

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DA FORMA E ESTRUTURA EM UM
PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR APLICANDO A
TEORIA CONSTRUCTAL E O *SIMULATED ANNEALING*

por

Gill Velleda Gonzales

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Modelagem Computacional
no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio
Grande – FURG.

Orientador: Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos
Co-Orientador: Prof. Dr. Leonardo Ramos Emmendorfer

Rio Grande, 19 de Março de 2015.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

TERMO DE APROVAÇÃO

Gill Velleda Gonzales

OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DA FORMA E ESTRUTURA EM UM
PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR APLICANDO A
TEORIA CONSTRUCTAL E O *SIMULATED ANNEALING*

Dissertação submetida à comissão de avaliação como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Modelagem Computacional, no curso de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Antônio José da Silva Neto
Membro externo – UERJ

Prof. Dr. Catia Maria dos Santos Machado
Membro da comissão – PPGMC/FURG

Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos
Orientador – Universidade Federal do Rio Grande

Prof. Dr. Leonardo Ramos Emmendorfer
Co-Orientador – Universidade Federal do Rio Grande

Prof. Dr. Liércio André Isoldi
Membro da comissão – PPGMC/FURG

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha
Membro da comissão – PPGMC/FURG

“Sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo
nem ensino”
Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelas oportunidades que a vida me oferece e por ter plenas condições de aproveitá-las.

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional e principalmente a minha Mãe, Vera Lúcia, pelos seus ensinamentos inspiradores que me incentivam na constante busca pelo conhecimento.

Sou extremamente grato aos professores Elizaldo D. dos Santos e Leonardo R. Emmendorfer, pelas orientações assertivas que iluminaram o caminho ao longo deste trabalho.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional por ter oportunizado experiências e troca de conhecimentos entre colegas e demais professores do programa. Assim como sou grato ao Coordenador Jeferson Avila Souza pelo apoio e atenção essenciais à realização deste trabalho com a infraestrutura disponibilizada e acesso aos laboratórios.

Agradeço aos professores Emmanuel da S. D. Estrada e Elizaldo D. dos Santos, pelo fundamental apoio inicial com a disponibilização de materiais que originaram o desenvolvimento desta pesquisa.

Agradeço ao Instituto Federal Sul-rio-grandense (IFSul), pelo apoio concedido na liberação da minha licença para capacitação, a qual foi de vital importância para a viabilização deste trabalho.

Agradeço a todos aqueles que de alguma forma direta ou indiretamente contribuíram para a concretização desta importante etapa na minha vida.

Muito Obrigado!

RESUMO

OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DA FORMA E ESTRUTURA EM UM PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR APLICANDO A TEORIA CONSTRUCTAL E O *SIMULATED ANNEALING*

Nesta pesquisa é estudada a aplicação do algoritmo *Simulated Annealing* (SA) associada à Teoria Constructal para a otimização geométrica da forma e estrutura em problemas de transferência de calor. Dois problemas envolvendo cavidades resfriadoras são estudados. Primeiramente, o algoritmo SA é aplicado à otimização de uma cavidade em forma de Y com quatro graus de liberdade e três restrições geométricas. A mesma foi otimizada em estudos prévios da literatura através dos métodos de Busca Exaustiva (BE) e Algoritmo Genético (AG) com variação geométrica realizada através do *Constructal Design*. O principal parâmetro do algoritmo SA (resfriamento da temperatura de controle do algoritmo, denominado *cooling schedule*) também é estudado. Os modelos tradicionais de resfriamento (*Boltz*, *Exponencial* e *Fast*) são investigados juntamente com novos modelos híbridos, propostos neste estudo e nomeados de *BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*. A análise dos parâmetros é realizada através de uma experiência para a otimização de dois graus de liberdade da cavidade em Y. Nesta, são executadas vinte rodadas de trinta execuções de cada versão do algoritmo SA, configurado com diferentes parâmetros de *cooling schedule*, sendo avaliada a quantidade de vezes que cada algoritmo alcançou a geometria ótima global. Para um problema com até três graus de liberdade, os resultados do SA são comparados com os obtidos pelos métodos BE e AG e para sistemas mais complexos é investigado o efeito das restrições ψ e ϕ (que representam a área inscrita e a área da cavidade em Y) onde os resultados são novamente comparados com os obtidos com AG. Através de técnicas de análises estatísticas foi possível verificar diferenças significativas entre os resultados do SA com os diferentes *cooling schedules* investigados. Em um segundo estudo, é proposta uma nova geometria de cavidade na forma de duplo-T, para um problema da mesma natureza da cavidade em Y. A nova geometria possui cinco graus de liberdade e quatro restrições. O algoritmo SA é aplicado na otimização da cavidade em duplo-T com as mesmas configurações de parâmetros validados no processo de otimização da cavidade em forma de Y. Também foi realizada uma comparação entre o desempenho térmico da nova cavidade proposta, em forma de duplo-T, e a cavidade em forma de Y para a razão de $H/L = 1$ e para a otimização completa de ambas cavidades. De uma forma geral, a otimização completa demonstrou a eficiência dos modelos híbridos, assim como a vantagem em utilizar mais de uma versão do SA quanto à precisão dos resultados da otimização. Os resultados mostram que o SA é adequado e indicado à utilização junto ao método *Constructal Design* em problemas de cavidades.

