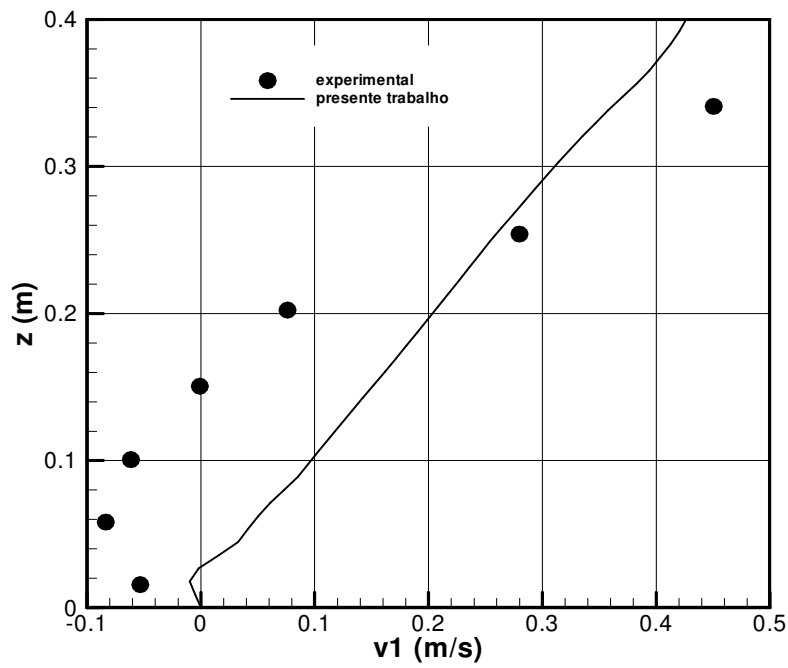


Figura 8 – Comparação do perfil da componente de velocidade  $v_1$  em  $x=0.9m$

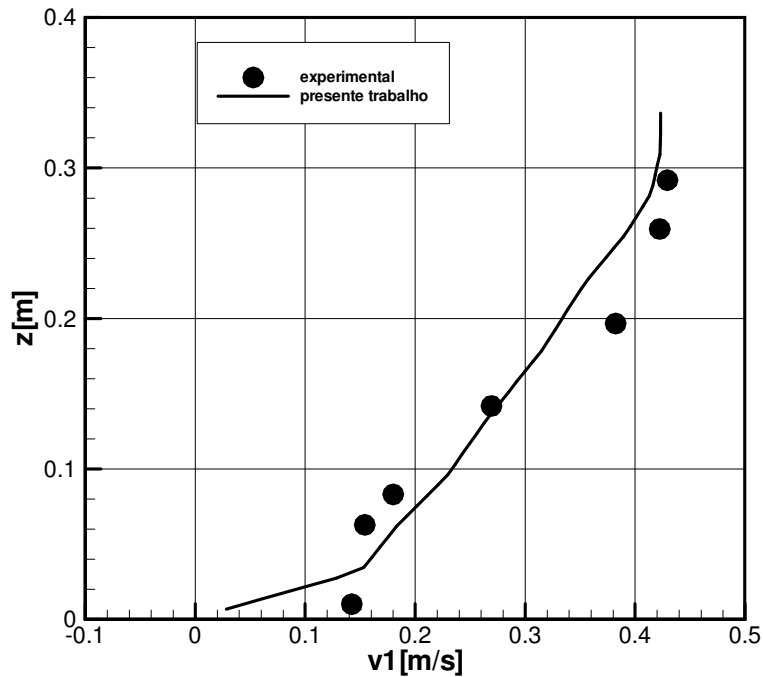


Figura 9 – Comparação do perfil da componente de velocidade  $v_1$  em  $x=1.6m$

Os resultados obtidos pelo FLUINCO mostram boa semelhança com aqueles obtidos pela referência através de simulação experimental. Nas rampas, observou-se um pequeno afastamento dos resultados experimentais próximo à superfície do fundo, possivelmente pela dimensão da malha utilizada. Nestas regiões, uma malha mais refinada deve identificar as variações mais acentuadas do campo de velocidades. A pouca discretização na direção vertical também é causadora de algumas diferenças encontradas para o perfil localizado na metade da depressão do fundo ( $x=0,9$ ).

Na figura 10, têm-se os perfis de velocidade para alguns trechos do canal obtidos por Stansby e Zhou [28] e comparados com os obtidos experimentalmente por Rijn [26].

