CÁLCULO DE MINIMIZAÇÃO DOS CUSTOS DE PRODUÇÃO POR MEIO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

André Andrade Longaray
Ilse Maria Beuren

Resumo:

Este trabalho tem por objetivo apresentar a programação linear como uma das ferramentas constituintes da pesquisa operacional, utilizada para minimizar os custos de produção. Para tanto, em um primeiro momento, são apresentadas as fases de resolução de um problema em pesquisa operacional. Logo a seguir, estabelece-se a formulação do problema geral da programação linear. Na seqüência, desenvolve-se um problema de minimização de custos de produção, aplicando-se a programação linear. Finalizando o trabalho, são abordadas algumas proposições em torno do assunto.

Palavras-chave:

Área temática: *Os Custos e a Tomada de Decisões*

CÁLCULO DE MINIMIZAÇÃO DOS CUSTOS DE PRODUÇÃO POR MEIO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

André Andrade Longaray, M.Adm. & Ilse Maria Beuren, Dra. em Controladoria
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC - Campus Trindade – cep 88.040-300 – Florianópolis – SC - longaray@bol.com.br - doutorando em Engenharia de Produção e Sistemas

Custos para tomada de decisões

CÁLCULO DE MINIMIZAÇÃO DOS CUSTOS DE PRODUÇÃO POR MEIO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Custos para tomada de decisões

Resumo: este trabalho tem por objetivo apresentar a programação linear como uma das ferramentas constituintes da pesquisa operacional, utilizada para minimizar os custos de produção. Para tanto, em um primeiro momento, são apresentadas as fases de resolução de um problema em pesquisa operacional. Logo a seguir, estabelece-se a formulação do problema geral da programação linear. Na seqüência, desenvolve-se um problema de minimização de custos de produção, aplicando-se a programação linear. Finalizando o trabalho, são abordadas algumas proposições em torno do assunto.

1 Introdução

O uso de ferramentas da Pesquisa Operacional na promoção da eficiência e eficácia organizacional em todos os níveis da gestão é uma realidade viabilizada pelo microcomputador e pelo avanço do estado da arte. Com o fim da reserva de mercado, no início da década de 1990, e a redução nos custos dos equipamentos de informática, o uso dos sistemas de apoio à decisão foi amplamente difundido nas organizações brasileiras [Goldbarg & Luna, 2000].

A abordagem quantitativa de apoio à decisão, antes relegada a segundo plano pelos executivos, por esta possuir formulações matemáticas e estatísticas com elevado nível de dificuldade e softwares de difícil interface com o usuário, hoje, são amplamente aplicadas. Talvez a mais presente no cotidiano organizacional seja a programação linear.

A programação linear aplica-se a problemas de planejamento como a alocação de recursos entre demandas competitivas ou a combinação eficiente de coisas. As empresas de pecuária querem misturar alimentos a baixos custos para fornecer nutrição suficiente para seus rebanhos. Refinarias de petróleo devem decidir se produzem em uma refinaria mais combustível com determinadas especificações. Gerentes de produção devem decidir se seus lucros podem ser maximizados produzindo mais o produto A e menos o produto B ou vice-versa. Decidir investir em determinado fundo ou outro. Esses são alguns tipos de problemas solucionados pela programação linear.

Sob esta perspectiva, o presente trabalho procura apresentar a programação linear como ferramenta da pesquisa operacional utilizada para minimizar os custos de produção. Inicialmente, são apresentadas as fases que fundamentam a análise de um problema em pesquisa operacional. Em um segundo momento, estabelece-se a formulação do problema geral da programação linear. A seguir, desenvolve-se um problema de minimização de custos de produção, aplicando-se a programação linear. A título de conclusão, são tecidas algumas considerações em torno do assunto.

2 Fases da resolução de um problema em pesquisa operacional

De um modo geral, a análise de um problema e a sua formulação dentro dos padrões da pesquisa operacional, deve desenvolver-se segundo seis fases, quais sejam: a definição do problema, a construção do modelo, a solução do modelo, a validação do modelo, a implementação dos resultados e a avaliação final, conforme descreve Andrade [1998, p.11].

A *definição do problema*, baseia-se na descrição exata dos objetivos do estudo, na identificação das alternativas de decisão existentes e, no reconhecimento das limitações, restrições e exigências do sistema.

Quanto à *construção do modelo*, vários tipos de modelos podem ser elaborados. Entretanto, em programação linear, um modelo padrão é estabelecido, de natureza matemática.

A *solução do modelo*, é obtida pelo algoritmo mais adequado, em termos de rapidez de processamento e precisão de resposta.

