SELDOMAR JESKE EHLERT

A MATEMÁTICA NO PÔQUER:
Explorando problemas de probabilidade

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Abril, 2014

SELDOMAR JESKE EHLERT

A MATEMÁTICA NO PÔQUER:
Explorando problemas de probabilidade

Dissertação submetida por SELDOMAR JESKE EHLERT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dr. LEANDRO SEBBEN BELLICANTA

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Abril, 2014

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande

http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física

http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática

http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

http://www.capes.gov.br

E332m Ehlert, Seldomar Jeske
A matemática no pôquer: explorando problemas de probabilidade / Seldomar Jeske Ehlert. – 2014.
71 f.

Inclui anexos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Dr. Leandro Sebben Bellicanta.

1. Matemática. 2. Problemas de probabilidade. 3. Pôquer. 4. Ensino da matemática. I. Bellicanta, Leandro Sebben. II. Título.

CDU 51

Catalogação na fonte: Bibliotecário Clériston Ribeiro Ramos CRB10/1889

SELDOMAR JESKE EHLERT

A MATEMÁTICA NO PÔQUER:
Explorando problemas de probabilidade

Dissertação submetida por SELDOMAR JESKE EHLERT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 05 de Abril de 2014:

Dr. LEANDRO SEBBEN BELLICANTA
(Orientador - FURG)

Dr. PAUL GERHARD KINAS
(Avaliador - FURG)

Dra. CARMEN VIEIRA MATHIAS
(Avaliadora - UFSM)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Abril, 2014

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Wilmar (in memoriam) e Seldira.
A eles devo todo meu carinho, respeito e gratidão,
pois sempre me apoiaram e incentivaram a estudar.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Dr. Leandro Sebben Bellicanta, pelo apoio, dedicação e sugestões para elaboração desse trabalho.

A todos os meus colegas do PROFMAT, turma 2012. Em especial, agradeço a Mauro Bartz, Julio Mohnsam, Ivan Einhardt e Eliezer Vellar, pela amizade, companheirismo e muito bom humor, tornando essa caminha bem mais tranquila.

Aos meus colegas e ex-colegas de trabalho, pelo incentivo e valiosas trocas de experiências.

À SBM, juntamente com a FURG, pela excelente oportunidade de qualificação proporcionada a mim e a todos profissionais de matemática.

À CAPES pelo apoio financeiro e o investimento na qualificação do ensino da matemática no Brasil.

E, obviamente, agradeço à minha família, pelo amor, incentivo e suporte necessário para me dedicar aos estudos. Muito obrigado, em especial, à minha querida esposa Vivian Andersen, pela compreensão dos períodos ausentes e pelo carinho de sempre.

"Não fiz o melhor, mas fiz tudo para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas não sou o que era antes."

(Martin Luther King Jr.)

Resumo

O presente trabalho propõe a utilização do jogo de pôquer como motivação para o estudo de probabilidade na disciplina de Matemática do Ensino Médio. Juntamente com as regras básicas do jogo de pôquer, na modalidade Texas Hold'em, é apresentada uma sequência de atividades didáticas envolvendo situações específicas de jogo que procuram desenvolver no estudante as técnicas de análise combinatória e a habilidade no cálculo de probabilidades de eventos equiprováveis. No anexo encontram-se problemas resolvidos para aplicação em sala de aula.

Palavras-chaves: Problemas de probabilidade; Pôquer; Ensino da matemática.

Abstract

This work proposes the use of the poker game as motivation for the study of probability in high school math classes. Along with the basic rules of the Texas Hold'em poker game, a sequence of learning activities involving specific game situations that seek to develop in students the techniques of combinatorics and skills in calculating probabilities of equally likely events is presented. Solved problems for use in the classroom can be found at appendix.

Keywords: Probability problems; Poker; the Teaching of Maths.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

As origens históricas do estudo das probabilidades estão vinculadas aos jogos de azar. As bases matemáticas iniciais da teoria de probabilidades foram formuladas no século XVII pelos matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665). Porém o matemático que mais contribuiu para o desenvolvimento dessa teoria foi Marquês Pierre Simon de Laplace (1749-1827) (MORGADO et al., 2006).

A motivação inicial para o desenvolvimento dessa teoria continua presente nas atividades educacionais atuais. Os problemas de probabilidades envolvendo extração aleatória de cartas de um baralho constituem tema recorrente nas aulas de matemática e livros didáticos. Porém, acreditamos que a introdução de situações-problema associadas ao jogo de pôquer proporcionem aplicações concretas que enriquecem a aprendizagem e conduzem a um conhecimento mais significativo, além de servir como estímulo para motivar os estudantes para o estudo da matemática.

> Um dos principais objetivos do ensino da matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhes situações-problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las. Essa é uma das razões pela qual a resolução de problemas tem sido reconhecida no mundo todo como uma das metas fundamentais para o ensino da matemática. (DANTE, 2002)

A escola tem, entre suas metas fundamentais, o objetivo de formar os alunos para atuarem na sociedade e no mundo em que vivem. Dentro do ensino da matemática, as probabilidades merecem destaque, já que essa teoria é aplicada nos mais diversos ramos do conhecimento. Valores de seguros, planos de saúde, estudo dos riscos de investimentos, confiabilidade dos produtos, previsões meteorológicas, incidência de doenças infecciosas, construção de loterias e mercado financeiro são apenas alguns exemplos que utilizam a teoria de probabilidades. Todas essas situações baseiam-se em cenários de incertezas. Diante de um conjunto de informações incompletas, os cálculos de probabilidades apresentam parâmetros que auxiliam em projeções, na construção de previsões e na tomada de decisões.

Dessa forma, o desenvolvimento da teoria de probabilidade no ensino médio é uma ótima oportunidade para mostrar a aplicabilidade da matemática e a sua utilização para resolver problemas do dia a dia. Também é possível desenvolver o espírito crítico através da interpretação dos resultados e aprimorar a tomada de decisão. O pôquer e as atividades descritas nesse trabalho permeiam essas características.

No pôquer, o jogador deve avaliar os riscos e, a partir de dados parciais, deve definir se o momento é adequado para apostar ou desistir. Dessa forma, esse jogo representa um modelo eficiente para reproduzir situações do cotidiano. Assim, essa proposta também tem o objetivo de desenvolver a habilidade de saber avaliar as opções e tomar decisões sem conhecer todas as variáveis.

Segundo Torezzan (2013), responsável pela disciplina *Fundamentos do Pôquer*, ministrada na Universidade Estadual de Campinas:

> O jogo, na verdade, funciona como um laboratório para refinar habilidades que podem ser usadas na vida, como análise de risco, leitura de pessoas e construção de estratégias. Estudamos o pôquer para entender como as pessoas se comportam em cenários de estresse que exigem a tomada de decisões mesmo que as informações disponíveis para respaldá-las sejam incompletas.

Diante desse contexto, aparece o jogo de pôquer como alternativa pedagógica para o ensino de probabilidade. No artigo da Revista do Professor de Matemática (RPM), Rodrigues (1985) afirma que:

> O jogo de pôquer é uma fonte bastante rica em exemplos e problemas interessantes, que podem ser utilizados para ilustrar as aulas de análise combinatória e probabilidade no ensino médio.

Em virtude da disseminação do uso da internet, o número de praticantes de pôquer cresceu muito nesses últimos anos. Em poucos minutos de pesquisa na rede, as pessoas aprendem as regras básicas do jogo e exploram alguns dos milhares de sites que oferecem disputas entre jogadores de todas as partes do mundo, seja com dinheiro real ou fictício. A maioria dos praticantes de pôquer jogam por lazer e entretenimento, porém já existem pessoas que jogam profissionalmente.

Em 2010, a Federação Internacional de Pôquer (IFP) foi aceita como membro da Federação Internacional dos Esportes da Mente (IMSA)(UOL, 2010). Assim, o pôquer da modalidade Texas Hold'em, passou a ser reconhecido oficialmente como um esporte de habilidade e raciocínio, ao lado de um outro jogo de cartas chamado de bridge e de conhecidos jogos de tabuleiro, como xadrez, damas e go. No Brasil, a Confederação Brasileira de Poquêr Texas Hold'em (HOLD'EM, 2014) também está cadastrada entre as entidades reconhecidas pelo Ministério do Esporte (ESPORTE, 2014).

De acordo com a Confederação Brasileira de Xadrez (CBX, 2003), desde um projeto iniciado em 1999, a prática do xadrez escolar vem se expandindo-se. Atualmente, é possível observarmos o jogo de xadrez sendo praticado durante as aulas de educação física ou mesmo em clubes de xadrez dentro de muitas escolas brasileiras. Apesar do pôquer estar no mesmo patamar do xadrez dentro da Associação Internacional de Esportes da Mente (IMSA), esse jogo de cartas ainda não conquistou o mesmo status.

O pôquer representa, no sentido pedagógico, um campo muito mais farto e completo que o xadrez, explorando e beneficiando um conjunto mais amplo de habilidade dos seus praticantes. Entre as técnicas utilizadas pelos carteadores mais experientes, há habilidades que estão diretamente associadas a conhecimentos matemáticos, como probabilidade, estatística e lógica.

Muitas pessoas associam o pôquer aos cassinos, aos jogos de azar [1] ou ao submundo do crime. Porém não é esta a realidade da maioria das mesas de pôquer dos clubes, ligas e federações que se espalharam pelo Brasil. O pôquer é um jogo de alta complexidade e exige de seus praticantes uma série de habilidades intelectuais e comportamentais, por isso que deixou de ser considerado jogo de azar e passou a ser considerado esporte (ALON, 2010) [2]. O interesse por esse esporte é tão grande, que há vários programas de televisão que transmitem jogos ao vivo, além do enorme mercado de livros e revistas especializadas no assunto.

Apesar do preconceito por parte de algumas pessoas, a expansão do pôquer já chegou às grandes universidades. Na publicação da revista Isto É, Loes (2013) apresenta a experiência da primeira disciplina universitária no Brasil que explora exclusivamente o pôquer. Essa cadeira é oferecida pela Unicamp sob responsabilidade do pós-doutor em matemática aplicada, professor Cristiano Torezzan. Ainda segundo a reportagem:

> Embora Torezzan seja o primeiro a propor um curso sobre o assunto em uma faculdade brasileira, renomadas instituições de ensino superior no Exterior, como a Universidade Harvard e o Massachusetts Institute of Technology (MIT), ambas nos Estados Unidos, já oferecem, há alguns anos, o pôquer como disciplina a seus alunos. Complexo a ponto de ser considerado um esporte da mente, como xadrez e bridge, ele atrai interessados por probabilidade e estatística, teoria de jogos e até psicologia. (LOES, 2013)

Atualmente os educadores, e em especial os profissionais do ensino da matemática, tem uma tarefa peculiar: precisam estimular e atrair a atenção dos alunos para a construção dos conhecimentos de forma que eles tenham prazer em aprender e tenham curiosidade para buscar novos desafios. Nesse sentido, a inclusão de jogos representa um

[1] JOGOS DE AZAR: são jogos nos quais a possibilidade de ganhar ou perder não dependem da habilidade do jogador, mas sim exclusivamente da sorte ou do azar do apostador.

[2] Molina (2006) apresenta uma justificativa em língua portuguesa de que o pôquer, na modalidade Texas Hold'em, não pode ser considerado um jogo de azar, já que a habilidade do jogador é o fator decisivo para definir o vencedor

instrumento pedagógico importante para despertar o interesse dos alunos para o estudo da matemática. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática (PCN), do Ministério de Educação (MEC), consideram que:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. (BRASIL, 1998)

Os materiais lúdicos são grandes aliados do desenvolvimento cognitivo, principalmente para as crianças e os adolescentes. Para potencializar os benefícios do uso desse tipo de recurso em sala de aula, é fundamental que o professor tenha clara consciência dos objetivos que pretende atingir com a atividade proposta. Não estamos defendendo a utilização dos jogos em todas aulas de matemática e também não estamos afirmando que a utilização desse tipo de material é a solução para todas as dificuldades do ensino da matemática. Cabe ao professor avaliar a utilidade pedagógica de um determinado material lúdico. Nesse ponto, Grando (2000) afirma que:

> O objetivo do jogo é definido pelo educador através de sua proposta de desencadeamento da atividade de jogo, que pode ser o de construir um novo conceito ou aplicar um já desenvolvido. Assim sendo, um mesmo jogo pode ser utilizado, num determinado contexto, como construtor de conceitos e, num outro contexto, como aplicador ou fixador de conceitos. Cabe ao professor determinar o objetivo de sua ação, pela escolha e determinação do momento apropriado para o jogo. Neste sentido, o jogo transposto para o ensino passa a ser definido como jogo pedagógico.

Diante dessa realidade, acreditamos que a introdução de situações-problema aplicados ao jogo de pôquer representa uma excelente alternativa para o estudo das probabilidades. Dessa forma estamos promovendo um ensino de acordo com as orientações atuais da educação matemática e, principalmente, buscamos despertar a atenção, o interesse e a motivação dos alunos para o cálculo de probabilidades e para o estudo da matemática.

As atividades desse trabalho foram elaboradas com o intuito de amadurecer e aprofundar os conhecimentos de probabilidade, porém naturalmente surge a necessidade da utilização e aprimoramento das técnicas de contagem. Assim, também tivemos a intenção de explorar os objetivos próprios desses conteúdos dentro da matemática que, segundo as orientações educacionais complementares aos PCNs, são baseadas em:

> - Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem;

> • Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados;
>
> • Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico;
>
> • Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas, modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades. (BRASIL, 2002)

Nesse contexto, desenvolvemos uma série de problemas que foram divididos em 6 grupos de atividades. Cada grupo apresenta situações-problema envolvendo um determinado momento do jogo de pôquer da modalidade Texas Hold'em. Na atividade 1 utilizaremos a combinatória para contar o número de possibilidades para as diferentes mãos do ranking de pôquer. As atividades 2, 3 e 4, representam situações-problema nas quais desejamos determinar a probabilidade de completar mãos de pôquer a partir da abertura de algumas cartas. A atividade 5 é uma coleção de problemas de probabilidade na qual desejamos determinar a chance de iniciar uma partida de Texas Hold'em com duas cartas específicas. Na atividade 6 determinaremos a probabilidade de vitória de cada jogador envolvido na disputa de uma partida de pôquer no momento em que falta a abertura de uma carta. A partir dessa série de atividades, organizamos um material didático para facilitar o trabalho dos professores na aplicação dessa proposta em sala de aula. Nesse material, que está no anexo, incluímos um referencial teórico básico de pôquer, juntamente com uma lista de problemas que exploram a combinatória e, principalmente, o cálculo de probabilidades. Procuramos organizar essas questões em ordem crescente de dificuldade. No anexo também é apresentado um gabarito para essas atividades.

1 Pôquer - O jogo e as suas regras

Pôquer é um jogo de cartas, disputado com o tradicional baralho francês de 52 cartas. Esse baralho é composto por 4 naipes (copas, ouros, espadas e paus) conforme figura 1. Cada naipe tem cartas dos valores 2 (*dois*), 3 (*três*), 4 (*quatro*), 5 (*cinco*), 6 (*seis*), 7 (*sete*), 8 (*oito*), 9 (*nove*), 10 (*dez*), J (*valete*), Q (*dama*), K (*rei*) e A (*ás*).

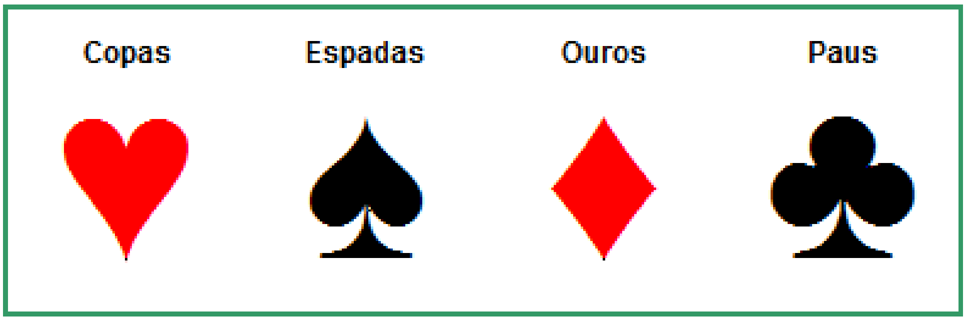


Figura 1: Naipes.

Segundo Mestre (2013), o pôquer é o jogo de cartas mais popular do mundo. Pode ser jogado por dinheiro ou simplesmente por diversão. Pode ser jogado em uma mesa real ou virtual em um dos milhares de sites que disponibilizam pôquer online.

O jogador tem o objetivo de fazer a melhor combinação de 5 cartas, também chamada de mão. Normalmente o pôquer é disputado utilizando fichas com cores e valores diferentes. As fichas apostadas formam um conjunto, denominado de pote. O jogador que apresentar a melhor mão, ou que fizer com que todos os seus adversários desistam, ganha o pote.

O sucesso de um jogador nesse esporte está associado a uma série de fatores, como inteligência, estratégia, raciocínio, conhecimentos de lógica e matemática, sorte e controle emocional. Ou seja, é um jogo de habilidades intelectuais e comportamentais. Por isso, o pôquer foi reconhecido como esporte da mente (ESPORTE, 2010). Assim como o xadrez, é um esporte de alta complexidade, em pouco tempo aprende-se a jogar, porém para se tornar um bom jogador requer muito treino, estudo e dedicação.

Pelo fato do pôquer ser um jogo de apostas, muitas vezes as pessoas o associam a jogos de azar. Porém, esta não é a realidade, porque conforme o nível dos jogadores eleva, a sorte torna-se um fator cada vez menos influente para o resultado final do jogo. Em estudo recente, realizado pela empresa Cigital e coordenado pelo professor Dr Sean McCulloch do departamento de Matemática e Ciência da Computação de Ohio Wesleyan University, analisou 103 milhões de mãos jogadas. Dessas, 75,7% não terminaram no show down (momento em que os jogadores mostram suas cartas), sendo assim definidas apenas por apostas dos jogadores, que não necessariamente tinham as melhores cartas (MCCULLOCH; HOPE, 2009).