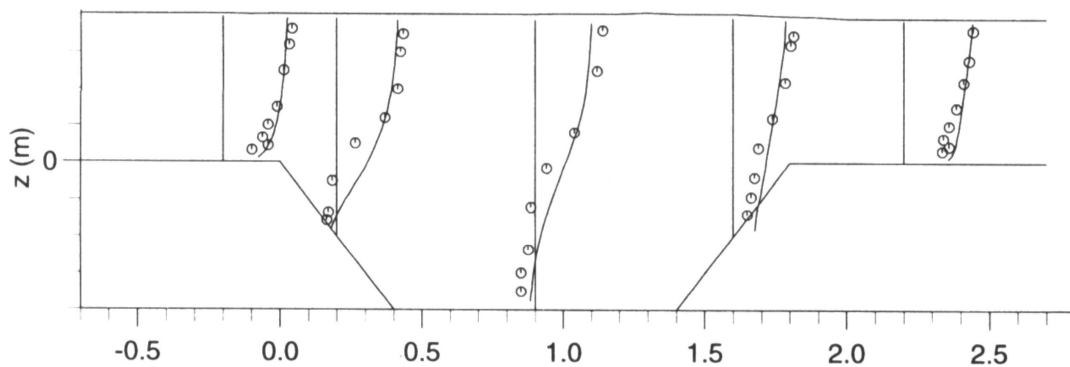


Figura 10 – Perfis de velocidade na direção  $x$  obtidos por Stansby e Zhou [28] e comparados com resultados experimentais apresentados por Rijn [26].

Alfrink e Rijn [1] simularam o problema usando uma aproximação por Diferenças Finitas e uma discretização no tempo fracionada, similar ao proposto por Chorin [5]. As localizações do ponto de separação e recolamento obtidas por estes autores foram de  $x=0,10\text{m}$  e  $0,95\text{m}$ , respectivamente. Os valores obtidos pelo presente trabalho foram  $x=0,17\text{m}$  e  $0,99\text{m}$ , respectivamente. Observou-se de acordo com os resultados obtidos e comparados a outros autores, que o ponto de separação apresentou valores mais afastados, enquanto que o ponto de recolamento se encontra em uma posição mais próxima.

Observam-se algumas diferenças encontradas por Stansby e Zhou [28] em relação aos resultados experimentais.

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se um programa computacional de simulação numérica de escoamentos incompressíveis 3D, adaptado para tratar problemas com superfície livre. O algoritmo emprega um método semi-implícito de Taylor-Galerkin de dois passos [29]. Foi implementado um modelo de turbulência adequado a domínios com superfície livre [14,18,19]. Adotando uma descrição ALE, foi inserida no algoritmo a condição de contorno cinemática da superfície livre. No interior do domínio, os nós obedeceram a uma lei de movimento baseado na suavização de velocidades para manter os elementos pouco distorcidos. Para validar o modelo, foi analisado o escoamento em um canal com depressão trapezoidal (trench). Os resultados obtidos foram muito bons comparados com os experimentais e os apresentados por outros autores. O modelo de turbulência implementado mostrou-se preciso, identificando corretamente o vórtice existente, mesmo utilizando uma malha relativamente grosseira. O movimento da superfície livre bem como dos nós do interior do domínio também apresentaram bons resultados. Com as adaptações implementadas construiu-se um algoritmo básico robusto para a análise de escoamentos incompressíveis tridimensionais, capaz de considerar diretamente os efeitos do movimento vertical em domínios reais.

## 6. REFERÊNCIAS

1. ALFRINK, B.J.; VAN RIJN, L.C. *Two-equation turbulence model for flow in trench*. J.Hydraul. Eng. ASCE, v.109, p.941-958, 1983.
2. ARGYRIS, J. *et al. Finite element solution of viscous flow problems, Finite Elements in Fluids*. Wiley, New York, v.6, p. 89-114, 1985.
3. BASARA, B.; YOUNIS, B.A. *Predictions of turbulent flows in dredged trenches*. J. Hydraul. Res., v.33, p. 813-824, 1995.
4. BLUMBERG, A.F.; MELLOR, G.L. *A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model*. In: Heaps, Ns (ed.). Washington, American Geophysical Union, p. 1-16, 1987.
5. CHORIN, A. J. *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*. J.Comp. Physics, v.2, p.12-26, 1967.
6. DELFT HYDRAULICS. *Delft3D user interface capabilities and application*. Delft Hydraulics, Delft, 2001.
7. DONEA, J.; GIULIANI, S.; LAVAL, H.; QUATERPELLE, L. *Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equation by a fractional step method*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., v.33, p. 53-73, 1982.