ABSTRACT

“GEOMETRIC OPTIMIZATION OF THE SHAPE AND STRUCTURE IN A HEAT TRANSFER PROBLEM APPLYING CONSTRUCTAL THEORY AND SIMULATED ANNEALING”

An analysis of *Simulated Annealing* (SA) algorithm employ with Constructal Theory for geometric optimization of shape and structure is done in this work. In this research were studied two problems of heat transfer involving cooled cavities. Firstly, the SA algorithm is applied to geometric optimization of a Y-shaped cavity with four degrees of freedom and three geometric constraints. The same geometry was optimized in the previous studies in literature through the Exhaustive Search (ES) method and Genetic Algorithm (GA) with the geometric variation performed by *Constructal Design*. The main parameter of SA algorithm, called *cooling schedule*, also is studied. The traditional models of cooling (*Boltz*, *Exponential* and *Fast*) were investigated jointly with new hybrids models, proposed in this study and called of *BoltzExp*, *ConstExp1* and *ConstExp2*. The parameters analysis is realize by an experience for the optimization of two degrees of freedom of Y-shaped cavity. In this experience was performed twenty rounds of thirty execution for each version of SA algorithm. Each version of SA is configured with a different parameter of *cooling schedule*, the experience evaluated the number of times that each algorithm has achieved the global optimum geometry. To a problem with up to three degrees of freedom, the SA results are compared with the results achieved by ES and GA method. And for a more complex systems is investigated the effect of constraints ψ and ϕ (that represents the auxiliary area and the Y-shaped cavity area), so the results obtained are compared with GA results. Through statistical analysis techniques was possible verify that the *cooling schedules* investigated showed significant differences in the results. In a second study, is proposed a new geometry of cavity in the form of double-T, for a problem of same nature of Y-shaped cavity. The new geometry has five degrees of freedom and four constraints. The SA algorithm is applied in the optimization of the cavity shaped double-T with the same parameters validated in the optimization process of the Y-shaped cavity. Also was realized a comparison between the thermal performance of the new cavity proposed, shaped double-T, and the thermal performance of the Y-shaped cavity for $H/L = 1$ and for complete optimization of both cavities. In general, the complete optimization showed the efficiency of the hybrids *cooling schedules*, as well as, the vantage in utilize more than one version of SA algorithm as to precision of the optimization results. The results prove that SA algorithm is appropriated and indicated to utilization jointly with *Constructal Design* method in cavities problems.