O pôquer possui várias modalidades, como Texas Hold'em, Omaha, Stud, Draw Pôquer, Razz e outras. Cada modalidade apresenta variações em relação à forma de jogar, apostar e o número de cartas recebidas. Atualmente a modalidade mais conhecida e jogada em todo mundo é o Pôquer Texas Hold'em. Dessa forma, essa modalidade será utilizada como base para o restante desse trabalho.

1.1 Texas Hold'em

O Texas Hold'em é um jogo de pôquer com cartas comunitárias, jogado em mesas com 2 até 10 jogadores. Nessa modalidade cada jogador recebe apenas duas cartas fechadas (carta que somente o próprio jogador vê) e também há 5 cartas comunitárias, que são cartas abertas na mesa e utilizadas simultaneamente por todos jogadores. Para ganhar você precisa fazer a melhor combinação possível de 5 cartas, dentre as 7 cartas. Assim, nem sempre as duas cartas da mão do jogador serão utilizadas para formar um jogo.

1.1.1 Ranking das mãos de pôquer

A seguir apresentaremos o ranking das mãos possíveis no Texas Hold'em, em ordem decrescente de força (POKERSTARS, 2014). Todas as mãos estão acompanhas de um exemplo ilustrativo.

Nesse trabalho, algumas nomenclaturas serão mantidas na língua estrangeira por se tratarem de expressões consagradas no poquêr e serem mais usuais do que traduções para a língua portuguesa.

1. **Royal Straight Flush**: também conhecida como sequência real, é uma sequência de *dez* a *ás* com cartas do mesmo naipe. Essa é a única mão imbatível no pôquer. Um exemplo é apresentado pela figura 2.

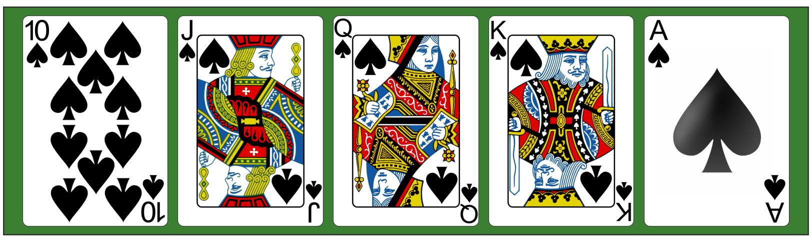


Figura 2: Exemplo para royal straight flush.

2. **Straight Flush**: também conhecida por sequência de cor, é qualquer sequência de 5 cartas do mesmo naipe, exceto do royal straight flush. Um exemplo é apresentado pela figura 3.

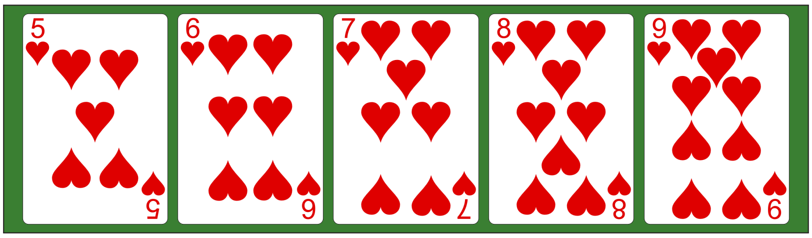


Figura 3: Exemplo para um straight flush.

3. **Quadra**: também conhecida como pôquer, são 4 cartas do mesmo valor. Um exemplo é apresentado pela figura 4.

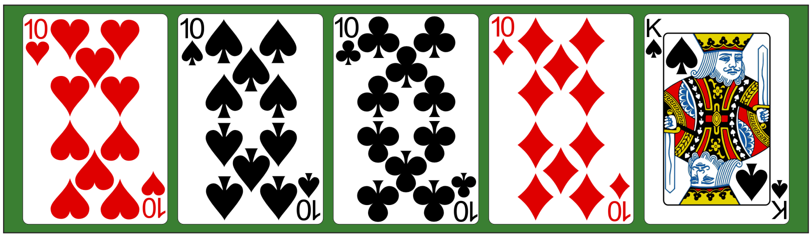


Figura 4: Exemplo de uma quadra de *dez*.

4. **Full House**: também conhecida por full hand, é uma mão composta por uma trinca mais um par. Um exemplo é apresentado pela figura 5.

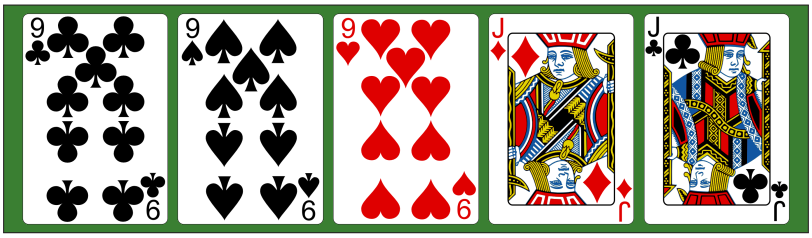


Figura 5: Exemplo de um full house.

5. **Flush**: quaisquer 5 cartas do mesmo naipe, conforme exemplo da figura 6.

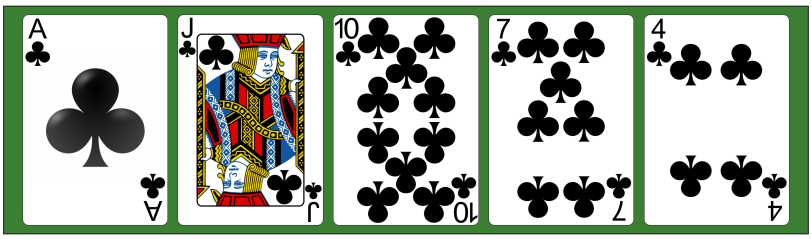


Figura 6: Exemplo de um flush de paus.

6. **Straight ou sequência**: 5 cartas em sequência, independente dos naipes, exceto straight flush. Um exemplo é apresentado pela figura 7.

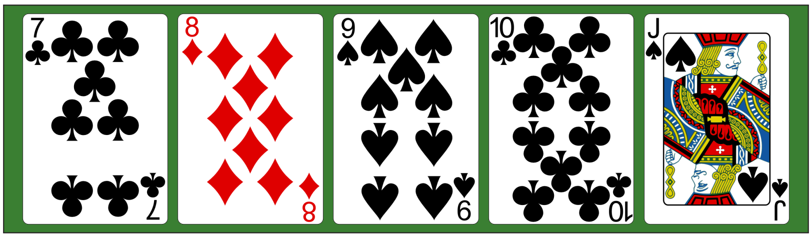


Figura 7: Exemplo de uma sequência.

7. **Trinca**: 3 cartas do mesmo valor. Um exemplo é apresentado pela figura 8.

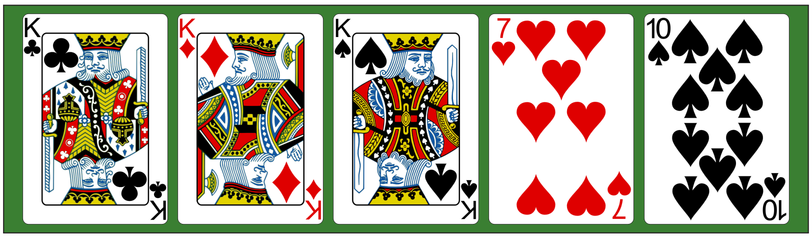


Figura 8: Exemplo de uma trinca de *reis*.

8. **Dois Pares**: duas duplas de cartas do mesmo valor. Um exemplo é apresentado pela figura 9.

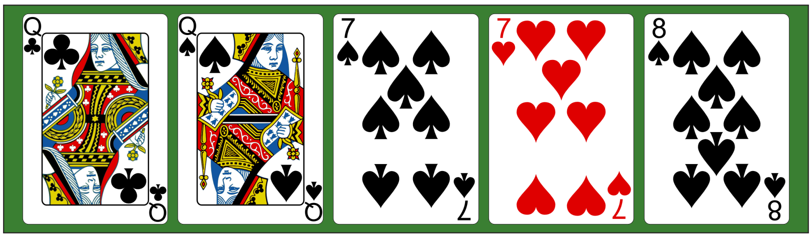


Figura 9: Exemplo para dois pares, *damas* e *setes*.

9. **Par**: duas cartas do mesmo valor. Um exemplo é apresentado pela figura 10.

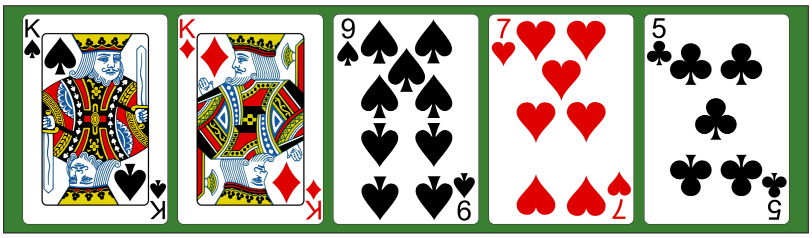


Figura 10: Exemplo de mão para um par de *reis*.

10. **Carta alta**: qualquer mão que não se classifique nas categorias descritas acima. Um exemplo é apresentado pela figura 11.

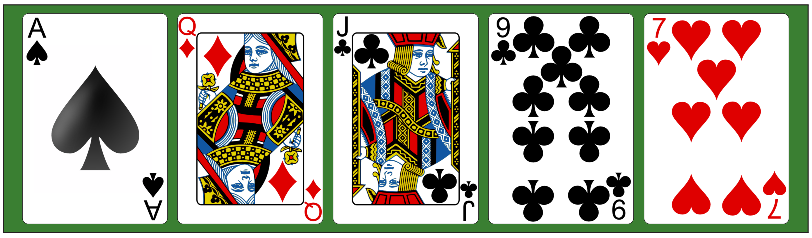


Figura 11: Sem nenhum par.

Em caso de empate, dois ou mais jogadores terem mãos iguais, por exemplo, um par, vencerá aquele com o par mais alto. Se ambos tiverem o mesmo par, vencerá aquele que tem a carta mais alta nas mãos, que é chamada de *kicker*. Se a carta mais alta estiver na mesa, então haverá empate na rodada, e portanto divide-se o pote de fichas.

1.1.2 Dealer e os blinds

A distribuição das cartas e a ordem das apostas é sempre realizada no sentido horário. Em cada rodada, um dos jogadores terá o botão do ***dealer*** em sua frente, indicando que a ação começará com o jogador a sua esquerda. Assim, o jogador que tem o botão a sua frente terá a vantagem de ser o último a agir, pois já conhecerá a ação dos demais adversários.

Os ***blinds*** são apostas obrigatórias, que devem ser feitas pelos jogadores nas duas posições imediatamente à esquerda do *dealer*, antes mesmo de receber suas cartas. O primeiro jogador à esquerda deve apostar o *small blind* (SB), que é metade do valor do segundo jogador à esquerda, que apostará o *big blind* (BB). O big blind representa a aposta mínima do jogo.

1.1.3 Ações do jogo

No Texas Hold'em, assim como em outras formas de pôquer, as ações disponíveis são desistir (*fold*), passar (*check*), apostar (*bet*), pagar (*call*) ou aumentar a aposta (*raise*). As opções disponíveis dependerão da ação do jogador anterior. Cada jogador de pôquer sempre tem a opção de desistir, e assim descartar suas cartas e desistir do pote. Se ninguém tiver feito uma aposta ainda, então um jogador pode também passar (abdicar da aposta, mas manter suas cartas) ou apostar. Se um jogador tiver apostado, então os jogadores subsequentes podem desistir, pagar ou aumentar. Pagar é colocar o mesmo valor da aposta do jogador anterior. Aumentar é não apenas pagar a mesma aposta, mas também aumentar o seu valor.

1.1.4 Dinâmica do jogo

Uma vez definido o *dealer* e os *blinds* terem sido colocados na mesa, são distribuídas duas cartas fechadas a cada um dos jogadores da mesa. A seguir, começando pelo jogador a esquerda do *big blind*, começa a primeira rodada de apostas.

Após todos os jogadores terem tomado suas decisões, são abertas as 3 primeiras cartas comunitárias na mesa, o que é chamado de **FLOP**. Então uma nova rodada de apostas se segue. Se antes do *flop* algum jogador fizer uma aposta e todos os demais desistirem, ele leva todas as fichas do pote e não haverá a abertura de cartas comunitárias. Da mesma forma, se após o *flop* alguém apostar e todos desistirem, a mão é decidida ali mesmo.

Se houver necessidade, uma quarta é aberta na mesa, chamada de **TURN**. Então segue mais uma rodada de apostas. Então é aberta a última carta comunitária, chamada de **RIVER** e a última rodada de aposta se segue, totalizando 4 turnos de apostas. Caso um jogador aposte e um ou mais oponentes paguem a aposta (*call*), no final do quarto turno de apostas é realizado o *show down*, momento que todos jogadores mostram as cartas para ver quem tem o melhor jogo. O jogador com a melhor mão leva todas as fichas do pote e uma nova rodada se inicia, de forma que o atual *small blind* é o novo *dealer*. E assim, no sentido horário, o jogo prossegue.

2 Caracterização

Neste capítulo apresentaremos os recursos mínimos necessários ao bom desenvolvimento das atividades propostas.

2.1 Público alvo

Esse trabalho apresenta uma proposta pedagógica para o estudo de probabilidade na disciplina de matemática. Todas atividades descritas nesse trabalho são direcionadas para estudantes do terceiro ano do ensino médio, ano em que geralmente é desenvolvido esse conteúdo.

Novamente voltamos a destacar que esse trabalho não tem o objetivo de servir de suporte técnico a jogadores de pôquer, assim como também não representa um guia para aprimorar as habilidades dos praticantes. Esse trabalho foi elaborado, exclusivamente, com a intenção de explorar e aplicar a matemática no universo do pôquer, bem como ser uma ferramenta pedagógica útil para as aulas de probabilidade.

2.2 Pré-requisitos

Este trabalho não foi elaborado com a intenção de introduzir ou desenvolver novos conceitos em sala de aula. As atividades propostas foram idealizadas visando aprimorar e aprofundar as técnicas de contagem (análise combinatória ou simplesmente combinatória) e a teoria de probabilidades. Sendo assim, sugerimos um estudo prévio dos conceitos a seguir.

2.2.1 Análise Combinatória

Entre as técnicas de contagem, é suficiente que os alunos conheçam o princípio fundamental da contagem e o conceito de combinações simples.

2.2.1.1 Princípio fundamental da contagem

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy.

Esse princípio também é conhecido por princípio multiplicativo ou princípio fundamental da enumeração.

2.2.1.2 Combinações simples

Considere o conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ com n elementos. Desse conjunto desejamos escolher p elementos. Cada subconjunto com p elementos é chamado de *combinação simples de n elementos tomados p a p.* O número de combinações simples de n elementos tomados p a p é representado por C_n^p ou $C_{n,p}$ e é dado por

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

2.2.2 Probabilidade

Em relação aos pré-requisitos de probabilidade, utilizaremos os seguintes conceitos:

2.2.2.1 Experimento aleatório

Denomina-se *experimento aleatório* (não determinístico) todo fenômeno cujo resultado não é previsível, ou seja, são experimento que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições praticamente idênticas, não apresentam os mesmos resultados.

2.2.2.2 Espaço amostral

Em um experimento aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado *espaço amostral.* Geralmente é representado por Ω.

2.2.2.3 Evento

Evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral. No caso do subconjunto ser constituído por apenas um elemento, ele é chamado de *evento elementar.*

2.2.2.4 Definição clássica de probabilidade

Quando num experimento aleatório, com espaço amostral finito, considerando que todo evento elementar tem a mesma "chance" de ocorrer (o espaço é equiprovável), a *probabilidade de ocorrer o evento A*, indicada por $P(A)$, é um número que mede essa chance e é dado por:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{número de elementos de A}}{\textbf{número de elemento de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

ou simplesmente,

$$\textbf{probabilidade} = \frac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}.$$

Nesse caso, os eventos elementares são chamados de eventos equiprováveis, pois todos têm a mesma chance de ocorrer.

2.2.2.5 Propriedades das probabilidades

Sejam A e B eventos associados ao espaço amostral Ω de um experimento aleatório.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$, onde $\emptyset$ é o conjunto vazio;
3. $P(A^C) = 1 - P(A)$ onde A^C é o complemento de A;
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2.2.2.6 Probabilidade condicional

Sejam A e B eventos associados a um experimento aleatório, tais que $P(A) > 0$. A *probabilidade condicional de B dado A*, indicada por $P(B \mid A)$, significa a probabilidade de ocorrência do evento B dado que o evento A já ocorreu, e é definida pelo número

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

2.3 Recomendações metodológicas

As atividades associadas ao pôquer desenvolvidas nesse trabalho são propostas pedagógicas para amadurecer e aprofundar os conhecimentos de combinatória e, principalmente, conhecimentos da teoria de probabilidades. Para aplicar essa proposta, não é necessário que o professor e os alunos conheçam todas as regras ou saibam jogar o Texas Hold'em. Recomenda-se apenas a utilização de alguns conceitos básicos do jogo, como o ranking de mãos e a composição do baralho de cartas. Com estes conhecimentos mínimos, já é possível aplicar as atividades em sala de aula. Essas informações não precisam ser memorizadas, pois basta utilizar um modelo resumido conforme anexo A.

Muitas vezes os cálculos associados às técnicas de contagem resultam em números na casa dos milhões ou ainda maiores. Esses resultados são consequência de cansativos cálculos manuais das operações básicas da matemática. Assim, objetivando uma melhor dinâmica, recomenda-se a liberação do uso da calculadora para os alunos, pois, dessa forma eles têm a oportunidade de se familiarizar com esses equipamentos.

Também acreditamos que a probabilidade representada na forma percentual seja a forma mais interessante e conveniente, já que a maioria das probabilidades apresentadas no cotidiano são apresentadas dessa forma. Nesse processo de transformar uma probabilidade da forma fracionária para a forma percentual, a calculadora também se apresenta como ferramenta muito útil.

Outra recomendação diz respeito à aplicação das técnicas de contagem para resolução dos problemas de probabilidade. Compartilhamos da mesma ideia de (LIMA et al., 2006):

> Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas. Quem troca o princípio básico de contagem por fórmulas de arranjos, permutações e combinações tem dificuldade de resolver até mesmo problemas de menor complexidade. Aprenda, e faça com que os alunos aprendam, com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada.