A *validação do modelo* se dá através da capacidade do modelo em fornecer uma previsão aceitável do comportamento do sistema e uma resposta que possa contribuir para a qualidade da decisão a ser tomada.

No que concerne à *implementação dos resultados*, uma vez avaliadas as vantagens e a validade da solução obtida, esta deve ser convertida em regras operacionais.

Na *avaliação final*, é necessário levar-se em conta que o modelo estabelecido é apenas uma representação simplificada da realidade. Desse modo, a experiência dos decisores será de fundamental relevância.

É importante ressaltar que, os passos apresentados não possuem uma seqüência rígida, entretanto, configuram-se em etapas a serem vencidas no decorrer do processo.

3 Programação linear

A programação linear é uma das técnicas mais conhecidas e usadas na solução de problemas de otimização [Wagner: 1986]. O desenvolvimento da programação linear certamente figura entre os avanços científicos mais importantes da segunda metade do século XX, chegando a render um prêmio Nobel na área de Economia no ano de 1975 devido às aplicações da programação linear a um problema econômico de alocação de recursos. Atualmente, reconhece-se a programação linear como uma ferramenta matemática que permite a economia de alguns milhares de reais a empresas de porte variado, com seu uso expandindo-se progressivamente a outros setores da sociedade [Barbosa: 1997].

Aplicações típicas da programação linear são encontradas em problemas de planejamento de atividades na agricultura, na indústria petrolífera, nos transportes, no setor financeiro, no setor hidroelétrico e na área de telecomunicações, entre outras [Barbosa: 1997].

A forma mais comum de aplicações consiste em alocar recursos limitados a atividades competitivas, de maneira ótima. Desse modo, a programação linear é empregada quando se deseja selecionar uma particular combinação de atividades que competem por recursos escassos, os quais são necessários para a execução daquelas atividades [Barbosa: 1997].

A programação linear foi evidenciada em termos matemáticos por G. B. Dantzig em 1947, para resolver problemas de logística da Força Aérea Americana. Decorreu-se um período de rápido desenvolvimento e aplicações a problemas de gerenciamento da produção, os quais, eram resolvidos por experiência e intuição. O uso da programação linear permitiu alcançar um considerável aumento da eficiência dos processos de produção. Até então os incrementos de eficiência eram obtidos predominantemente através de inovações tecnológicas, sujeitas aos seus riscos intrínsecos e custos. Assim, essa nova forma de ganhar eficiência, sob as condições tecnológicas existentes, através de melhoramentos na organização e no planejamento das atividades, deu credibilidade à programação linear como ferramenta de grande relevância para a solução de problemas do mundo real [Barbosa: 1997].

Para Goldbarg e Luna [2000], os modelos de programação linear são um tipo especial de modelos de otimização da programação matemática. Nesse sentido, para que um determinado sistema possa ser representado por meio de um modelo de programação linear, ele deve assumir as seguintes características:

> *Proporcionalidade*: a quantidade de recurso consumido por uma dada atividade deve ser proporcional ao nível dessa atividade na solução final do problema. Além disso, o custo de cada atividade é proporcional ao nível de operação da atividade.
>
> *Não negatividade*: deve ser sempre possível desenvolver dada atividade em qualquer nível não negativo e qualquer proporção de um dado recurso deve sempre poder ser utilizado.
>
> *Aditividade*: o custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade.
>
> *Separabilidade*: pode-se identificar de forma separada o custo (ou consumo de recursos) específico das operações de cada atividade.

No intuito de avançar um pouco mais no uso da programação linear, é importante definir e desenvolver alguns conceitos matemáticos, começando pelo conceito de linearidade. Programação linear é um modelo matemático de otimização no qual todas as funções são lineares. Isso determina que cada variável que aparece na formulação do problema está na forma

$$k.x$$

onde:

k representa uma constante e;
x determinada variável.

O segundo conceito importante da programação linear é o de somatório. Sua notação é representada pela letra sigma (Σ). Considere a expressão a seguir:

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + a_4.x_4$$

Ao invés disto, pode-se representar esta expressão na forma do somatório, a qual é apresentada a seguir:

$$\sum_{j=1}^{4} a_j.x_i$$

Dessa forma, pode-se formular um problema de maximização como segue:

$$\text{Otimizar} \sum_{j=1}^{n} c_j.x_i$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1,j}.x_j = b_1$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{2,j}.x_j \leq b_2$$

....