8. GRESHO, P.M.; CHAN, S. T.; LEE, R. L.; UPSON, G. D. *A modified finite element method for solving the time dependent incompressible Navier-Stokes equations. Part I: Theory*, Int. J. Num. Meth. Fluids, v.4, p. 557-598, 1984.
9. HARLOW, F.H.; WELCH, J.E. *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface*. Int. Phys Fluids, v.8, p.2182–2189, 1965.
10. HARLOW, F.H.; WELCH, J.E. *Numerical study of large-amplitude free surface motions*. Int. Phys Fluids, v.9, p. 842–851, 1966.
11. HIRT, C.W.; AMSDEN, A.A.; COOK, J.L. *An arbitrary Lagrangian–Eulerian computing method for all flow speeds*. J. Comput Phys, v.14, p.227–253, 1974.
12. HIRT, C.W.; NICHOLS, B.D. *Volume of fluid method for the dynamics of free surface boundaries*. Comput Phys, v.39, p.210–225, 1981.
13. HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K.; ZIMMERMAN, T.K. *Lagrangian Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flow*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. v.29, p. 329, 1981.
14. JOHNS, B. *The modeling of the free surface flow of water over topography*. Coastal Eng. v.15, p. 257-278, 1991.
15. KIM, J.; MOIN, P., *Application of a fractional-step method for incompressible Navier-Stokes equations*. J. Comp. Phys, v.59, p. 208-323, 1985.
16. KOUTITAS, C.; O’CONNOR, B. *Turbulence model for flow over dredged trenches*. Journal of the hydraulics division, ASCE, v.107, No. HY8, Proc. paper 16449, p. 989-1002. 1981.
17. KOVACS, A.; KAWAHARA, M. *A finite element scheme based in the velocity correction method for the solution of the time dependent incompressible Navier-Stokes equations*. Int. J. Num. Meth. Fluids, v.13, p. 403-423, 1991.
18. MITTAL, S.; TEZDUYAR, T.E. *A finite element study of incompressible flows past oscillating cylinders and airfoils*. Int. J. Num. Meth. Fluids, v.15, p. 1073–1118, 1992.
19. MITTAL, S.; TEZDUYAR, T.E. *Parallel finite element simulation of 3D incompressible flows—fluid–structure interaction*. Int. J. Num. Meth. Fluids, v.21, p. 933–953, 1995.
20. NAVTI, S.E.; RAVINDRAN, K.; TAYLOR, C.; LEWIS, R.W. *Finite element modelling of surface tension effects using a Lagrangian–Eulerian kinematic description*. Comput Methods Appl. Mech. Eng., v.147, p. 41–60, 1997.
21. ODEN, J.T.; WELFORD, L.C. *Analysis of flow of viscous fluid by the finite element method*. AIAA J., v.10, p. 1590-1599, 1972.
22. ONÁTE, E.; GARCIA, J. *Finite element analysis of incompressible flows with free surface waves using a finite calculus formulation*. In: ECCOMAS computational fluid dynamic conference, Swansea, Wales, UK, 4–7, 2001.
23. RADOVITZKY, R.; ORTIZ, M. *Lagrangian finite element analysis of Newtonian fluid flows*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.43, p. 607–619, 1998.
24. RAMASWAMY, R.; KAWAHARA, M. *Arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow*. Int. J. Num. Meth. Fluids, v.7, p. 1053-1075, 1987.
25. REN, G.; UTNES, T. *A finite element solution of the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using a modified velocity correction method*. Int. J. Num. Meth. Fluids, v.17, p. 349-364, 1993.
26. RIJN, L.C.V. *The Computation of the flow and turbulence field in dredged trenches*. Report S 488-I, delft hydraulics laboratory, delft, The Netherlands, 1982.
27. SOULAIMANI, A.; SAAD, Y. *An arbitrary Lagrangian–Eulerian finite element method for solving three-dimensional free surface flows*. Comput Meth. Appl. Mech. Eng., v.147, p. 79–

106, 1998.

28. STANSBY, P.K.; ZHOU, J.G. *Shallow-Water flow solver with non-hydrostatic pressure:2D vertical plane problems*. Int. J. Num. Meth. Fluids, v.28, p. 541-563, 1998.
29. TEIXEIRA, P.R.F. *Simulação numérica da interação de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o método de elementos finitos*. Porto Alegre, 2001. Tese de doutorado, PPGEC-UFRGS.
30. TEIXEIRA, P.R.F.; AWRUCH, A.M. *Numerical simulation of three-dimensional incompressible flows using the finite element method*. ENCIT, Porto Alegre, 2000.
31. TEZDUYAR, T.E.; BEHR, M.; LIU, J. *A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure:I.The concept and the preliminary numerical tests*. Comput Meth. Appl. Mech. Eng. v.94, p. 339–351, 1992.
32. WALL, W.A.; RAMM, E. *A coupled fluid structure environment with a three-dimensional shell model*. Proc. ECCOMAS 2000. Barcelona, Spain, 2000.
33. WOLFGANG, A.; WALL, S.G.; EKKEHARD R. *A strong coupling partitioned approach for fluid–structure interaction with free surfaces*. Institute of Structural Mechanics, University of Stuttgart, Germany, 2005.
34. ZIENKIEWICZ, O.C.; CODINA, R. *A general algorithm for compressible and incompressible flow – Part I. The split, characteristic-based scheme*. Int. J. Num. Meth. Fluids, v.20, p. 869-885, 1995.