2.4 Dificuldades previstas

Geralmente as questões de combinatória e probabilidade exigem muita interpretação e raciocínio e, às vezes, geram grandes dificuldades até mesmo para profissionais de matemática. Como essa proposta não é o antídoto para todos os problemas do processo de ensino-aprendizagem, algumas dificuldades próprias do conteúdo possivelmente permanecerão.

Em relação ao pôquer, acreditamos que não haverá grandes dificuldades, já que os alunos não precisarão jogar. Apenas exigirá do professor um planejamento da aula adequado, através de um estudo prévio do ranking de mãos e a resolução de alguns problemas, assim como deve ser feito para qualquer aula.

3 Atividades Propostas

Na sequência desse trabalho será apresentada uma coleção de problemas de matemática que exploram os conhecimentos de combinatória e, principalmente, de probabilidade. Todos os problemas estão associados às principais situações de jogo do pôquer. Vamos explorar o número de combinações para cada mão do jogo e a probabilidade de determinadas mãos serem formadas a partir da extração aleatória de cartas. Apesar da distribuição de cartas serem determinadas pelo acaso, este não é o fator principal para definir o vencedor no pôquer.

As atividades estão divididas em seis subconjuntos de problemas. Cada subconjunto apresenta uma coleção de situações de um determinado momento do jogo. Dentro desses grupos, os níveis de dificuldade dos problemas são semelhantes. Comparando os subconjuntos, há um crescimento progressivo no nível de dificuldade das atividades 2, 3 e 4.

Esses problemas servem como referência para elaboração de outras situações de jogo. Os casos apresentados foram escolhidos de modo que sejam adequados e úteis à aplicação nas aulas de matemática do ensino médio, pois existem situações nas quais o nível de dificuldade da resolução do problema pode ser muito elevado, fugindo do objetivo desse trabalho. Nos casos mais complexos, o obstáculo está no fato do espaço amostral ser muito grande e na dificuldade da sua partição em casos favoráveis e não favoráveis.

3.1 ATIVIDADE 1: Calculando o número de combinações possíveis para cada mão de pôquer

Nessa seção será apresentada uma justificativa matemática para o ranking das mãos do pôquer que apresentamos na seção 1.1.1 e no anexo A. Para isso vamos determinar o número de casos favoráveis a cada um dos 10 tipos de mãos, conforme ordem do ranking.

Notaremos que quanto maior é a força da mão de pôquer, menor é o número de combinações possíveis para formá-la com um baralho. Ou seja, as mãos mais fortes tem menor probabilidade de serem formadas.

3.1.1 Royal Straight Flush

Cinco cartas em sequência, do *dez* à *ás*, todas do mesmo naipe. Existem 4 sequências reais possíveis, uma para cada naipe.

3.1.2 Straight Flush

Cinco cartas em sequência do mesmo naipe, exceto os royals straight flush. Podem ser desde A-2-3-4-5 a 9-10-J-Q-K, ou seja, 9 sequências para cada naipe. Logo existem $4 \times 9 = 36$ straight flush.

3.1.3 Quadra

Quarto cartas com o mesmo valor. São 13 os valores possíveis numa quadra. A quinta carta da mão é qualquer uma entre as 48 cartas restantes. Portanto existem $13 \times 48 = 624$ quadras diferentes.

3.1.4 Full House

Essa mão é constituída por uma trinca e um par. A trinca é formada a partir de 3 de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor, ou seja, $C_{4,3} = 4$ trincas possíveis de um conjunto de 13 valores diferentes possíveis. Extraindo a trinca, restam 12 valores para o par. O par é formado a partir de uma dupla de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor, ou seja, $C_{4,2} = 6$ pares possíveis para cada um dos 12 valores restantes.

Portanto há $13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3.744$ maneiras de formar um full house.

3.1.5 Flush

As cinco cartas pertencem todas ao mesmo naipe, não estando em sequência. Devemos ter 5 cartas entre as 13 possíveis do naipe, ou seja, $C_{13,5} = 1.287$ flush por naipe. Porém devemos excluir os casos que são straight flush ou royal.

Portanto existem $4 \times 1.287 - 36 - 4 = 5.108$ combinações de 5 cartas que representam um flush.

3.1.6 Sequência

Cinco cartas em sequência, não pertencendo todas ao mesmo naipe. As sequências podem ir de A-2-3-4-5 a 10-J-Q-K-A, o que faz um total de 10 sequências, em que cada carta pode ser qualquer um dos 4 naipes. É necessário retirar o número de sequência que forma um straight flush ou royal.

Portanto o número de sequências possíveis é $10 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 - 36 - 4 = 10.200$.

3.1.7 Trinca

Três cartas com o mesmo valor. Há 13 valores possíveis para a trinca e cada uma é formada por 3 de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor, ou seja, $C_{4,3} = 4$. Ainda é usada mais duas cartas entre as 48 restantes, mas é necessário retirar as mãos que formam full house.

Portanto existem $13 \times 4 \times (C_{48,2} - 12 \times C_{4,2}) = 52 \times (1.128 - 72) = 54.912$ trincas.

3.1.8 Dois Pares

Duas cartas do mesmo valor com mais outras duas do mesmo valor, mas diferentes das primeiras duas. Há 13 valores possíveis com os quais é necessário formar dois pares, ou seja, existem $C_{13,2} = 78$ duplas diferentes para dois pares. Cada par é formado por duas de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor. Ainda há a quinta carta, que pode ser qualquer uma entre as $52 - 4 - 4 = 44$ restantes.

Portanto o número de combinações possíveis para dois pares é $78 \times C_{4,2} \times C_{4,2} \times 44 = 123.552$.

3.1.9 Um Par

Na mão há apenas um par e as outras cartas são diferentes do par e entre si. Cada par é uma combinação de duas das 4 cartas para cada um dos 13 valores possíveis, ou seja, há $13 \times C_{4,2} = 78$ pares diferentes. Ainda há as 3 cartas que restam, de valor diferente do par e entre si. Para terceira carta não coincidir com o par há 48 possibilidades. Para a quarta e a quinta cartas não coincidirem com as anteriores e entre si há, respectivamente, 44 e 40 possibilidades. Como a ordem da terceira, quarta e quinta cartas não diferem o jogo pela sua ordem temos que dividir pela permutação das 3 cartas.

Dessa forma a quantidade de combinações de 5 cartas que representam um par é $78 \times \dfrac{48 \times 44 \times 40}{3!} = \dfrac{78 \times 84.480}{6} = 1.098.240$.

3.1.10 Carta Alta

Quando não há nenhuma das mãos anterior, ou seja, não possui sequer um par. O número total de combinações de 5 cartas de um baralho de pôquer é dado por $C_{52,5} = 2.598.960$ mãos possíveis. Assim o número de mãos que representam carta alta é dado por $C_{52,5}$ descontando todas as mãos calculadas anteriormente.

Portanto a quantidade de mãos carta alta é $2.598.960 - (4 + 36 + 624 + 3.744 + 5.108 + 10.200 + 54.912 + 123.552 + 1.098.240) = 1.302.540$.

3.2 ATIVIDADE 2: Calculando a probabilidade do river ser favorável

Esse conjunto de problemas trata de situações nas quais conhecemos as duas cartas de um jogador, o flop e o turn, ou seja, conhecemos 4 cartas comunitárias. Diante dessa situação queremos determinar probabilidade do river (5ª carta comunitária) ser favorável a uma determinada mão. Vejamos algumas situações que aparecem com frequência no Texas Hold'em e que exigem os seguintes raciocínios:

3.2.1 Probabilidade de formar uma sequência

Considere que um jogador tenha *dez* de copas e *valete* de paus. No flop abriu *cinco* de paus e copas e a *dama* de paus, enquanto que o turn é *nove* de ouros conforme figura 12. Desejamos calcular a probabilidade desse jogador formar uma sequência.

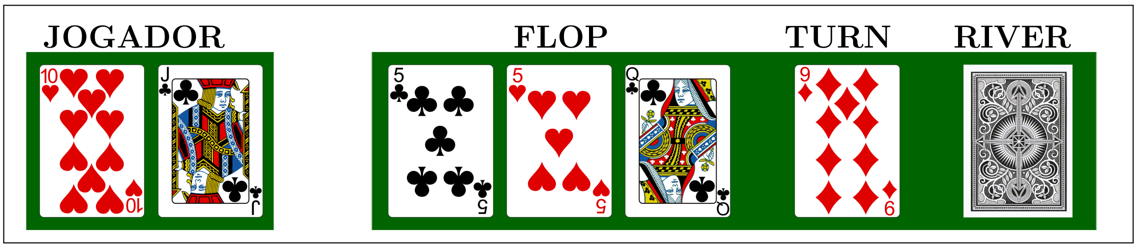


Figura 12: Probabilidade de formar uma sequência.

Note que no momento esse jogador possui apenas um par de *cincos* e possivelmente esteja perdendo para algum adversário, já que basta alguém ter um *cinco*, um *nove* ou uma *dama* para estar com uma mão melhor. Dessa forma, o jogador depende de um *oito* ou um *rei* para fechar uma sequência e assim possuir uma mão mais forte do que dois pares ou trinca (possíveis mãos adversárias).

Vejamos a probabilidade de formar uma sequência. Conhecemos 6 das 52 cartas do baralho. Dessa forma restam 46 possibilidades para o river. Como há 4 *oitos* e 4 *reis*, existem $4 + 4 = 8$ cartas favoráveis entre as 46 cartas restantes. Assim concluímos que a probabilidade desse jogador formar uma sequência é $\frac{8}{46}$ ou $\frac{4}{23}$, que representa aproximadamente 17,39%.

Ciente dessa probabilidade, o jogador pode perceber que não é vantajoso pagar uma aposta alta do adversário, já que a probabilidade favorável é baixa. As orientações técnicas de pôquer exploram esse ponto de vista, fazendo avaliações do custo-benefício através da comparação entre duas razões: a primeira razão representa a probabilidade de completar determinada mão, enquanto que a segunda, é dada pela razão entre o número de fichas exigidas para pagar a aposta e o total de fichas do pote. Na situação analisada, as orientações técnicas aconselham à desistir da mão no caso em que a quantidade de fichas para pagar a aposta é superior a $\frac{4}{23}$ do total de fichas em disputa no pote. Por outro lado, orienta-se pagar uma aposta que exige menos que $\frac{4}{23}$ do total de fichas em disputa. Porém, nosso trabalho não tem o objetivo de seguir por esse caminho. Durante o restante das atividades, abordaremos somente a probabilidade de formar determinadas mãos, sem relacionar e comparar com a quantidade de fichas em disputa.

3.2.2 Probabilidade de formar um flush

Agora considere que um jogador tenha um *seis* e um *oito* de ouros. No flop temos *seis* de copas, *ás* de espadas e *dez* de ouros, além de um *cinco* de ouros conforme figura 13. Vamos calcular a probabilidade desse jogador formar um flush (5 cartas do mesmo naipe).

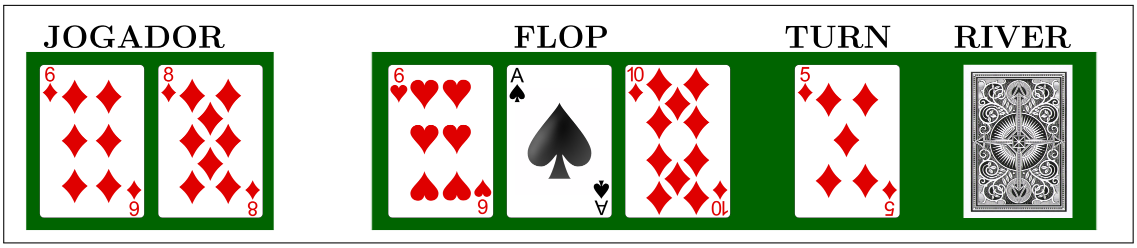


Figura 13: Probabilidade de formar um flush.

Nesse caso, o jogador tem um par de *seis*, porém é baixo, já que um *dez* ou *ás* de um adversário estaria vencendo nesse momento do jogo. As duas cartas de ouros mais as duas cartas comunitárias de ouros formam um flush draw (projeto de flush). Para completar esse projeto é preciso mais uma carta de ouros. Ao todo, há 13 cartas de ouros no baralho. Assim ainda existem 9 desse naipe dentre as 46 cartas restantes. Dessa forma a probabilidade de sair ouros no river é $\frac{9}{46}$, ou seja, aproximadamente 19,57%.

3.2.3 Probabilidade de formar um full house

Nessa situação considere que um jogador tenha dois pares, *setes* e *dez*, conforme figura 14. Queremos determinar a probabilidade de fazer um full house (trinca mais par). Veja as cartas desse caso:

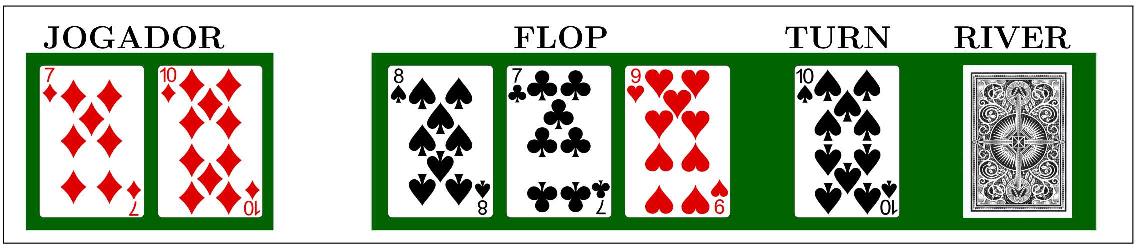


Figura 14: Probabilidade de formar um full house.

Nesse caso percebemos que dois pares não é uma mão suficientemente forte, já que se um adversário tem um *seis* ou um *valete*, ele possui uma sequência que está ganhando de dois pares. Porém, se esse dois pares se transformarem em um full house através do river, o jogador vence a sequência. Para formar o full house é necessário aparecer um *sete* ou um *dez* no river. Entre as 46 cartas restantes ainda restam dois *setes* e dois *dez*. Assim a probabilidade de completar o full house é $\frac{4}{46}$, ou ainda, $\frac{2}{23}$ que corresponde a 8,70% aproximadamente.

3.2.4 Probabilidade de formar trinca de valetes

Agora um jogador tem um par de *valetes* conforme o jogo descrito na figura 15. Queremos determinar a probabilidade de fazer uma trinca de *valetes*. Observe as cartas desse caso:

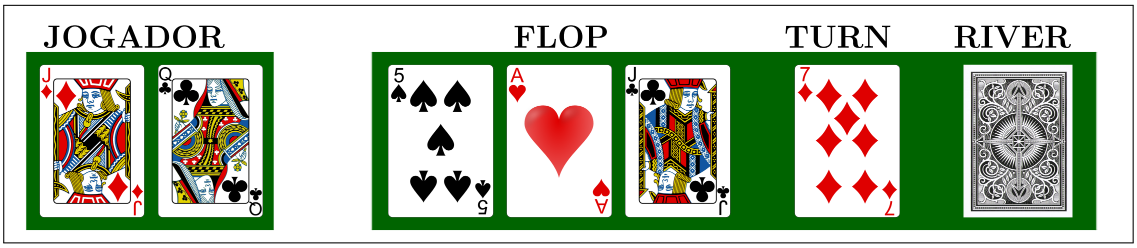


Figura 15: Probabilidade de formar trinca de valetes.

Como há um *ás* no flop, um par de *valetes* é insuficiente contra um adversário que tenha um *às* na mão. Já que há 4 *valetes* no baralho, a probabilidade de obter um *valete* no river é $\frac{2}{46}$, ou seja, $\frac{1}{23}$ que equivale à 4,35%.

3.2.5 Probabilidade de formar outro full house

Nessa situação analisaremos a seguinte situação. Considere que um jogador receba um par de *quatros* na mão. No flop há mais um *quatro*, porém todas as cartas do flop e turn são do naipe de copas conforme figura 16. Vamos determinar a probabilidade desse jogador completar um full house.

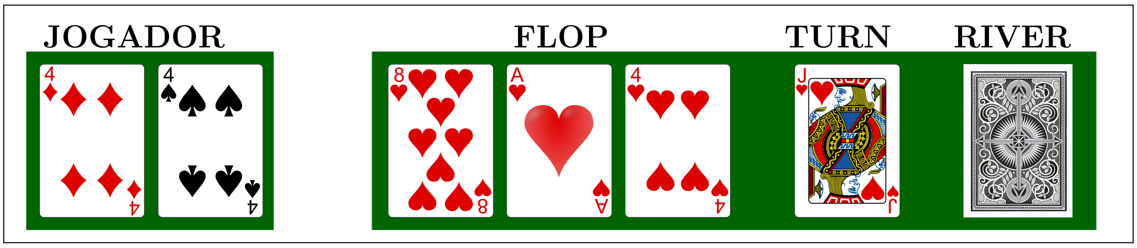


Figura 16: Probabilidade de formar outro full house.

Lembrando que um flush vence uma trinca, qualquer adversário que tenha uma carta de copas está vencendo a trinca de *quatros*. Porém um full house vence o provável flush de copas. Para o jogador que possui a trinca formar um full house precisa de mais um par. Isso acontece se o river for um *oito*, um *valete* ou um *ás*. Entre as 46 cartas restantes, ainda há 3 *oitos*, 3 *valetes* e 3 *ases*. Assim a probabilidade do jogador completar um full house é $\frac{9}{46}$, ou seja, 19,57%.

3.2.6 Probabilidade de formar sequência ou flush

Nessa situação considere que um jogador esteja na expectativa de formar uma sequência ou um flush, conforme figura 17. Calcularemos a probabilidade de, pelo menos, um desses dois eventos ocorrer.

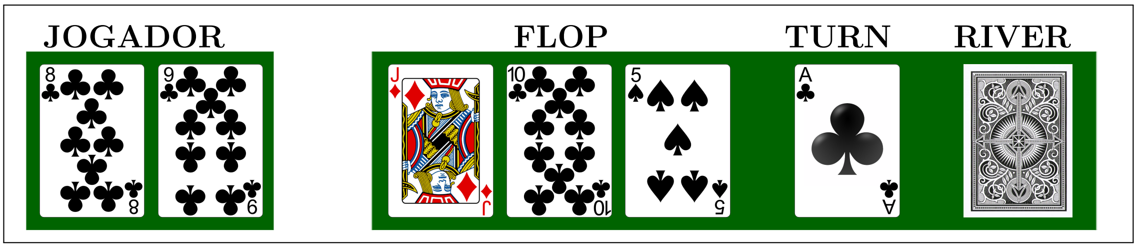


Figura 17: Probabilidade de formar sequência ou flush.