Índice

1 INTRODUÇÃO.....	15
1.1 BREVE ESTADO-DA-ARTE.....	18
1.2 OBJETIVOS.....	19
1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	19
1.3 DELINEAMENTO DO TEXTO.....	20
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	22
2.1 TEORIA CONSTRUCTAL.....	22
2.1.1 CONSTRUCTAL DESIGN EM PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DO CALOR.....	24
2.2 SIMULATED ANNEALING (SA).....	28
2.2.1 MODELO DE RESFRIAMENTO.....	30
2.2.2 FUNÇÃO DE ACEITAÇÃO.....	31
3 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	33
3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DA CAVIDADE EM Y.....	33
3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DA CAVIDADE EM DUPLO-T.....	37
4 MÉTODO NUMÉRICO.....	41
4.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	41
4.2 ESTUDO DE INDEPENDÊNCIA DE MALHA PARA A CAVIDADE EM Y.....	43
4.3 ESTUDO DE INDEPENDÊNCIA DE MALHA PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T.....	44
5 METODOLOGIA PARA OTIMIZAÇÃO.....	46
5.1 METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO DA CAVIDADE EM Y.....	46
5.1.1 CONSTRUCTAL DESIGN APLICADO À CAVIDADE EM Y.....	46
5.1.2 METODOLOGIA PARA OTIMIZAÇÃO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE DA CAVIDADE EM Y.....	49
5.1.2.1 IMPLEMENTAÇÃO DO SIMULATED ANNEALING PARA A CAVIDADE EM FORMA DE Y.....	50
5.1.2.2 FLUXOGRAMA DO ALGORITMO SIMULATED ANNEALING.....	52
5.1.2.3 ESTUDO COMPARATIVO DE DIFERENTES COOLING SCHEDULES.....	54
5.1.3 ESTUDO DE COOLING SCHEDULES HÍBRIDOS NA REGIÃO ÓTIMA.....	56
5.1.4 OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM Y.....	58
5.2 METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO DA CAVIDADE EM DUPLO-T.....	59
5.2.1 CONSTRUCTAL DESIGN APLICADO À CAVIDADE EM DUPLO-T.....	60
5.2.2 OTIMIZAÇÃO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T.....	62
5.2.3 OTIMIZAÇÃO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T.....	63
5.2.4 OTIMIZAÇÃO DE QUATRO GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T.....	66
5.2.5 OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM DUPLO-T.....	68
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	69
6.1 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA PARA CAVIDADE EM Y.....	69
6.1.1 ESTUDO DE COOLING SCHEDULES PARA DOIS GRAUS DE LIBERDADE.....	69
6.1.1.1 COMPARAÇÃO ENTRE SA, AG E BE.....	74
6.1.2 OTIMIZAÇÃO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE.....	76
6.1.3 ANÁLISE DOS SEIS COOLING SCHEDULES.....	78
6.1.4 OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM Y.....	85
6.2 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO DA CAVIDADE EM DUPLO-T.....	96
6.2.1 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T.....	96
6.2.2 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T.....	103
6.2.3 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO DE QUATRO GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T.....	109
6.2.4 RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM DUPLO-T.....	113
6.3 COMPARAÇÃO ENTRE A CAVIDADE EM Y E A CAVIDADE EM DUPLO-T.....	124
7 CONCLUSÕES.....	127
8 PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS.....	131
9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	132
ANEXO I – RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM Y PARA DIFERENTES VALORES DE ψ E ϕ	139
ANEXO II – ARTIGO SOBRE A APLICAÇÃO DO SIMULATED ANNEALING NA OTIMIZAÇÃO DA CAVIDADE EM Y APRESENTADO NO VI MCSUL.....	173
ANEXO III – ARTIGO SOBRE O ESTUDO DE COOLING SCHEDULES APRESENTADO NO VI MCSUL.....	186