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}.x_j \leq b_j$$

....

$$\sum_{j=1}^{m} a_{n,j}.x_j \leq b_m$$

....

onde:

m = índices das variáveis de decisão
n = número de restrições
a $\equiv$ j-ésima coluna da matriz de restrições A = {ij}
b = limite máximos e mínimos das restrições (right-hand-sides)

Para um problema de minimização, a função objetivo seria a seguinte:

$$\text{Minimizar} \sum_{j=1}^{n} c_j.x_i$$

Sujeito às restrições representadas por um conjunto de expressões maior ou igual, seguindo a forma representada a seguir:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}.x_j \geq b_j$$

onde:
$i = 1... n$ e,
$j = 1... m$

Pidd [1998] argumenta que, não existe, entretanto, razão que proíba que problemas de maximização ou de minimização contenham expressões menor ou igual, maior ou igual, ou até mesmo igualdades.

4 O problema da minimização dos custos de produção

Uma área em que a PL tem sido bastante utilizada é a de produção, onde se procura minimizar os custos, bem como maximizar receita e lucros. Existem diversas atividades que podem ser levadas em conta nesse sentido, entretanto, a fim de melhor objetivar o presente trabalho, será descrito o exemplo formulado por Prado [1998, p. 54], que trata de uma situação problemática de certa indústria da área de alimentação, que produz, entre outros gêneros, determinado produto alimentício ß, cuja composição pode ser visualizada na Figura-1:

Figura-1: composição produto ß

componentes	sigla	mínimo (%)	máximo (%)
gordura	Gord	10	16
sólidos de leite não-gordurosos	SLNG	10,5	13
total de sólidos de leite	TSL	20,5	25
açúcar		11	17
total de sólidos	TS	37,5	41,5
água		58,5	62,5
estabilizador		0,37	0,37
emulsificador		0,10	0,10

Fonte: Prado,1998.

Para a elaboração do produto ß, tem-se disponíveis as seguintes matérias-primas (Figura-2):

Figura-2: matérias-primas disponibilizadas para fabricação do produto ß

Nome		% Gord	% SLNG	% TSL	% Açúcar	% TS	% Água	custo
X1	creme 40%	40	5,4	45,4		45,4	54,6	27
X2	creme 38%	38	5,6	43,6		43,6	56,4	26
X3	leite 3,2%	3,2	8,7	11,9		11,9	88,1	3
X4	leite 4,0%	4,0	8,6	12,6		12,6	87,4	3
X5	leite c. gordo	8	20	28		28	72	7
X6	leite c. magro		28	28		28	72	3
X7	manteiga	5	92	97		97	3	15
X8	sólidos secos		95	95		95	5	10
X9	sacarose				100	100		10
X10	garapa				67	67	33	9
X11	estabilizador					80	20	55
X12	emulsificador							78
X13	água						100	0

Fonte: Prado, 1998.

O que se pretende é determinar o custo mínimo para a produção diária de produto ß, que é de 100 kg.

Formulando-se matematicamente o modelo de programação linear para o problema em questão tem-se:

Minimizar Custo $\Sigma\, 27x1 + 26x2 + 3x3 + 3x4 + 7x5 + 3x6 + 15x7 + 10x8 + 10x9 + 9x10 + 55x11 + 78x12$

Sujeito às seguintes restrições:

quantidade a ser produzida:
$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 = 100$

mínimo de gordura:
$0.4x1 + 0.38x2 + 0.032x3 + 0.04x4 + 0.08x8 + 0.05x10 > 10$

máximo de gordura:
$0.4x1 + 0.38x2 + 0.032x3 + 0.04x4 + 0.08x8 + 0.05x10 < 16$

mínimo de sólidos de leite não-gordurosos:
$0.054x1 + 0.056x2 + 0.087x3 + 0.086x4 + 0.2x5 + 0.28x6 + 0.92x7 + 0.95x8 > 10.5$

máximo de sólidos de leite não-gordurosos:
$0.054x1 + 0.056x2 + 0.087x3 + 0.086x4 + 0.2x5 + 0.28x6 + 0.92x7 + 0.95x8 < 13$

mínimo total de sólidos do leite:
$0.454x1 + 0.436x2 + 0.119x3 + 0.126x4 + 0.28x5 + 0.28x6 + 0.97x7 + 0.95x8 > 20.5$

máximo total de sólidos do leite:
$0.454x1 + 0.436x2 + 0.119x3 + 0.126x4 + 0.28x5 + 0.28x6 + 0.97x7 + 0.95x8 > 25$

mínimo de açúcar:
$x9 + 0.67\, x10 > 11$

máximo de açúcar:
$x9 + 0.67\, x10 < 17$

mínimo total de sólidos:
$0.454x1 + 0.436x2 + 0.119x3 + 0.126x4 + 0.28x5 + 0.28x6 + 0.97x7 + 0.95x8 + x9 + 0.67x10 + 0.8x8 > 20.5$