No momento o jogador não tem nenhum par, porém tem um projeto de sequência e de flush do naipe de paus. Para completar a sequência é necessário um *sete* ou uma *dama*. Para o flush, é preciso mais uma carta de paus. Entre as 46 cartas restantes há 4 *setes*, 4 *damas* e 9 cartas de paus. Como há um *sete* de paus e uma *dama* de paus, totalizam $4 + 4 + 9 - 2 = 15$ cartas favoráveis à sequência ou ao flush. Assim a probabilidade de completar sequência ou flush é $\frac{15}{46}$, ou seja, 32,61%.

3.2.7 Probabilidade de formar flush ou full house

Nessa situação considere que um jogador já esteja com a trinca formada antes do river ser aberto, conforme figura 18. Vamos determinar a probabilidade desse jogar formar um flush ou um full house.

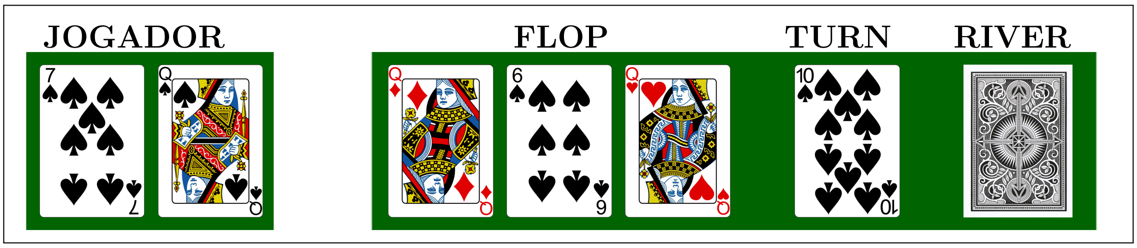


Figura 18: Probabilidade de formar flush ou full house.

Para formar um flush é necessário mais uma carta do naipe de espadas. Ainda há 9 espadas entre as 46 cartas restantes. Já o full house depende de mais um par, par de *seis*, de *setes* ou *dez*. No baralho restam 3 *seis*, 3 *setes* e 3 *dez*. Nenhum desses *seis*, *setes* ou *dez* é do naipe de espadas, já que estas estão na mesa. Assim a probabilidade de formar um flush ou um full house é $\frac{18}{46}$, ou seja, $\frac{9}{23}$ que equivale a 39,13%.

3.3 ATIVIDADE 3: Calculando a probabilidade do turn juntamente com o river ser favorável

Esse conjunto de problemas trata de situações nas quais conhecemos as duas cartas de um jogador e o flop (3 primeiras cartas comunitárias). Diante dessa situação queremos determinar probabilidade do turn mais o river (4ª e 5ª cartas comunitárias) serem favoráveis a uma determinada mão. Vejamos alguns casos que merecem destaque:

3.3.1 Probabilidade de formar um flush

Nessa situação considere que um jogador tenha um *nove* e um *ás* de ouros. No flop aparece *dez* e *rei* de ouros junto com *sete* de paus conforme figura 19. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar um flush.

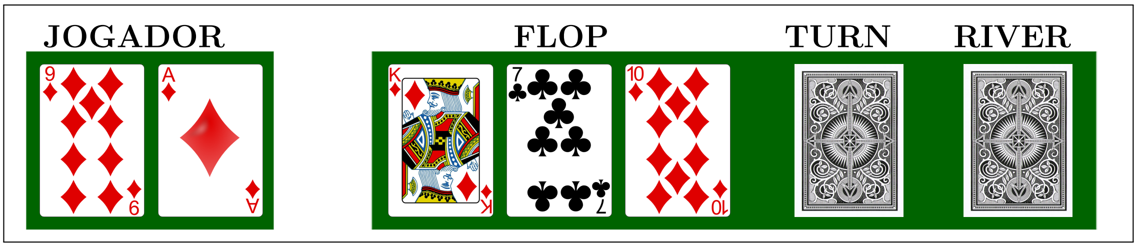


Figura 19: Probabilidade de formar um flush.

Primeiramente é importante destacar que calcularemos a probabilidade de formar um flush contando com a abertura das duas últimas cartas coletivas (turn e river). Desse modo nessa coleção de problemas de probabilidade o espaço amostral é formado pelas combinações das 47 cartas restantes tomadas 2 a 2. Assim o número de elementos do espaço amostral é $C_{47,2} = \dfrac{47!}{2! \times 45!} = \dfrac{47 \times 46}{2} = 1.081$.

Para determinar os casos favoráveis, observe que das cartas restantes, há 9 cartas do naipe de ouros e 38 cartas dos demais naipes. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $9 \times 38 = 342$ possibilidades de sair exatamente uma carta de ouro entre as duas possíveis. Também existe a possibilidade de ambas serem de ouros. Desse modo há mais $C_{9,2} = 36$ possibilidades, portanto totalizando 378 casos favoráveis à formação de um flush, incluindo um royal straight flush.

Dessa forma, a probabilidade da formação de um flush é $P = \dfrac{9 \times 38 + C_{9,2}}{C_{47,2}} = \dfrac{378}{1.081} \approx 34,97\%$.

Nessa resolução não distinguimos a ordem que as duas cartas são abertas no turn e river, ou seja, *dois* de copas no turn juntamente com *três* de paus no river, contabilizamos como o mesmo jogo que *três* de paus no turn e *dois* de copas no river. Se distinguirmos a ordem das duas últimas cartas coletivas, o número de possibilidades para o turn é 47 e o número de possibilidades para o river é 46. Assim pelo princípio fundamental de contagem, o número de elementos do espaço amostral é $47 \times 46 = 2.162$. Para determinar os casos favoráveis com ouros no turn, ouros no river e ouros no turn e river é, respectivamente, $9 \times 38 = 342$, $38 \times 9 = 342$ e $9 \times 8 = 72$. Assim a probabilidade é $P = \dfrac{9 \times 38 + 38 \times 9 + 9 \times 8}{47 \times 46} = \dfrac{342 + 342 + 72}{2.162} = \dfrac{756}{2.162} \approx 34,97\%$.

3.3.2 Probabilidade de formar uma sequência

Nessa situação considere que um jogador tenha um *valete* de espadas e uma *dama* de copas. No flop aparece *cinco* de espadas, *nove* de paus e *dez* de ouros, conforme figura 20. Nesse jogo, se abrir um *valete* ou uma *dama* é favorável ao jogador. Porém calcularemos a probabilidade desse jogador formar uma sequência.

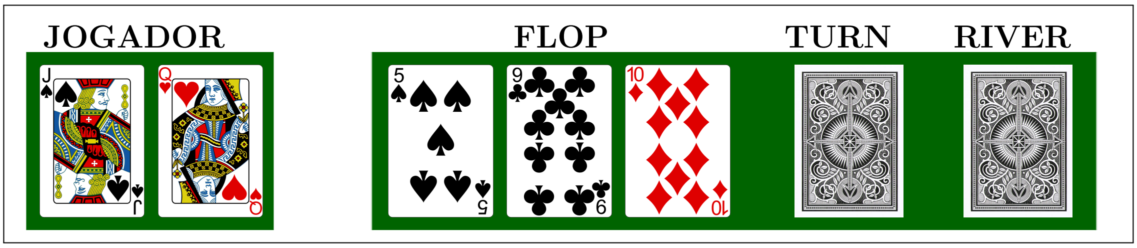


Figura 20: Probabilidade de formar uma sequência.

Para formar uma sequência é necessário que apareça um *oito* ou um *rei* no turn ou river. Novamente o total de combinações possíveis para o turn mais o river é $C_{47,2} = 1.081$. Dessas combinações é favorável o caso em que há pelo menos um *oito* ou pelo menos um *rei*. Nas 47 cartas restantes há 4 *oitos*, 4 *reis* e outras 39 cartas. Aplicando o princípio fundamental da contagem há $8 \times 39 = 312$ possibilidades de sair apenas uma das cartas favoráreis. Também podem abrir duas cartas favoráveis à sequência, ou seja, mais $C_{8,2} = 28$ casos favoráveis. Portanto, a probabilidade de completar uma sequência é $P = \dfrac{8 \times 39 + C_{8,2}}{C_{47,2}} = \dfrac{340}{1.081} \approx 31,45\%$.

3.3.3 Probabilidade de abrir uma única carta de espadas

Nessa situação considere que um jogador tenha duas cartas de espadas de valor baixo, por exemplo, *cinco* e *seis* de espadas. O flop oferece *oito* e *ás* de espadas juntamente com *três* de copas conforme figura 21. Essa situação representa um flush draw (projeto de flush). Qual é a probabilidade de abrir somente uma carta de espadas no turn mais river?

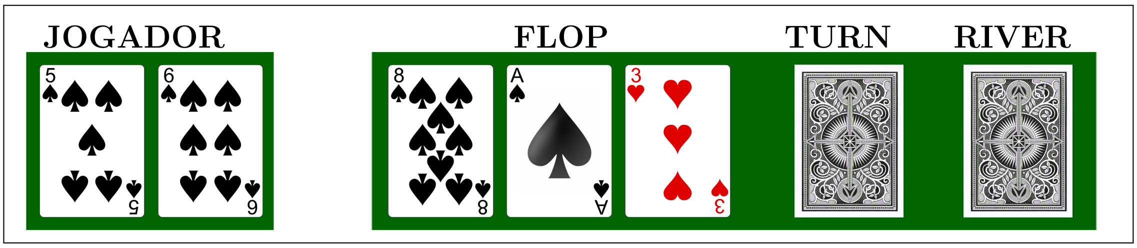


Figura 21: Probabilidade de abrir uma única carta de espadas.

Com duas cartas de espadas no turn e river esse jogador completa o flush, mas torna-se um jogo arriscado, já que nesse contexto haveria 4 cartas de espadas na mesa. Possivelmente outro jogador tenha pelo menos uma carta de espadas maior que *seis*, e assim acabaria vencendo o pote de fichas através dos critérios de desempate entre dois flush. Desse modo calcularemos a probabilidade de abrir exatamente uma carta de espadas entre as duas restantes.

Dessa forma, a probabilidade da formação de um flush, com 3 cartas comunitárias de espadas, é $P = \dfrac{9 \times 38}{C_{47,2}} = \dfrac{342}{1.081} \approx 31,64\%$.

3.3.4 Probabilidade de abrir pelo menos um valete

Agora analisaremos a situação em que um jogador inicia com um par de *valetes*. Considerando que no flop não abriu nenhum *valete* conforme figura 22, vamos determinar a probabilidade de formar, pelo menos, uma trinca de *valetes* através do turn e do river.

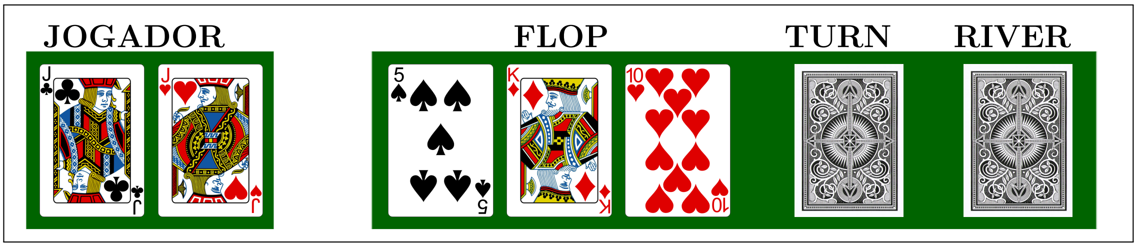


Figura 22: Probabilidade de abrir pelo menos um valete.

Nesse caso, calcularemos a probabilidade do jogador terminar com, pelo menos, 3 *valetes*, independentemente da mão final ser trinca, full house ou quadra. Assim existe a possibilidade de abrir dois *valetes* nas últimas cartas comunitárias e, consequentemente, formar uma quadra. Há somente uma possibilidade de abrir uma dupla dessas. Para formar a trinca, há duas possibilidades para o terceiro *valete* e sobram 45 possibilidades para a carta comunitária restante.

Portanto a probabilidade de formar o jogo proposto é $P = \dfrac{1 + 2 \times 45}{C_{47,2}} = \dfrac{91}{1.081} \approx 8,42\%$.

Nesse resultado, observa-se que a probabilidade da quadra é $P = \dfrac{1}{1.081} \approx 0,09\%$.

3.3.5 Probabilidade de formar, pelo menos, full house

Nesse problema um jogador está com dois pares, *dez* e *ases*, conforme figura 23. Vamos calcular a probabilidade desse jogador fazer, pelo menos, um full house.

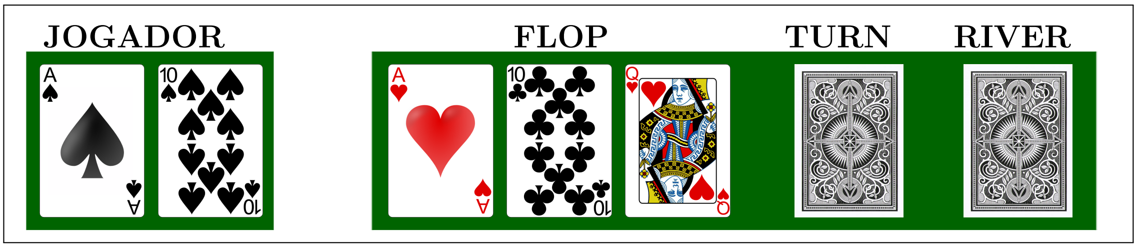


Figura 23: Probabilidade de formar, pelo menos, full house.

Esse jogador depende de pelo menos uma carta *dez* ou um *ás*. Há $C_{4,2} = 6$ possibilidades das duas cartas serem úteis, pois ainda há dois *dez* e dois *ases*. Outro caminho é abrir uma das 4 cartas favoráveis acompanhado de outra carta qualquer, ou seja, $4 \times 43 = 172$ possibilidades. Duas *damas* também resultam em full house. Assim há $C_{3,2} = 3$ combinações de abrir duas *damas*.

Portanto a probabilidade desse jogador possuir, pelo menos, um full house é $P = \dfrac{6 + 172 + 3}{C_{47,2}} = \dfrac{181}{1.081} \approx 16,74\%$.

Destacamos que o termo "pelo menos" foi utilizado nessa situação porque entre os 181 casos favoráveis contabilizados, há duas mãos que representam quadras. Assim também temos a informação que a probabilidade do jogador formar uma quadra é $P = \dfrac{2}{1.081} \approx 0,19\%$.

3.3.6 Probabilidade de formar sequência ou flush

Considere que um jogador dependa de uma carta favorável para completar uma sequência ou flush de copas conforme figura 24. Qual é a probabilidade desse jogador formar uma sequência ou um flush?

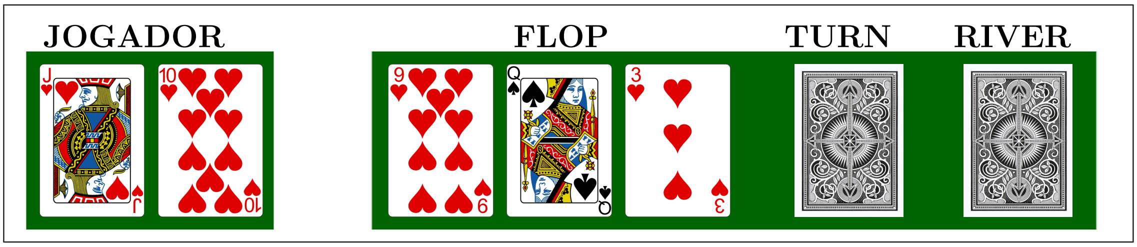


Figura 24: Probabilidade de formar sequência ou flush.

Para formar a sequência ou o flush o jogador depende de pelo menos um *oito* ou um *rei* ou ainda uma carta de copas entre as duas cartas a serem abertas. Assim totalizam 15 cartas favoráveis. Como o turn e o river ainda devem ser abertos, tem $C_{15,2} = 105$ possibilidades de que as duas cartas comunitárias restantes sejam favoráveis. Também serve o caso de abrir uma carta favorável com outra carta qualquer, isto é, mais $15 \times 32 = 480$ possibilidades de completar uma sequência ou flush.

Dessa forma, a probabilidade de acontecer uma das mãos mencionadas é $P = \dfrac{105 + 480}{C_{47,2}} = \dfrac{585}{1.081} \approx 54,12\%$.

Observe que, entre os 585 casos favoráveis, foram contabilizados 3 casos em que o flush está em sequência, ou seja, representam 3 straight flush (*sete* ao *valete* de copas, *oito* à *dama* de copas e *nove* ao *rei* de copas). Assim, a probabilidade desse jogador formar um straight flush é $P = \dfrac{3}{1.081} \approx 0,28\%$.

3.4 ATIVIDADE 4: Calculando a probabilidade das cartas comunitárias serem favoráveis

Nesse conjunto de situações partiremos de duas cartas específicas de um jogador e calcularemos a probabilidade de completar uma determinada mão. Agora consideremos que todas as cartas comunitárias estão fechadas. Vejamos alguns casos que se destacam:

3.4.1 Probabilidade de completar, pelo menos, a trinca de reis

Nessa situação considere que um jogador inicie com um par de *reis* conforme figura 25. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, a trinca de *reis*, ou seja, calcularemos a probabilidade de haver, pelo menos, um *rei* entre as cartas comunitárias.