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Exemplos de forma e estrutura de sistemas de fluxo e comparação entre padrões presentes na natureza (Fonte: Bejan e Lorente, 2011).....	22
Figura 2.2. Otimização de caminhos de alta condutividade em disco sólido gerador de calor (Fonte: Rocha et al., 2002).....	25
Figura 2.3. Aumento da complexidade geométrica de caminhos de alta condutividade (Fonte: Rocha et al., 2002).	26
Figura 2.4. Cavidade resfriadora em forma de C investigada por Biserni et al. (2004).....	27
Figura 2.5. Algoritmo clássico do <i>Simulated Annealing</i>	29
Figura 3.1. Domínio computacional do primeiro problema a ser otimizado (Fonte: Lorenzini et al., 2011).....	33
Figura 3.2. Domínio computacional da cavidade em duplo-T.....	38
Figura 4.1. Discretização espacial da cavidade em Y:.....	42
Figura 5.1. Fluxograma ilustrando o processo de otimização da cavidade em Y.....	47
Figura 5.2. Pseudocódigo da função de <i>annealing</i> desenvolvida para o espaço de busca dos graus de liberdade L_1/L_0 e α	51
Figura 5.3. Fluxograma do algoritmo SA aplicado à otimização geométrica do problema de transferência de calor.	53
Figura 5.4. Modelo de resfriamento do SA do tipo Fast em função de k_{sa} iterações.....	55
Figura 5.5. Composição do <i>Cooling Schedule</i> híbrido BoltzExp.....	56
Figura 5.6. <i>Cooling Schedules</i> investigados na região ótima de t_1/t_0	58
Figura 6.1. Diagramas de caixas comparando os resultados gerados pelos quatro tipos de <i>Cooling Schedules</i> estudados.....	70
Figura 6.2. Comparação entre as médias dos resultados de cada <i>Cooling Schedule</i> estudado.....	72
Figura 6.3. Campos de temperaturas para as geometrias com várias razões de L_1/L_0	75
Figura 6.4. Comparação dos resultados para o efeito da razão t_1/t_0 sobre $(\theta_{max})_{mm}$ e suas respectivas geometrias ótimas obtidas com os métodos SA e BE (Lorenzini et al., 2011).....	77
Figura 6.5. Aplicação do Teste de <i>Levene</i> para o teste de homogeneidade das variâncias.....	81
Figura 6.6. Aplicação do teste de <i>Tukey</i>	83
Figura 6.7. Gráfico do Tipo <i>BoxPlot</i> com a classificação do teste de <i>Tukey</i> para o nível de significância 0,05.....	84
Figura 6.8. Comparação entre o AG (Lorenzini et al. 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\theta_{max})_{mmmm}$ para $\psi = 0,3$	87
Figura 6.9. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\alpha)_{oooo}$ para $\psi = 0,3$	88
Figura 6.10. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{ooo}$ para $\psi = 0,3$	90
Figura 6.11. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{oo}$ para $\psi = 0,3$	91
Figura 6.12. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito	

de ϕ sobre o grau de liberdade $(H/L)_o$ para $\psi = 0,3$	92
Figura 6.13. Geometrias ótimas para $\psi = 0,3$:.....	94
Figura 6.14. Geometrias quatro vezes otimizadas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,3$ e $\phi = 0,2$..	95
Figura 6.15. Avaliação da influência de diferentes incrementos de S_1/H_0 sobre o efeito dessa variável sobre $(\theta_{\max})_m$	97
Figura 6.16. Comparação entre os resultados de BE e SA para o efeito de S_1/H_0 sobre $(\theta_{\max})_m$	97
Figura 6.17. Comparação entre a geometria ótima e duas geometrias não otimizadas obtidas na Fig. 6.16.....	99
Figura 6.18. Comparação entre o efeito de $(S_1/H_0)_o$ sobre $(\theta_{\max})_m$ para diferentes valores de H_2/L_2	101
Figura 6.19. Efeito de H_2/L_2 sobre $(\theta_{\max})_m$ e $(S_1/H_0)_o$ para $H/L = 1,0$ e $H_0/L_0 = 6,0$	102
Figura 6.20. Geometria ótima da cavidade em duplo-T para dois graus de liberdade.....	102
Figura 6.21. Efeito de H_2/L_2 sobre a $(\theta_{\max})_{mm}$ e graus de liberdade $(H_1/L_1)_o$ e $(S_1/H_0)_{oo}$	104
Figura 6.22. Comparação entre a geometria três vezes otimizada em relação às demais geometrias duas vezes otimizadas para as razões constantes ($\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = \phi_2 = 0,015$; $H/L = 1,0$; $H_0/L_0 = 6,0$).....	105
Figura 6.23. Comparação entre os resultados do método de Busca Exaustiva e diferentes versões do <i>Simulated Annealing</i>	107
Figura 6.24. Comparação entre as geometrias simétricas e a geometria três vezes otimizada obtida com espaço de busca dinâmico para $\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = \phi_2 = 0,015$; $H/L = 1,0$; $H_0/L_0 = 6,0$:.....	109
Figura 6.25. Efeito de H_0/L_0 sobre $(\theta_{\max})_{mmm}$ e graus de liberdade $(H_2/L_2)_o$, $(H_1/L_1)_{oo}$ e $(S_1/H_0)_{ooo}$	111
Figura 6.26. Campo de temperaturas para as geometrias ótimas obtidas na Fig. 6.25 para os parâmetros $\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = \phi_2 = 0,015$ e $H/L = 1,0$	112
Figura 6.27. Efeito de H/L sobre os graus de liberdade $(H_0/L_0)_o$, $(H_2/L_2)_{oo}$, $(H_1/L_1)_{ooo}$ e $(S_1/H_0)_{oooo}$ para a cavidade em duplo-T.....	115
Figura 6.28. Efeito de H/L sobre $(\theta_{\max})_{mmmm}$ para a cavidade em duplo-T.....	115
Figura 6.29. Comparação entre geometrias ótimas para diferentes valores de H/L	116
Figura 6.30. Comparação do efeito de ϕ_c sobre $(\theta_{\max})_{mmmm}$ para diferentes versões do SA.....	118
Figura 6.31. Comparação do efeito de ϕ_c sobre $(S_1/H_0)_{oooo}$ para diferentes versões do SA.....	118
Figura 6.32. Comparação do efeito de ϕ_c sobre $(H_1/L_1)_{oooo}$ para diferentes versões do SA.....	120
Figura 6.33. Comparação do efeito de ϕ_c sobre $(H_2/L_2)_{ooo}$ para diferentes versões do SA.....	120
Figura 6.34. Efeito de ϕ_c sobre $(H_0/L_0)_{oo}$ para diferentes versões do SA.....	121
Figura 6.35. Geometrias ótimas para diversos valores de ϕ_c	123
Figura 6.36. Comparação entre geometrias ótimas das cavidades em forma de Y e duplo-T.....	125
Figura 6.37. Comparação entre a otimização completa da cavidade em Y e da cavidade em duplo-T para diferentes valores de ϕ_c	126
Figura A.1. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\theta_{\max})_{mmmm}$ para $\psi = 0,4$	140
Figura A.2. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\alpha)_{oooo}$ para $\psi = 0,4$	141
Figura A.3. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{ooo}$ para $\psi = 0,4$	142