máximo total de sólidos:
$0.454x1 + 0.436x2 + 0.119x3 + 0.126x4 + 0.28x5 + 0.28x6 + 0.97x7 + 0.95x8 + x9 + 0.67x10 + 0.8x11 > 25$

mínimo de água:
$0.546x1 + 0.564x2 + 0.88x3 + 0.874x4 + 0.72x5 + 0.72x6 + 0.03x7 + 0.05x8 + 0.33x10 + 0.2x11 + x13 > 58.5$

máximo de água:
$0.546x1 + 0.564x2 + 0.88x3 + 0.874x4 + 0.72x5 + 0.72x6 + 0.03x7 + 0.05x8 + 0.33x10 + 0.2x11 + x13 < 62.5$

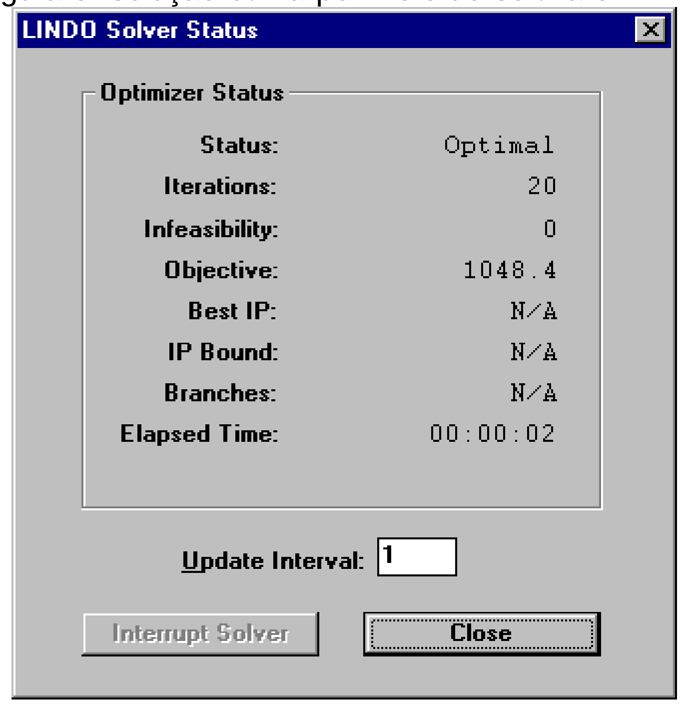
percentual de estabilizador:
$x11 = 0.37$

percentual de emulsificador:
$x12 = 0.1$

Estabelecido o modelo matemático do problema, o passo seguinte é a resolução do mesmo. Atualmente, diversos softwares apóiam o decisor nesta tarefa. Neste trabalho, optou-se pela utilização do software LINDO®, da LINDO SISTEMS.

Realizando as iterações obteve-se como solução ótima, o valor objetivo de R$ 1048,40, conforme Figura 3 :

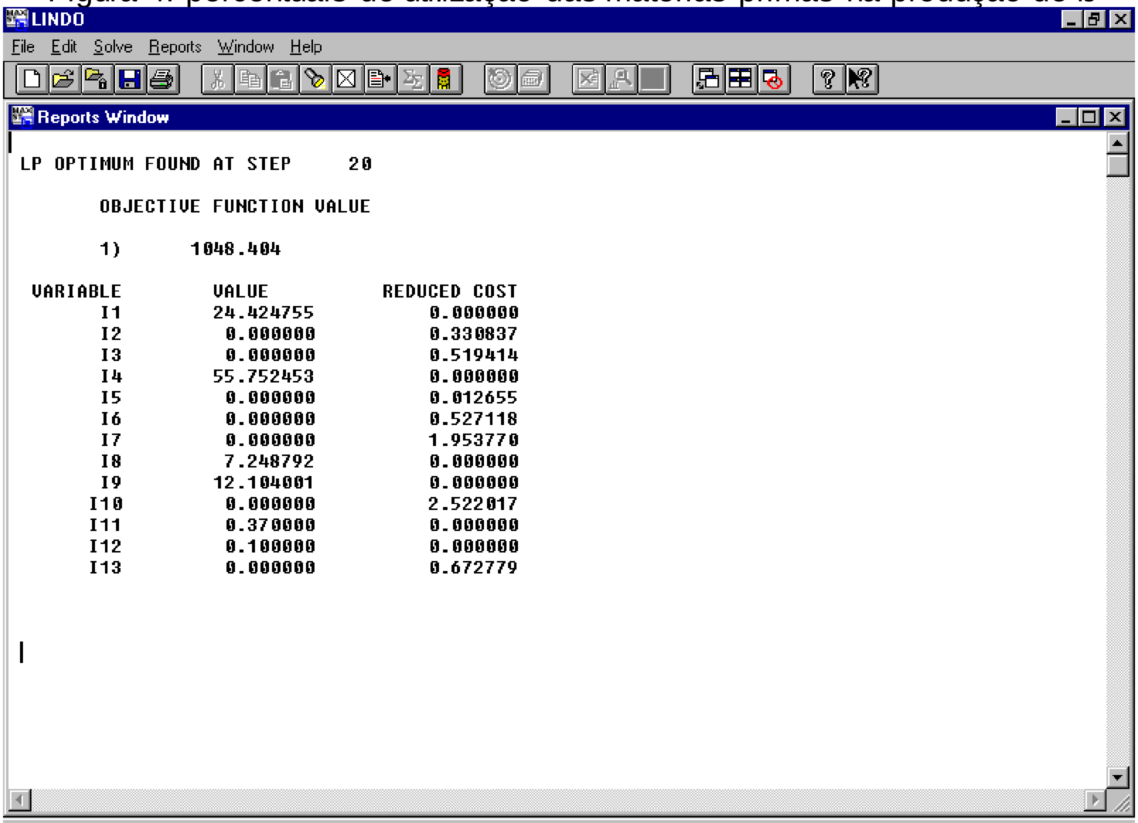
Figura-3: solução ótima por meio do software LINDO