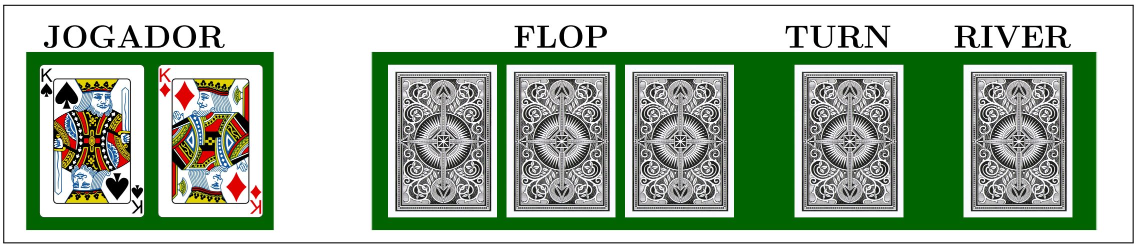


Figura 25: Probabilidade de completar, pelo menos, a trinca de reis.

Vamos considerar a abertura das 5 cartas comunitárias, porém lembramos que muitas partidas decidem-se antes, através de apostas em que um jogador consiga que todos os demais desistam de concorrer ao pote de fichas.

Nesse caso, desconsiderando a ordem que as cartas coletivas são abertas, o espaço amostral é formado pelas combinações de 50 cartas tomadas 5 a 5, ou seja, o número de elementos do espaço amostral é $C_{50,5} = \dfrac{50!}{5! \times 45!} = 2.118.760$. Dessas possibilidades, o número de casos de formação de trinca são duas possibilidades para o terceiro *rei* juntamente com a combinação das 48 cartas restantes, diferentes de *rei*, tomadas 4 a 4, ou seja, $2 \times C_{48,4} = 389.160$. Também existe a possibilidade da abertura dos dois *reis* que sobraram (uma possibilidade), juntamente com a combinação das 48 cartas restantes tomadas 3 a 3, isto é, $1 \times C_{48,3} = 17.296$.

Portanto, a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, uma trinca de *reis* é $P = \dfrac{389.160 + 17.296}{2.118.760} = \dfrac{406.456}{2.118.760} \approx 19,18\%$.

É importante destacar que dentro dessa probabilidade calculada incluem-se outros casos, como por exemplo a trinca de *reis* vir acompanhada de outro par, ou seja, o jogador está com full house, que como sabemos é uma mão superior à trinca. Também há a possibilidade de quadra, straight flush e royal straight flush incluídas na probabilidade calculada.

Também observe que se um jogador iniciar com um outro par qualquer, a probabilidade de fechar, pelo menos, a trinca a partir desse par continua sendo 19,18%.

Uma resolução alternativa: a probabilidade da primeira carta do flop não ser *rei* é $\frac{48}{50}$. Já a probabilidade da segunda carta ser novamente diferente de *rei* é $\frac{47}{49}$, e assim sucessivamente calculamos a probabilidade até a quinta carta comunitária, considerando que entre as cartas abertas anteriormente não há *reis*. Desse modo, a probabilidade de não aparecer *rei* entre as 5 cartas coletivas é $P = \frac{48}{50} \times \frac{47}{49} \times \frac{46}{48} \times \frac{45}{47} \times \frac{44}{46} = \frac{45 \times 44}{50 \times 49} \approx 80,82\%$. Portanto, usando o complemento, a probabilidade de abrir pelo menos um *rei* para formar a trinca é $100\% - 80,82\% = 19,18\%$.

3.4.2 Probabilidade de completar, pelo menos, dois pares

Considere que um jogador inicie com uma *dama* e um *nove* conforme figura 26. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, um par de *damas* junto com um par de *noves*, ou seja, calcularemos a probabilidade de abrir pelo menos uma *dama* juntamente com um *nove*.

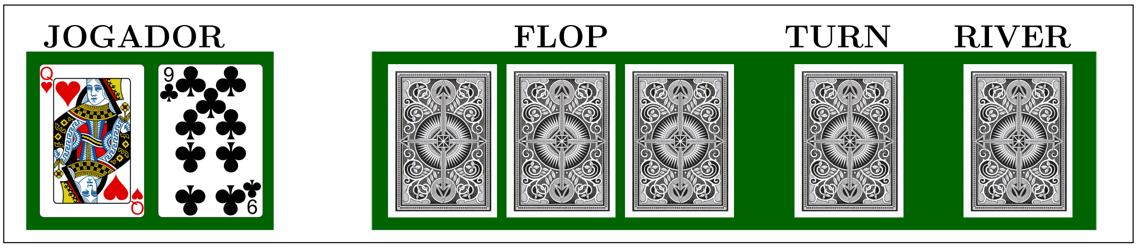


Figura 26: Probabilidade de completar, pelo menos, dois pares.

Há 8 casos favoráveis à situação proposta: uma *dama*, um *nove* e outras 3 cartas ($3 \times 3 \times C_{44,3}$); uma *dama*, dois *noves* e outras duas cartas ($3 \times C_{3,2} \times C_{44,2}$); uma *dama*, três *noves* e outra carta ($3 \times C_{3,3} \times 44$); duas *damas*, um *nove* e outras duas carta ($C_{3,2} \times 3 \times C_{44,2}$); duas *damas*, dois *noves* e outra carta ($C_{3,2} \times C_{3,2} \times 44$); duas *damas* e três *noves* ($C_{3,2} \times C_{3,3}$); três *damas*, um *nove* e outra carta ($C_{3,3} \times 3 \times 44$); três *damas* e dois *noves* ($C_{3,3} + C_{3,2}$).

Assim temos $P = \frac{119.196 + 8.514 + 132 + 8.514 + 396 + 3 + 132 + 3}{C_{50,5}}$, isto é, a probabilidade de abrir pelo menos uma *dama* mais um *nove* é $P = \frac{136.890}{2.118.760} \approx 6,46\%$.

Novamente vale destacar que dentre esse percentual, incluem-se outras mãos superiores a dois pares, como sequência, flush, full house e quadra.

3.4.3 Probabilidade de formar, pelo menos, um flush

Agora considere que um jogador inicie com um *cinco* e um *ás* de espadas conforme figura 27. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, flush de espadas.

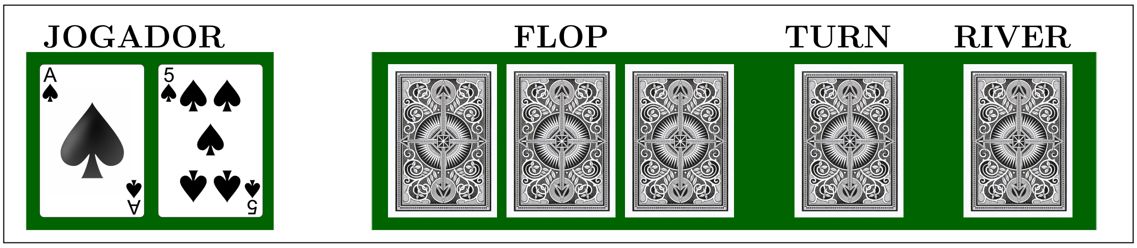


Figura 27: Probabilidade de formar, pelo menos, um flush.

Para completar o flush de espadas é necessário abrir pelo menos 3 cartas de espadas. O número de possibilidades de abrir 3 cartas de espadas juntamente com outras duas de naipes diferentes é $C_{11,3} \times C_{39,2} = 165 \times 741 = 122.265$. Já o número da casos favoráveis com 4 e 5 cartas comunitárias de espadas são, respectivamente, $C_{11,4} \times C_{39,1} = 330 \times 39 = 12.870$ e $C_{11,5} = 462$.

Assim a probabilidade desejada é $P = \dfrac{122.265 + 12.870 + 462}{C_{50,5}} = \dfrac{135.597}{2.118.760} \approx 6,4\%$.

3.4.4 Probabilidade de formar full house

Nesse caso considere que um jogador inicie com um *dez* e um *rei* conforme figura 28. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar full house de *dez* e *reis*.

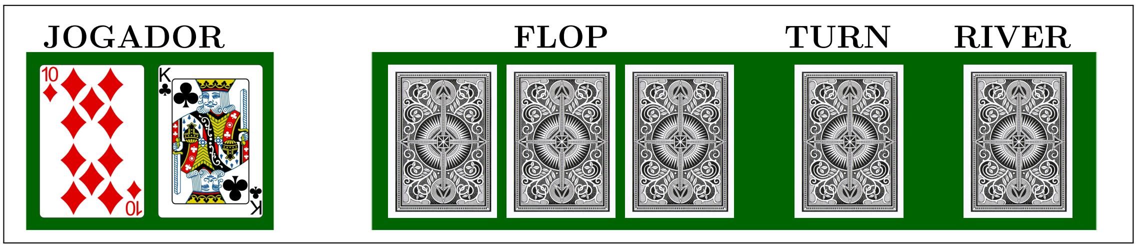


Figura 28: Probabilidade de formar full house.

Nessa situação é necessário abrir dois *reis* juntamente com um *dez* ou abrir dois *dez* com um *rei*. Também serve dois *dez* com dois *reis*. O número de possibilidades de abrir dois *reis*, um *dez* e outras duas cartas quaisquer diferentes de *dez* e *rei* é dado por $C_{3,2} \times C_{3,1} \times C_{44,2} = 3 \times 3 \times 946 = 8.514$. Analogamente, calcula-se que há 8.514 modos de abrir dois *dez*, um *rei* e outras duas cartas. O número de possibilidades de dois *dez*, dois *reis* acompanhado outra carta qualquer é $C_{3,2} \times C_{3,2} \times 44 = 396$. Assim, a probabilidade de completar um full house de *dez* e *reis* é $P = \dfrac{2 \times 8.514 + 396}{C_{50,5}} = \dfrac{17.424}{2.118.760} \approx 0,82\%$.

3.4.5 Probabilidade de formar, pelo menos, uma sequência

Nesse caso considere que um jogador inicie com um *rei* de ouros e um *ás* de espadas conforme figura 29. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar uma sequência de *dez* à *ás*, incluindo mãos superiores.

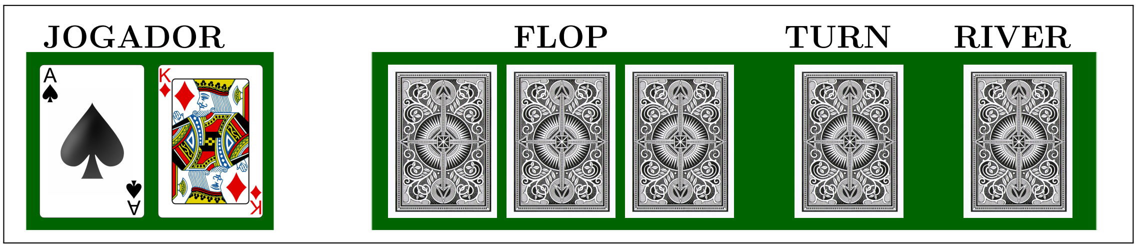


Figura 29: Probabilidade de formar, pelo menos, uma sequência.

Novamente a probabilidade que calcularemos inclui mãos superiores à sequência, desse modo, por exemplo, incluirá a possibilidade da haver 5 cartas do mesmo naipe, ou seja, um flush. Também incluirá o caso de royal straight flush. Observamos que full house ou quadra torna-se inviável, considerando que haverá uma sequência de *dez* à *ás*, e dessa forma essas mãos não estarão incluídas.

Para a formação da sequência em questão, necessitamos de um *dez*, um *valete*, uma *dama* e outras duas cartas quaisquer para formar as 5 cartas comunitárias. Há 4 possibilidades para a carta *dez*, 4 possibilidades para o *valete*, 4 para a *dama* e $C_{47,2} = 1.081$ para as duas cartas restantes. Assim, pelo princípio fundamental de contagem, temos $4 \times 4 \times 4 \times 1.081 = 69.184$ combinações de 5 cartas coletivas favoráveis à formação da sequência de *dez* à *ás*.

Portanto, a probabilidade de formar a mão descrita nesse problema é $P = \dfrac{69.184}{C_{50,5}} = \dfrac{69.184}{2.118.760} \approx 3,27\%$.

3.5 ATIVIDADE 5: Calculando a probabilidade de receber determinadas cartas

Nesse conjunto de problemas, vamos calcular a probabilidade de um jogador receber determinadas mãos iniciais (duas cartas específicas). Vejamos as mãos preferidas dos jogadores:

3.5.1 Par de ases

A melhor mão possível para iniciar uma partida de pôquer é um par de *ases* conforme exemplo apresentado pela figura 30. Qual é a probabilidade de um jogador receber essa mão?

Figura 30: Par de *ases*.

O espaço amostral para esse problema são todas as combinações de 52 cartas tomadas 2 a 2. Já o número de pares diferentes de *ases* é dado pela combinação dos 4 *ases* tomados 2 a 2. Assim a probabilidade de um jogador iniciar com um par de *ases* é $P = \dfrac{C_{4,2}}{C_{52,2}} = \dfrac{6}{1.326} = \dfrac{1}{221} \approx 0,45\%$. Ou seja, existe a expectativa de iniciar com par de *ases* em uma de 221 mãos jogadas. Essa mesma probabilidade é válida para outro par qualquer específico.

Outra resolução possível: a probabilidade da primeira carta ser um *ás* é $\dfrac{4}{52}$. Já a probabilidade da segunda carta ser outro *ás* é $\dfrac{3}{51}$. Assim a probabilidade de ambas serem *ases* é $P = \dfrac{4}{52} \times \dfrac{3}{51} = \dfrac{1}{221}$.

3.5.2 Um par qualquer

Qual é a probabilidade da mão inicial ser um par qualquer?

Nessa situação podemos pensar de dois modos. No primeiro modo, basta utilizar o resultado do problema anterior. Podemos multiplicar a probabilidade de receber um par de *ases* por 13, já que há 13 tipos de pares diferentes. Assim temos $P = 13 \times \dfrac{1}{221} = \dfrac{1}{17} \approx 5,88\%$.

Outra maneira é considerar que a primeira carta já é conhecida, ou seja, uma carta qualquer. Assim a probabilidade da segunda carta formar um par com a primeira é $P = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$.

3.5.3 Ás e rei

Qual é a probabilidade da mão inicial ser um *ás* acompanhado de um *rei* conforme exemplo apresentado pela figura 31?

Figura 31: Exemplo de um *ás* com *rei*.

Como há 4 *ases* e 4 *reis*, o número de duplas (*ás* mais *rei*) possíveis é $4 \times 4 = 16$. Assim a probabilidade de receber uma dessas duplas é $P = \frac{4 \times 4}{C_{52,2}} = \frac{16}{1.326} \approx 1,21\%$.

Uma solução alternativa: a probabilidade da primeira carta ser favorável é $\frac{8}{52}$. Consequentemente, a probabilidade da segunda carta também ser favorável é $\frac{4}{51}$, já que se a primeira foi *ás*, restam 4 *reis* favoráveis ou se a primeira foi *rei*, restam 4 *ases* favoráveis. Assim a probabilidade de iniciarmos com a dupla mencionada é $P = \frac{8}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{32}{2.652} \approx 1,21\%$.

3.5.4 Pelo menos um ás

Qual é a probabilidade de um jogador receber pelo menos um *ás*?

Primeiramente calcularemos a probabilidade de não receber nenhum *ás*. A probabilidade da primeira carta não ser *ás* é $\frac{48}{52}$ e a probabilidade da segunda carta também ser uma carta diferente de *ás* é $\frac{47}{51}$. Assim a probabilidade de ambas serem diferentes de *ás* é $P = \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} = \frac{188}{221}$.

Usando probabilidade complementar, a probabilidade de receber pelo menos um *ás* é $P = 1 - \frac{188}{221} = \frac{33}{221} \approx 14,93\%$.

3.5.5 Duas cartas do mesmo naipe

Qual é a probabilidade da mão inicial ser duas cartas do mesmo naipe conforme a ilustração apresentada pela figura 32?

Figura 32: Exemplo para duas cartas do mesmo naipe.

Considerando que o espaço amostral são todas combinações de 52 cartas tomadas 2 a 2. Os casos favoráveis são dados por todas combinações das 13 cartas de ouros tomadas 2 a 2, multiplicado por 4 naipes possíveis. Assim a probabilidade é $P = \dfrac{4 \times C_{13,2}}{C_{52,2}} = \dfrac{4 \times 78}{1.326} = \dfrac{4}{17} \approx 23,53\%$.

Também é possível considerar o seguinte raciocínio. Considere que a primeira carta já é conhecida, ou seja, sabemos o naipe. Assim para a probabilidade da segunda carta ser do mesmo naipe é $P = \dfrac{12}{51} = \dfrac{4}{17}$.

3.5.6 Duas cartas em sequência do mesmo naipe

Qual é a probabilidade de receber duas cartas em sequência do mesmo naipe?

Considerando um naipe específico, há 13 duplas de sequência possíveis (*ás* e *dois*; *dois* e *três*; ...; *dama* e *rei*; *rei* e *ás*). Como há 4 naipes, há $4 \times 13 = 52$ casos favoráveis ao problema proposto. Assim a probabilidade de receber duas cartas em sequência do mesmo naipe é $P = \dfrac{4 \times 13}{C_{52,2}} = \dfrac{52}{1.326} = \dfrac{2}{51} \approx 3,92\%$.

Também podemos pensar que recebida uma carta qualquer, há duas possibilidades da segunda carta ser do mesmo naipe e em sequência com a primeira, já que pode ser antecessora ou sucessora à primeira. Assim a probabilidade é $P = \dfrac{2}{51}$, coincidindo com o primeiro raciocínio.

3.5.7 Duas figuras

No baralho, uma carta é chamada de *FIGURA* quando essa carta é *valete*, *dama*, *rei* ou *ás*. Qual é a probabilidade de iniciar com duas figuras no pôquer?

Nesse problema, o número de casos favoráveis é dado pelas combinações das 16 figuras tomadas 2 a 2. Assim a probabilidade desejada é $P = \dfrac{C_{16,2}}{C_{52,2}} = \dfrac{120}{1.326} = \dfrac{20}{221} \approx 9,05\%$.

3.5.8 Par ou duas figuras

Qual é a probabilidade de receber um par ou duas figuras?

A probabilidade de receber um par ou duas figuras é igual a soma da probabilidade de receber um par com a probabilidade de receber duas figuras descontado da probabilidade de receber um par formado de figuras. Assim, utilizando os resultados 5.2 e 5.7, temos $P = \dfrac{13 \times C_{4,2}}{C_{52,2}} + \dfrac{C_{16,2}}{C_{52,2}} - \dfrac{4 \times C_{4,2}}{C_{52,2}} = \dfrac{78}{1.326} + \dfrac{120}{1.326} - \dfrac{24}{1.326} = \dfrac{174}{1.326} \approx 13,12\%$.

3.6 ATIVIDADE 6: Calculando a probabilidade de cada jogador

Nesse conjunto de problemas analisaremos a mão de mais de um jogador. A partir de algumas situações do jogo, calcularemos a probabilidade de vitória para cada jogador envolvido na partida.

Analisaremos somente as situações em que falta apenas o river ser descoberto, pois as demais situações aumentariam excessivamente as combinações possíveis e assim fugiria do objetivo desse trabalho.

Nesses problemas chamaremos os jogadores de Alfa, Beta, Gama e Delta.

3.6.1 Uma disputa entre dois jogadores

Considere uma partida disputada pelos jogadores Alfa e Beta, faltando a abertura do river, conforme figura 33. Qual é a probabilidade de vitória para cada jogador?

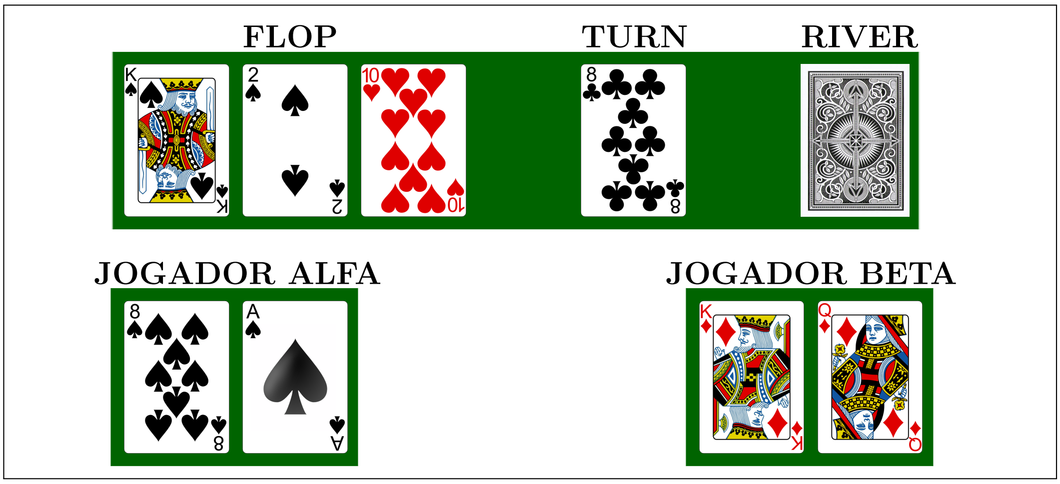


Figura 33: Qual é a probabilidade de vitória de Alfa e de Beta?

No momento da abertura do turn, cada jogador tem um par, porém Beta está vencendo pelos critérios de desempate porque tem o maior par. As possibilidades de vitória de Alfa baseiam-se em completar um segundo par (par de *ases*), uma trinca de *oitos* ou completar o flush de espadas. Assim Alfa precisa de um *ás* ou um *oito* ou uma carta do naipe de espadas no river para vencer. Quaisquer cartas diferentes dessas, são favoráveis à Beta.

Como ainda há três *ases*, dois *oitos* e 9 cartas do naipe de espadas entre as 44 restantes, a probabilidade de vitória de Alfa é $P = \dfrac{14}{44} = \dfrac{7}{22} \approx 31,82\%$. Consequentemente, a probabilidade de Beta vencer é $P = \dfrac{30}{44} = \dfrac{15}{22} \approx 68,18\%$.

3.6.2 Outra disputa entre dois jogadores

Vamos calcular a probabilidade de vitória para cada jogador ilustrado na figura 34.

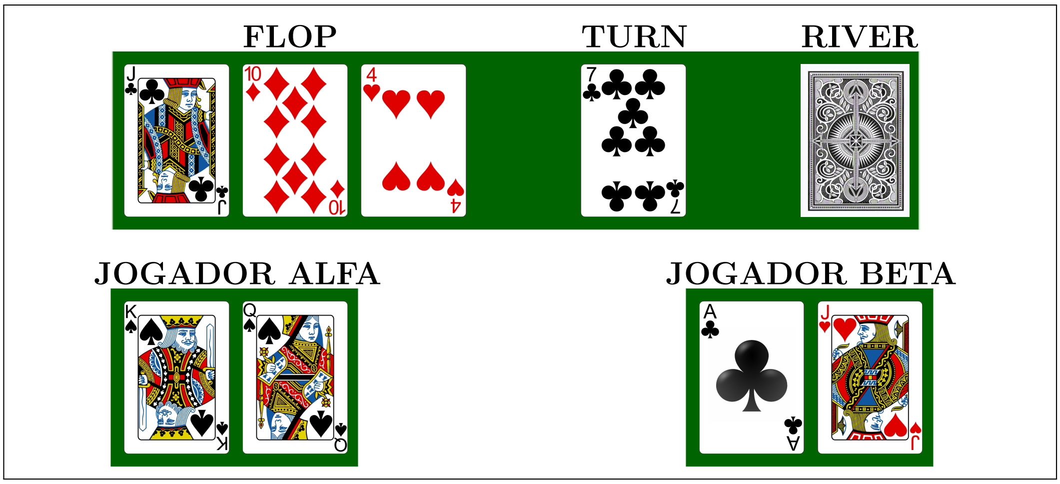


Figura 34: E agora, qual é a probabilidade de vitória de Alfa e de Beta?

Nesse momento o jogador Beta está vencendo porque tem um par de *valetes*. Para Alfa vencer é necessário abrir uma *dama* ou um *rei* para superar Beta com maior par. Também existe a possibilidade de Alfa formar uma sequência, se abrir um *nove* ou um *ás*. Entre as 44 cartas restantes há 3 *damas*, 3 *reis*, 4 *noves* e 3 *ases* que favorecem o jogo de Alfa. Demais cartas são úteis para Beta.

Assim a probabilidade de Alfa vencer é $P = \dfrac{13}{44} \approx 29,55\%$. Utilizando probabilidade complementar, Beta tem $P = \dfrac{31}{44} \approx 70,45\%$ de chance de vencer.

3.6.3 Uma disputa entre três jogadores

Vamos calcular a probabilidade de vitória para Alfa, Beta e Gama na seguinte partida de pôquer ilustrada na figura 35.

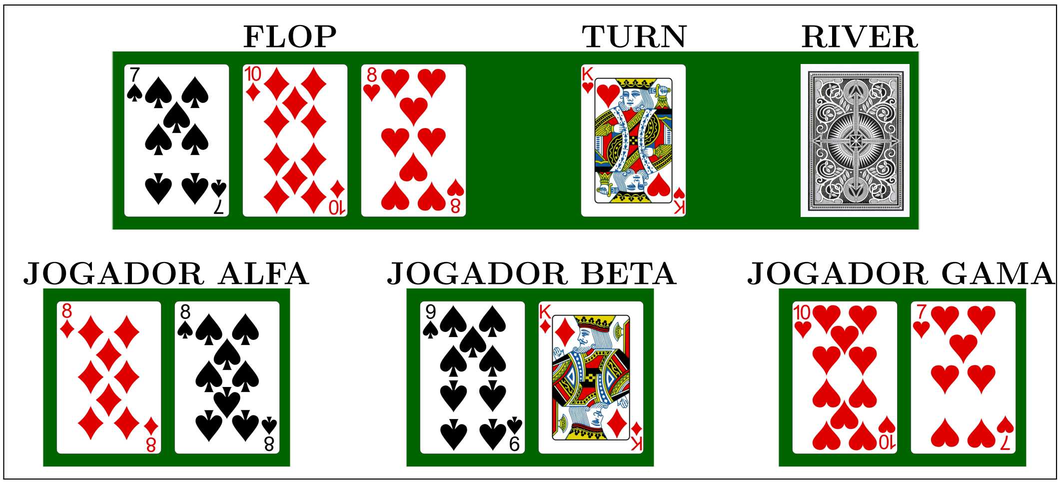


Figura 35: Qual é a probabilidade de vitória de Alfa, de Beta e de Gama?

Nesse momento Alfa está vencendo com uma trinca. Beta tem apenas um par, mas tem um projeto de sequência. Já Gama, tem dois pares e tem a possibilidade de completar um flush ou um full house.

Beta necessita um *seis* ou *valete* para completar a sequência, porém não pode ser do naipe de copas, pois dessa forma Gama completaria seu flush, que vence a sequência. Com um *rei*, Beta completaria trinca, mas também não serve, porque assim Alfa completaria full house. Portanto, Beta tem 3 *seis* e 3 *valetes* que são favoráveis entre as 42 cartas restantes. Portanto a probabilidade de Beta vencer é $P = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \approx 14,29\%$.

Gama pode vencer com flush de copas ou full house formado por uma trinca de *dez* mais um par de *setes*. Se abrir um *sete* ou *dez* no river, Alfa e Gama completariam full house. Um *sete* favorece Alfa porque, pelos critérios de desempate do full house, a trinca de Alfa é maior do que a trinca de *setes* de Gama. Já um *dez* favorece Gama, pois forma um full house com trinca de *dez* e par de *setes*. Portanto Gama tem 9 cartas de copas e dois *dez* que o favorecem a vencer. Dessa forma a probabilidade de Gama vencer é $P = \frac{11}{42} \approx 26,19\%$.

O restante das cartas são favoráveis à Alfa, ou seja, 25 das 42 cartas restantes. Dessa forma a probabilidade de Alfa vencer é $P = \frac{25}{42} \approx 59,52\%$.

3.6.4 Outra disputa entre três jogadores

Vamos calcular a probabilidade de vitória para Alfa, Beta e Gama na seguinte partida de pôquer ilustrada na figura 36.

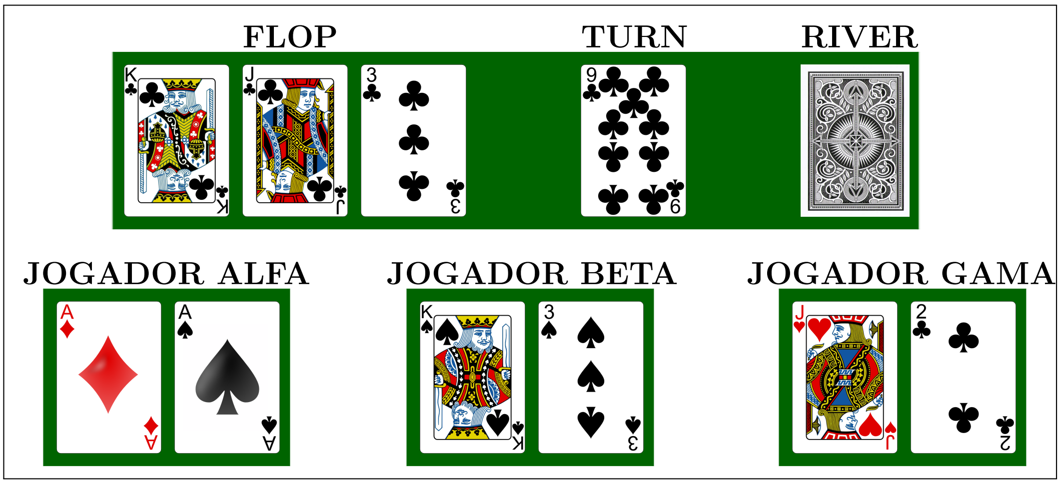


Figura 36: E agora, qual é a probabilidade de Alfa, de Beta e de Gama?

Nessa jogada Gama está vencendo com flush do naipe de paus. Enquanto que Beta tem dois pares, mas tem a possibilidade de completar flush, se abrir mais uma carta de paus, ou full house, se abrir mais um *três* ou um *rei*. Alfa tem a possibilidade de completar o flush de paus.

Se tiver uma carta do naipe de paus no river, os três jogadores fazem flush e acabam empatando até nos critérios de desempate porque o *dois* de paus do jogador Gama não é usado, já que Gama utiliza as 5 maiores cartas de paus, que seriam exatamente as cartas comunitárias. Nesse caso, o pote de fichas é dividido igualmente entre os três concorrentes na partida. Como ainda há 8 cartas de paus, a probabilidade da partida terminar triplamente empatada é $P = \dfrac{8}{42} = \dfrac{4}{21} \approx 19,05\%$.

Além do empate ser favorável, o resultado ideal à Beta é completar full house. Para isso, Beta aguarda uma das duas cartas *três* ou um dos dois *reis* restantes. Dessa forma, a probabilidade desse evento ocorrer é $P = \dfrac{4}{42} = \dfrac{2}{21} \approx 9,52\%$.

Alfa não tem nenhuma chance de ganhar o pote de fichas sozinho, somente o empate lhe é favorável.

Demais resultados são favoráveis à Gama. Como há 8 cartas que geram empate e 4 cartas úteis à Beta, sobram 30 cartas que interessam para Gama vencer sem precisar dividir o pote de fichas. Dessa forma, a probabilidade de Gama vencer sozinho a partida é $P = \dfrac{30}{42} = \dfrac{5}{7} \approx 71,43\%$.

3.6.5 Uma disputa entre quatro jogadores

Nessa situação, consideraremos quatro jogadores (Alfa, Beta, Gama e Delta) na disputa. Baseado na figura 37, calcularemos a probabilidade de vitória de cada jogador.

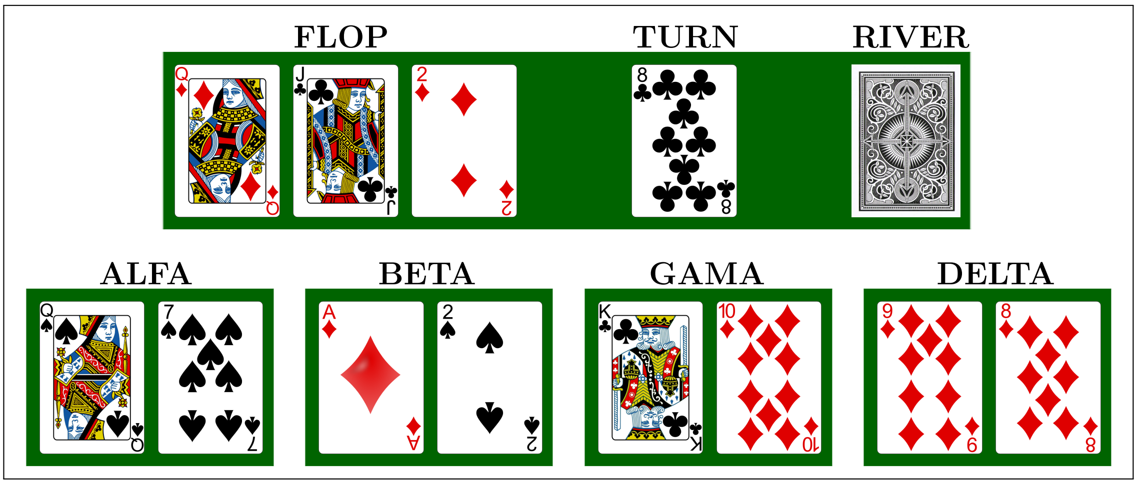


Figura 37: Qual é a probabilidade de vitória de cada jogador?

Alfa, Beta e Delta tem um par cada. Pelos critérios de desempate, Alfa está vencendo no momento.

Beta depende exclusivamente de um *dois* para formar trinca e vencer a mão. A carta *ás* não serve porque Gama completaria uma sequência. Como há duas cartas favoráveis entre as 40 restantes, a probabilidade de Beta ganhar é $P = \dfrac{2}{40} = \dfrac{1}{20} = 5\%$.

Gama formará uma sequência se o river for *nove* ou *ás*. Ainda há 3 cartas de cada valor no baralho. Um *rei*, diferente do naipe de ouros, também serve, pois dessa forma venceria com o maior par. Existem dois *reis* no baralho que são favoráveis. Portanto a probabilidade de vitória de Gama é $P = \dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5} = 20\%$.

Delta está na expectativa de três mãos. Completar uma trinca de *oitos*, formar uma sequência de *oito* à *dama* ou fazer um flush de ouros. Entre as 40 cartas restantes, há dois *oitos*, três *dez* para a sequência e 7 cartas do naipe de ouros para o flush. Assim, a probabilidade de Delta levar o pote de fichas é $\dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10} = 30\%$.

Demais cartas são favoráveis à Alfa. Portanto a probabilidade de Alfa vencer é $P = \dfrac{18}{40} = \dfrac{9}{20} = 45\%$.

4 Possíveis continuações ou desdobramentos

As atividades de matemática apresentadas nesse trabalho possibilitam o desenvolvimento de estudos interdisciplinares com outras áreas do conhecimento, como sociologia, educação física e língua estrangeira (inglês).

Na disciplina de sociologia poderia ser promovido um debate entre os alunos da turma, em relação à prática de jogos de carteado ou jogos dessa natureza. Poderia-se dividir a turma em dois grupos. Um grupo seria responsável pela argumentação das qualidades, vantagens e da defesa à utilização desse tipo de jogo. Enquanto que o outro grupo, elaboraria um conjunto de argumentos e questionamentos contrários à prática dos jogos de cartas. Entre os jogos envolvidos nessa discussão, daria-se ênfase à prática do pôquer.

Nessa proposta de sociologia, o professor assumiria o papel de mediador do debate, complementando e instigando a consciência dos alunos quanto aos benefícios de jogos que utilizam estratégia e raciocínios lógicos. Também cabe ao professor não omitir do debate o alerta dos possíveis riscos associados ao mundo dos jogos. Riscos como ser um viciado na prática de jogos ou ser um apostador compulsivo, a ponto de comprometer as finanças pessoais.

A disciplina de educação física poderia contribuir com o estudo ou coordenar uma pesquisa entre os alunos sobre os chamados esportes mentais ou esportes da mente. Nessa tarefa, os principais esportes dessa modalidade, como xadrez, damas e pôquer seriam caracterizados.

Quanto à interdisciplinaridade com a língua inglesa, poderia-se realizar um trabalho baseado nas expressões em inglês utilizadas no pôquer. Como o Texas Hold'em teve origem nos Estados Unidos, todas nomenclaturas originais são da língua inglesa. No Brasil, a tradução para o português de muitos desses termos não é usual, desse modo continuam sendo empregados na língua original. Há diversos sites de pôquer na internet que auxiliarão na elaboração e execução desse trabalho, ver (FULLTILTPOKER, 2014).