Isso significa, que o custo mínimo, para que sejam atendidas todas as exigências de fabricação do produto ß, na quantidade especificada, é de R$ 1.048,40.

Em uma tela posterior, o LINDO apresenta as matérias-primas e seus percentuais na composição do produto ß, conforme Figura-4:

Figura-4: percentuais de utilização das matérias-primas na produção de ß



LP OPTIMUM FOUND AT STEP 20

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1048.404

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
I1	24.424755	0.000000
I2	0.000000	0.330837
I3	0.000000	0.519414
I4	55.752453	0.000000
I5	0.000000	0.012655
I6	0.000000	0.527118
I7	0.000000	1.953770
I8	7.248792	0.000000
I9	12.104001	0.000000
I10	0.000000	2.522017
I11	0.370000	0.000000
I12	0.100000	0.000000
I13	0.000000	0.672779

Dessa forma, x1 (creme 40%) estará presente na formulação do produto ß, no percentual de 24,42%; x4 (leite 4,0%) com 55,76%; x8 (sólidos secos) com 7,25%; x9 (sacarose) com 12,10%; x11 (estabilizador) com 0,37% e; x12 (emulsificador) com 0,10%, perfazendo assim, o percentual total do produto ß (100%).

5 Considerações finais

O presente trabalho teve por objetivo apresentar a programação linear como ferramenta da pesquisa operacional utilizada para minimizar os custos de produção.

Inicialmente contextualizou a importância da modelagem matemática como forma de estruturar e solucionar modelos quantitativos que possam ser resolvidos matematicamente. Mostrou como a pesquisa operacional, e mais especificamente, a programação linear está inserida neste cenário.

Em um segundo momento, a programação linear foi discutida. O problema padrão de programação linear foi representado algebricamente. Verificou-se algumas peculiaridades a respeito dos problemas de programação linear, bem como suas hipóteses de proporcionalidade, aditividade, divisibilidade e não negatividade, e linearidade.

Na seqüência, foi apresentada a formulação e resolução de um problema típico de minimização de custos de produção por meio da programação linear. Buscou-se promover a interação entre a representação matemática e os problemas usuais resolvidos pela programação linear, através do cálculo de minimização dos custos de produção, usando-se para isso o software LINDO®.

Espera-se que este trabalho tenha, de alguma forma, contribuído para um melhor entendimento sobre as perspectivas de utilização dos recursos da pesquisa operacional, mais especificamente a programação linear, nos problemas relacionados à minimização dos custos de produção.

Referências bibliográficas

ANDRADE, Eduardo Leopoldino. **Introdução à pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

BARBOSA, Paulo S.F. Modelos de programação linear em recursos hídricos, in**: Técnicas quantitativas para o gerenciamento recursos hídricos**. Organizado por Rubem La Laina Porto. Porto Alegre: ABRH, 1997.

GOLDBARG, Marco César, LUNA, Henrique Pacca. **Otimização combinatória e programação linear**: modelos e algoritmos. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

PIDD, Michael. **Modelagem empresarial**. Porto Alegre: Bookman, 1998.

PRADO, Darci. **Programação Linear**. Belo Horizonte: EDG, 1998.