As atividades de probabilidades também podem ser adaptadas. Algumas pessoas costumam jogar pôquer utilizando uma quantidade reduzida de cartas. Por exemplo, retiram-se as cartas *dois*, *três*, *quatro*, *cinco* e *seis*, e dessa forma restam 32 cartas. Assim, podem-se construir novos problemas, como explorar o ranking de mãos e constatar que há mais combinações de full house do que de flush. Assim, invertem-se as forças dessas duas mãos em relação ao jogo tradicional de 52 cartas.

5 Considerações finais

A teoria de probabilidades é aplicada em diversas áreas, porém percebemos que a maioria das atividades presentes nos livros didáticos de matemática exploram situações como lançamento de dados ou moedas ou ainda a extração de cartas do baralho. Também é frequente, nas atividades propostas, a presença de problemas que falam da retirada de bolas de determinadas cores de uma urna, além de situações envolvendo sorteio de números, pessoas ou objetos. Acreditamos que esses problemas têm espaço nas aulas de probabilidade, porém não são situações concretas do dia a dia.

Pensando em aperfeiçoar as atividades de ensino-aprendizagem de probabilidades, buscamos construir uma proposta de intervenção pedagógica com o objetivo de conquistar a participação dos alunos, o interesse pelos cálculos de probabilidade e o gosto para estudar matemática. Nesse trabalho abordamos uma série de situações em diversos momentos do jogo de pôquer. Todos esses casos podem ser utilizados como situações-problema nas aulas de matemática, em particular, para o ensino de combinatória e probabilidade. Não tivemos a oportunidade de aplicar as atividades em sala de aula, mas acreditamos que essa proposta pedagógica tenha boa aceitação por parte dos alunos, pois conforme Silva (2004)

> ensinar por meio de jogos é um caminho para o educador desenvolver aulas mais interessantes, descontraídas e dinâmicas, podendo competir em igualdade de condições com os inúmeros recursos a que o aluno tem acesso fora da escola, despertando ou estimulando sua vontade de frequentar com assiduidade a sala de aula e incentivando seu envolvimento nas atividades, sendo agente no processo de ensino e aprendizagem, já que aprende e se diverte, simultaneamente.

Nos livros (LIMA et al., 2006) e (MORGADO et al., 2006) encontramos problemas de contagem que abordam a extração de 5 cartas de um baralho para formação de mãos de pôquer. No entanto, até onde conhecemos, as situações apresentadas aqui, nas quais exploramos diferentes momentos de partidas do Texas Hold'em, são novidades na matemática do ensino médio.

O pôquer é um tema que desperta a curiosidade e o interesse das pessoas, já que o número de praticantes cresce a cada dia. No entanto, a ideia desse trabalho não é fomentar a criação de clubes de pôquer nas escolas, nem tem a intenção de montar mesas de carteado dentro da sala de aula. Um dos objetivos foi iniciar um debate da presença e a importância da matemática nesse esporte que tem notável propagação mundial.

Durante esse trabalho associamos o jogo à resolução de problemas. Pensamos que a resolução de problemas é uma metodologia indispensável para o ensino da matemática de qualidade. No momento que desenvolvemos o ensino baseado na resolução de problemas, com aplicações dos conteúdos estudados, estamos valorizando a importância da matemática no contexto sócio-cultural, estamos motivando os alunos para o estudo e, simultaneamente, estamos preparando os educandos para a cidadania.

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (BRASIL, 1998)

Desse modo, as atividade pedagógicas propostas nesse trabalho são baseadas em metodologias que estão amparadas por diversas diretrizes do ensino da matemática. Também pensamos que a nossa busca por alternativa didáticas que substituem metodologia tradicionais e desestimulantes por um estudo mais atraente, que desafia os educandos através da resolução de problemas, são indícios de que estamos conduzindo a matemática na direção de um ensino mais significativo e eficiente.

Referências

ALON, N. *Poker, chance and skill*. 2010. Disponível em: <http://www.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/skill4.pdf>. Acesso em: 13 de março de 2014. Citado na página 17.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries)*. Brasília, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 60.

BRASIL. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, 2002. Citado na página 19.

CBX. *Xadrez escolar*. 2003. Disponível em: <http://www.cbx.org.br/Home.aspx>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2014. Citado na página 16.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática, 2002. Citado na página 15.

ESPORTE, B. Ministério do. *Pôquer no Ministério do Esporte*. 2014. Disponível em: <http://portal.esporte.gov.br/cen/detalhesEntidades.do?idEntidade=74>. Acesso em: 18 de fevereiro de 2014. Citado na página 16.

ESPORTE, P. . *Poquêr reconhecido como esporte da mente*. 2010. Disponível em: <http://www.pokereesporte.com/>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2014. Citado na página 20.

FULLTILTPOKER. *Glossário do pôquer*. 2014. Disponível em: <http://www.fulltiltpoker.com/pt/poker/glossary>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2014. Citado na página 57.

GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2000. Citado na página 18.

HOLD'EM, C. B. de T. *Pôquer é um esporte*. 2014. Disponível em: <http://www.cbth.org.br/cbth/Pagina.do>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2014. Citado na página 16.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*. 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 59.

LOES, J. *Pôquer na sala de aula*. 2013. Disponível em: <http://www.istoe.com.br/reportagens/321828_POQUER+NA+SALA+DE+AULA>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2014. Citado na página 17.

MCCULLOCH, S.; HOPE, P. *Statistical Analysis of Texas Hold'Em*. 2009. Disponível em: <http://www.pokereesporte.com/cig.pdf>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2014. Citado na página 21.

MESTRE, N. *A onda do pôquer no Brasil*. 2013. Disponível em: <http://www.istoe.com.br/reportagens/315043_A+ONDA+DO+POQUER+NO+BRASIL>. Acesso em: 06 de abril de 2014. Citado na página 20.

MOLINA, R. *Laudo pericial atestando que pôquer é um jogo de habilidade*. 2006. Disponível em: <http://www.cbth.org.br/cbth/public/files/DrRicardoMolina.pdf>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2014. Citado na página 17.

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 9ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 59.

POKERSTARS. *Valores das Mãos de Pôquer*. 2014. Disponível em: <http://www.pokerstars.com/br/poker/games/rules/hand-rankings/>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2014. Citado na página 21.

RODRIGUES, F. W. O jogo do pôquer e o cálculo de probabilidades. *Revista do Professor de Matemática nº 6*, SBM, Brasília, 1985. Citado na página 16.

SILVA, M. S. da. *Clube de matemática: Jogos educativos*. Campinas: Papirus, 2004. Citado na página 59.

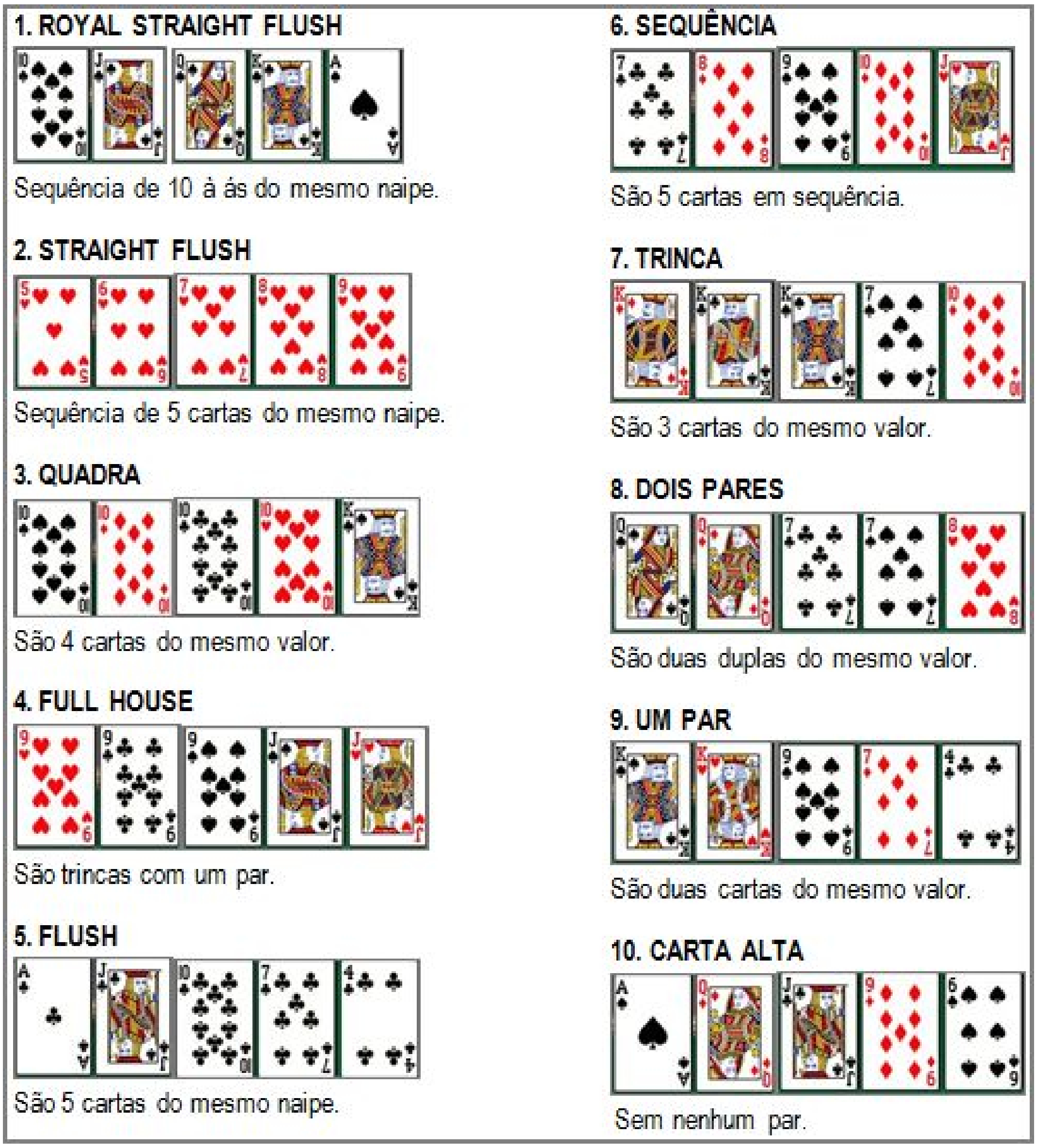
TOREZZAN, C. *Fundamentos do Pôquer*. 2013. Disponível em: <http://www.istoe.com.br/reportagens/321828_POQUER+NA+SALA+DE+AULA>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2014. Citado na página 16.

UOL. *Pôquer é oficializado como esporte*. 2010. Disponível em: <http://esporte.uol.com.br/ultimas-noticias/2010/04/30/poquer-e-reconhecido-como-esporte-mental-e-fica-com-mesmo-status-do-xadrez.jhtm>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2014. Citado na página 16.

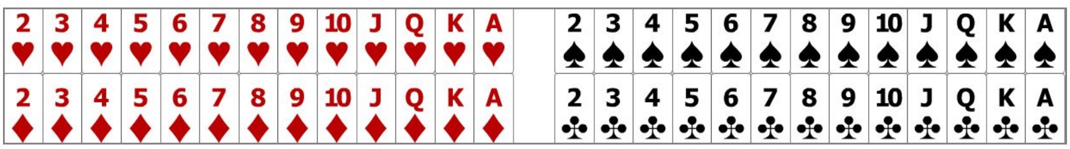
Anexos

ANEXO A – Ranking das mãos de pôquer e composição do baralho

O ranking das mãos em ordem decrescente de força:



Um baralho de 52 cartas é composto por 4 naipes (copas, ouros, espadas e paus). Cada naipe tem 13 cartas, 2 a 10, J (*valete*), Q (*dama*), K (*rei*) e A (*ás*) conforme figura:

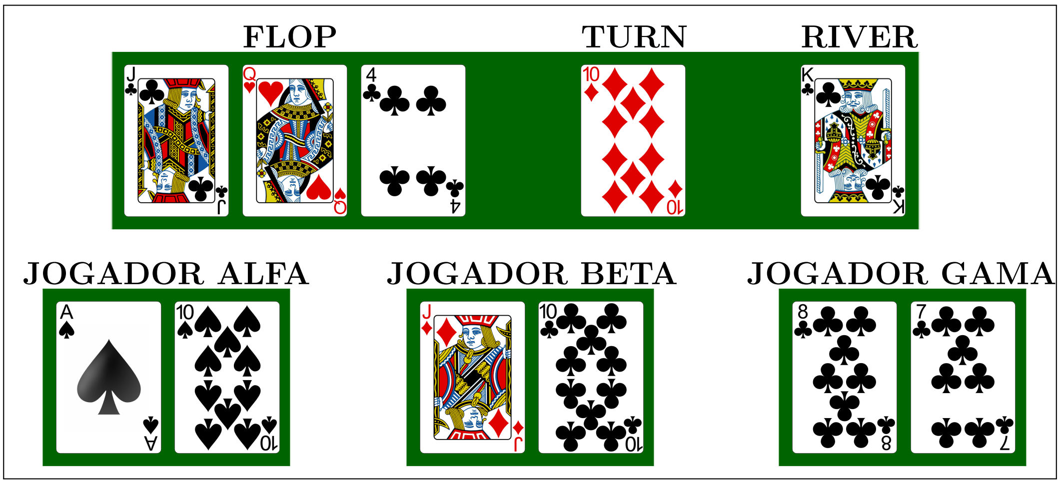


ANEXO B – Atividades propostas para aplicação em sala de aula

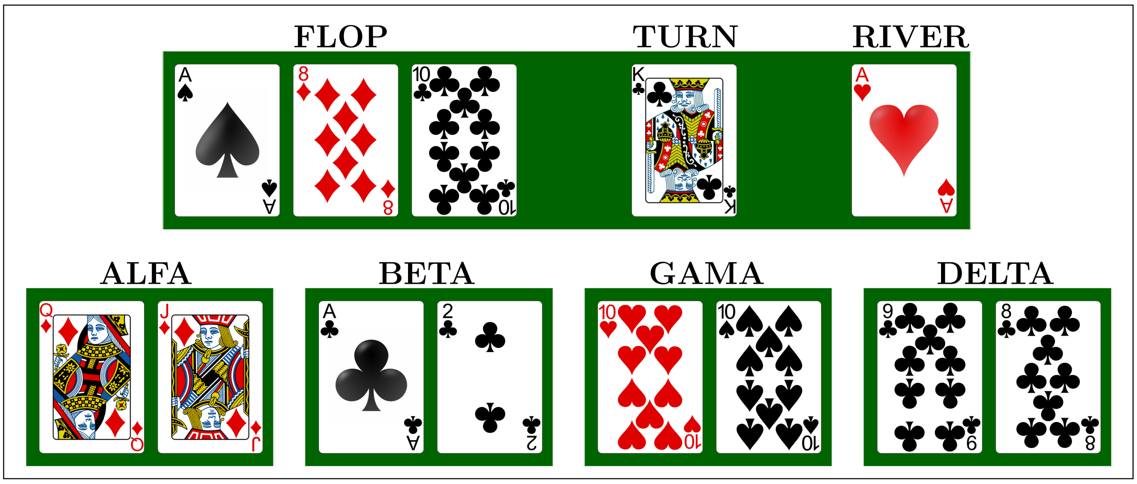
1. Sabendo que uma mão de pôquer é formada por um conjunto de 5 cartas, calcule o total de quadras que podem ser formadas com um baralho tradicional de 52 cartas.

2. Considerando um baralho tradicional, calcule o total de combinações de 5 cartas que representam full house.

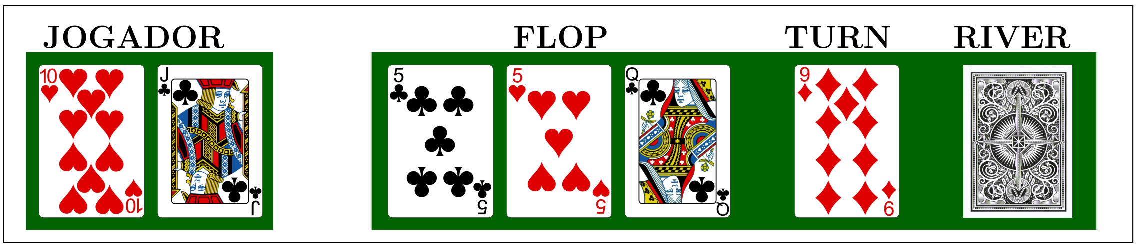
3. No pôquer Texas Hold'em, a mão de um jogador é formada pela melhor combinação de 5 cartas escolhidas a partir das suas duas cartas juntamente com as 5 cartas comunitárias (flop + turn + river). Determine o jogador (Alfa, Beta ou Gama) com a melhor mão. Justifique.



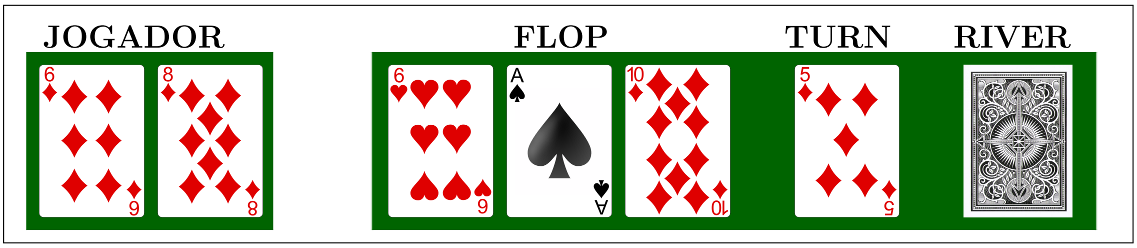
4. Considere uma nova partida de pôquer Texas Hold'em. Qual é a mão de cada jogador (Alfa, Beta, Gama e Delta) e quem tem a melhor mão?



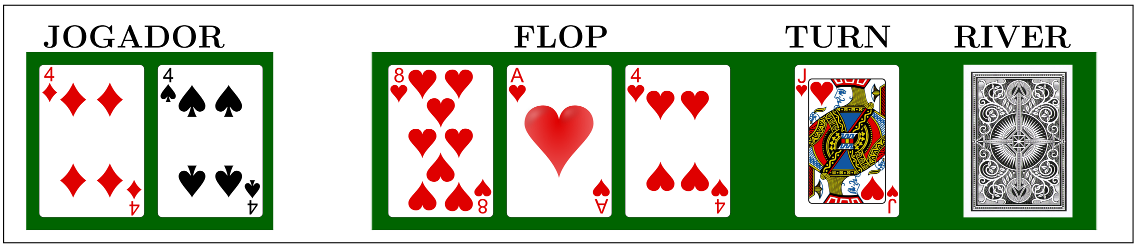
5. Considere que um jogador tenha *dez* de copas e *valete* de paus. No flop apareceu *cinco* de paus e copas e a *dama* de paus, enquanto que o turn é *nove* de ouros (conforme figura). Calcule a probabilidade, na forma percentual, desse jogador formar uma sequência.



6. Agora considere que um jogador tenha um *seis* e um *oito* de ouros. No flop temos *seis* de copas, *ás* de espadas e *dez* de ouros, além de *cinco* de ouros no turn. Determine a probabilidade, na forma percentual, desse jogador formar um flush.



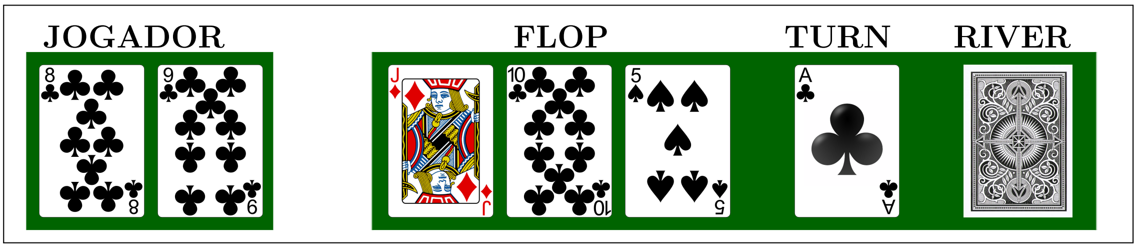
7. Considere uma partida tal que um jogador receba um par de *quatros* na mão acompanhado das cartas comunitárias, conforme figura. Calcule a probabilidade, em porcentagem, desse jogador completar um full house.



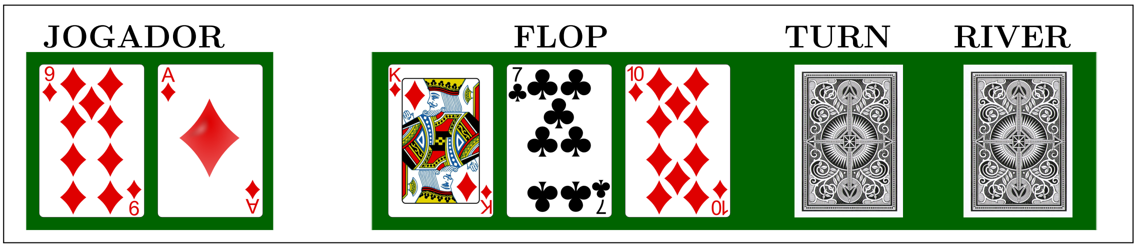
8. No pôquer Texas Hold'em, cada jogador recebe apenas duas cartas. Qual é a probabilidade de um jogador iniciar com um par qualquer?

Exemplo de um par.

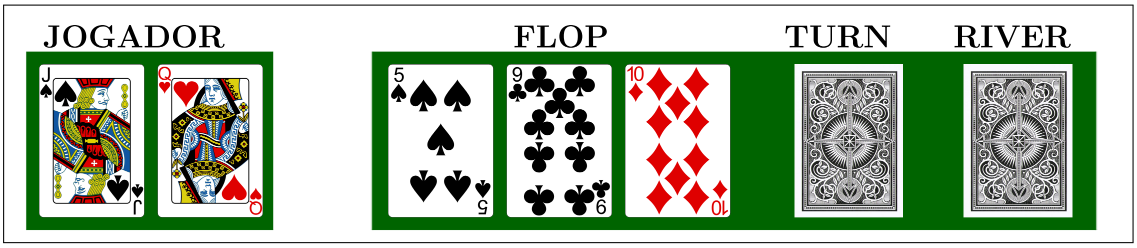
9. Um jogador está na expectativa de formar uma sequência ou um flush, conforme figura. Calcule a probabilidade, em porcentagem, de um desses dois eventos ocorrer.



10. Considere que um jogador tenha um *nove* e um *ás* de ouros. No flop aparece *dez* e *rei* de ouros junto com *sete* de paus. Determine a probabilidade, na forma percentual, desse jogador completar um flush.



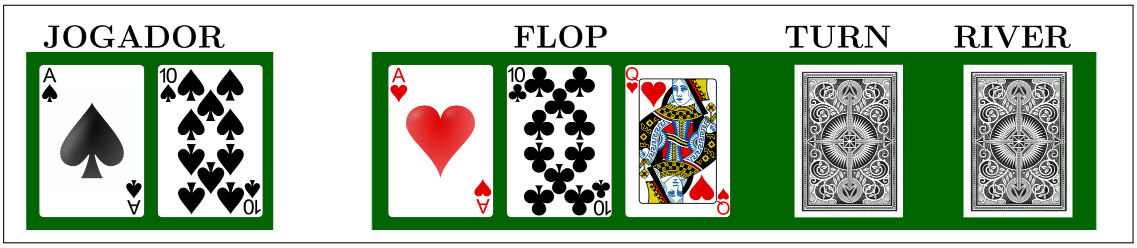
11. Agora considere que um jogador tenha um *valete* de espadas e uma *dama* de copas. No flop aparece *cinco* de espadas, *nove* de paus e *dez* de ouros. Qual é a probabilidade, em porcentagem, desse jogador formar uma sequência?



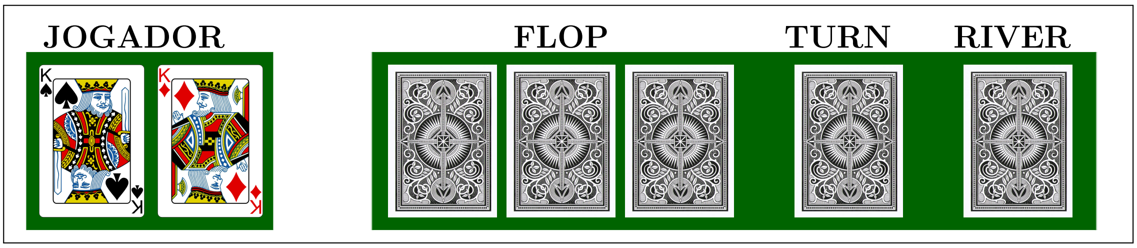
12. Qual é a probabilidade da mão inicial ser duas cartas do mesmo naipe?

Exemplo para duas cartas do mesmo naipe.

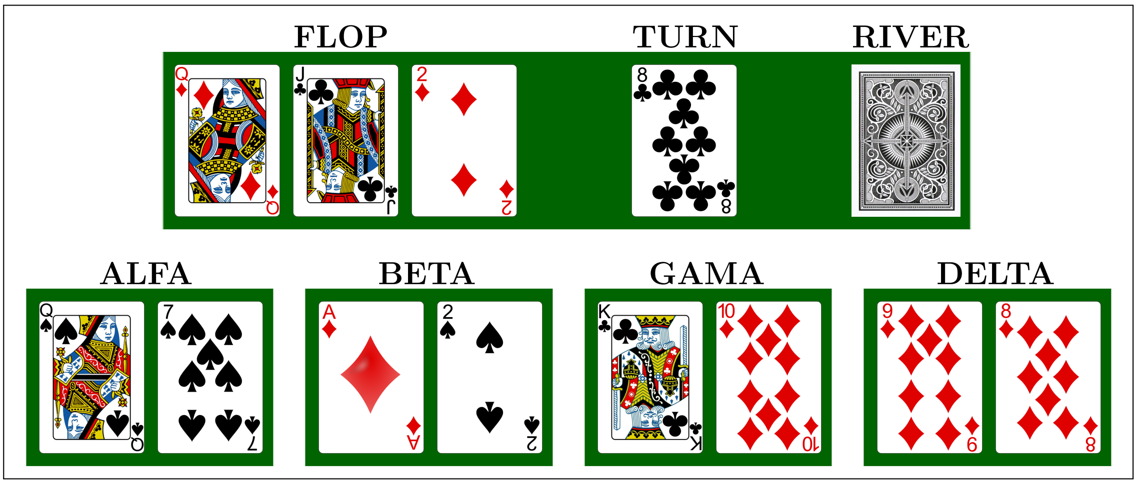
13. Um jogador já possui dois pares. Calcule a probabilidade desse jogador fazer, pelo menos, um full house.



14. Considere que um jogador inicie com um par de *reis*. Determine a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, a trinca de *reis*.



15. Agora há quatro jogadores na disputa: Alfa, Beta, Gama e Delta. Calcule a probabilidade, em porcentagem, de vitória para cada um deles baseado nas cartas da figura.



CRITÉRIO DE DESEMPATE: quando dois jogadores possuem a mesma mão, vence quem formar a mão com as cartas mais altas. Por exemplo, se dois jogadores possuem um par, vence quem possuir o maior par.

ANEXO C – Gabarito das atividades

1. Quadra são 4 cartas com o mesmo valor acompanhado de outra carta qualquer. São 13 os valores possíveis numa quadra. A quinta carta da mão é qualquer uma entre as 48 cartas restantes. Portanto, pelo princípio fundamental de contagem, existem $13 \times 48 = 624$ quadras diferentes.

2. Essa mão é constituída por uma trinca e um par. A trinca é formada a partir de 3 de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor, ou seja, $C_{4,3} = 4$ trincas possíveis de um conjunto de 13 valores diferentes possíveis. Extraindo a trinca, restam 12 valores para o par. O par é formado a partir de uma dupla de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor, ou seja, $C_{4,2} = 6$ pares possíveis para cada um dos 12 valores restantes. Portanto há $13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3.744$ maneiras de formar um full house.

3. Alfa tem uma sequência de *dez* a *ás*. Beta possui dois pares, um par de *dez* e outro de *valetes*. E Gama tem um flush de paus. Portanto, pelo ranking de mãos, Gama possui a melhor mão.

4. Nessa jogada Alfa tem uma sequência de *dez* à *ás*. Beta possui uma trinca de *ases*. Gama possui um full house formado por trinca de *dez* e par de *ases*. E Delta tem dois pares, de *dez* e *ases*. Dessa forma Gama possui a melhor mão.

5. O jogador depende de um *oito* ou um *rei* para fechar uma sequência. Conhecemos 6 das 52 cartas do baralho. Assim restam 46 possibilidade para o river. Como há 4 *oitos* e 4 *reis*, concluímos que a probabilidade desse jogador formar uma sequência é $\frac{8}{46}$ ou $\frac{4}{23}$, que representa aproximadamente 17,39%.

6. As duas cartas de ouros mais as duas cartas comunitárias de ouros formam um flush draw (projeto de flush). Para completar esse projeto é preciso mais uma carta de ouros. Ao todo, há 13 cartas de ouros no baralho. Assim ainda existem 9 ouros dentre as 46 cartas restantes. Dessa forma a probabilidade de sair ouros no river é $\frac{9}{46}$, ou seja, aproximadamente 19,57%.

7. Para o jogador que possui a trinca formar um full house precisa de mais um par. Isso acontece se o river for um *oito*, um *valete* ou um *ás*. Entre as 46 cartas restantes, ainda há 3 *oitos*, 3 *valetes* e 3 *ases*. Assim, a probabilidade do jogador completar um full house é $\frac{9}{46} \approx 19,57\%$.

8. Consideramos que a primeira carta já é conhecida, ou seja, uma carta qualquer. Assim, há 3 cartas entre as 51 restantes, tal que formam par com a primeira. Desse modo a probabilidade de iniciar com um par é $P = \frac{3}{51} = \frac{1}{17} \approx 5,88\%$.

9. Para completar a sequência é necessário um *sete* ou uma *dama*. Para o flush, é preciso mais uma carta de paus. Entre as 46 cartas restantes, há 4 *setes*, 4 *damas* e 9 cartas de paus. Como há um *sete* de paus e uma *dama* de paus, são 15 cartas favoráveis à sequência ou ao flush. Assim a probabilidade de completar sequência ou flush é $\dfrac{8+9-2}{46} = \dfrac{15}{46}$, ou seja, 32,61%.

10. Nesse caso o espaço amostral é formado pelas combinações das 47 cartas restantes tomadas 2 a 2. Assim o número de elementos do espaço amostral é $C_{47,2} = \dfrac{47!}{2! \times 45!} = \dfrac{47 \times 46}{2} = 1.081$, ou seja, há 1.081 casos possíveis. Para determinar os casos favoráveis, observe que, entre as cartas restantes, há 9 cartas do naipe de ouros e 38 cartas dos demais naipes. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $9 \times 38 = 342$ possibilidades de sair exatamente uma carta de ouro entre as duas cartas fechadas. Também existe a possibilidade do turn e do river serem de ouros. Desse modo há mais $C_{9,2} = 36$ possibilidades, totalizando $342 + 36 = 378$ casos favoráveis a formação de um flush, incluindo um royal straight flush. Dessa forma, a probabilidade da formação de um flush é $P = \dfrac{9 \times 38 + C_{9,2}}{C_{47,2}} = \dfrac{378}{1.081} \approx 34,97\%$.

11. Para formar uma sequência é necessário que apareça um *oito* ou um *rei* no turn ou no river. O total de combinações possíveis para o turn mais o river é $C_{47,2} = 1.081$. Dessas combinações é favorável o caso em que há pelo menos um *oito* ou pelo menos um *rei*. Nas 47 cartas restantes há 4 *oitos*, 4 *reis* e outras 39 cartas. Aplicando o princípio fundamental da contagem, há $8 \times 39 = 312$ possibilidades de sair apenas uma das cartas favoráveis. Também podem abrir duas cartas favoráveis à sequência, ou seja, mais $C_{8,2} = 28$ casos favoráveis. Portanto, a probabilidade de completar uma sequência é $P = \dfrac{8 \times 39 + C_{8,2}}{C_{47,2}} = \dfrac{340}{1.081} \approx 31,45\%$.

12. Considerando que o espaço amostral são todas combinações de 52 cartas tomadas 2 a 2. Os casos favoráveis são dados por todas combinações das 13 cartas de um naipe tomadas 2 a 2, multiplicado por 4 naipes possíveis. Assim a probabilidade é $P = \dfrac{4 \times C_{13,2}}{C_{52,2}} = \dfrac{4 \times 78}{1.326} = \dfrac{4}{17} \approx 23,53\%$.

13. Esse jogador depende de pelo menos um *dez* ou um *ás*. Há $C_{4,2} = 6$ possibilidades das duas cartas serem úteis, pois ainda há dois *dez* e dois *ases*. Outro caminho é abrir uma das 4 cartas favoráveis acompanhado de outra carta qualquer, ou seja, $4 \times 43 = 172$ possibilidades. Duas *damas* também resultam em full house. Assim há $C_{3,2} = 3$ combinações de abrir duas *damas*. Portanto a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, um full house é $P = \dfrac{6 + 172 + 3}{C_{47,2}} = \dfrac{181}{1.081} \approx 16,74\%$.

    Destacamos que o termo "pelo menos" foi utilizado porque entre os 181 casos favoráveis contabilizados, há duas mãos que representam quadras. Assim também temos a informação que a probabilidade do jogador formar uma quadra é $P = \dfrac{2}{1.081} \approx 0,19\%$.

14. Desconsiderando a ordem que as cartas coletivas são abertas, o espaço amostral é formado pelas combinações de 50 cartas tomadas 5 a 5, ou seja, o número de elementos do espaço amostral é $C_{50,5} = \dfrac{50!}{5! \times 45!} = 2.118.760$. Dessas possibilidades, o número de casos de formação de trinca são duas possibilidades para o terceiro *rei* juntamente com a combinação das 48 cartas restantes (diferentes de rei) tomadas 4 a 4, ou seja, $2 \times C_{48,4} = 389.160$. Também existe a possibilidade da abertura dos dois *reis* que sobraram (uma possibilidade), juntamente com a combinação das 48 cartas restantes tomadas 3 a 3, isto é, $1 \times C_{48,3} = 17.296$. Portanto, a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, uma trinca de *reis* é $P = \dfrac{389.160 + 17.296}{2.118.760} = \dfrac{406.456}{2.118.760} \approx 19,18\%$.

    É importante destacar que dentro dessa probabilidade calculada, incluem-se outros casos, como por exemplo a trinca de *reis* vir acompanhada de outro par, ou seja, o jogador está com full house, que como sabemos é uma mão superior à trinca. Também há a possibilidade de quadra, straight flush e royal straight flush incluídas na probabilidade calculada.

15. Alfa, Beta e Delta tem um par cada. Pelos critérios de desempate, Alfa está vencendo no momento porque tem o maior par.

    Beta depende exclusivamente de um *dois* para formar trinca e vencer a mão. Um *ás* não serve porque Gama completaria uma sequência. Como há duas cartas favoráveis entre as 40 restantes, a probabilidade de Beta ganhar é $P = \dfrac{2}{40} = \dfrac{1}{20} = 5\%$.

    Gama formará uma sequência se o river for um *nove* ou *ás*. Ainda há 3 cartas de cada valor no baralho. Um *rei*, diferente do naipe de ouros, também serve, pois dessa forma venceria com o maior par. Existem dois *reis* no baralho que são favoráveis. Portanto a probabilidade de vitória de Gama é $P = \dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5} = 20\%$.

    Delta está na expectativa de três mãos. Completar uma trinca de *oitos*, formar uma sequência de *oito* à *dama* ou fazer um flush de ouros. Entre as 40 cartas restantes, há dois *oitos*, três cartas *dez* para a sequência e 7 cartas do naipe de ouros para o flush. Assim a probabilidade de Delta levar o pote de fichas é $\dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10} = 30\%$.

    Demais cartas são favoráveis à Alfa. Portanto a probabilidade de Alfa vencer é $P = \dfrac{18}{40} = \dfrac{9}{20} = 45\%$.