Figura A.4. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{oo}$ para $\psi = 0,4$	144
Figura A.5. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(H/L)_o$ para $\psi = 0,4$	145
Figura A.6. Geometrias ótimas para $\psi = 0,4$:.....	147
Figura A.7. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,4$ e $\phi = 0,1$:.....	148
Figura A.8. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\theta_{max})_{mmmm}$ para $\psi = 0,5$	151
Figura A.9. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\alpha)_{oooo}$ para $\psi = 0,5$	152
Figura A.10. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{ooo}$ para $\psi = 0,5$	153
Figura A.11. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{oo}$ para $\psi = 0,5$	154
Figura A.12. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(H/L)_o$ para $\psi = 0,5$	156
Figura A.13. Geometrias ótimas para $\psi = 0,5$:.....	158
Figura A.14. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,5$ e $\phi = 0,05$:.....	159
Figura A.15. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,5$ e $\phi = 0,2$:.....	160
Figura A.16. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> em relação ao efeito de ϕ sobre $(\theta_{max})_{mmmm}$ para $\psi = 0,6$	162
Figura A.17. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\alpha)_{oooo}$ para $\psi = 0,6$	164
Figura A.18. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{ooo}$ para $\psi = 0,6$	165
Figura A.19. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{oo}$ para $\psi = 0,6$	167
Figura A.20. Comparação entre os resultados do SA com vários <i>Cooling Schedules</i> em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(H/L)_o$ para $\psi = 0,6$	168
Figura A.21. Geometrias ótimas para $\psi = 0,6$:.....	169
Figura A.22. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,6$ e $\phi = 0,15$:.....	170
Figura A.23. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,6$ e $\phi = 0,2$:.....	172

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1. Teste de independência de malha.....	44
Tabela 4.2. Comparação dos resultados obtidos no presente trabalho e os obtidos na literatura.....	45
Tabela 4.3. Teste de independência de malha para a cavidade em duplo-T.....	46
Tabela 6.1. Análise de variância entre os diferentes modelos de resfriamento do SA.....	72
Tabela 6.2. Comparação entre modelos de resfriamento.....	74
Tabela 6.3. Comparação entre os resultados obtidos com SA, AG e BE para uma otimização com os seguintes parâmetros fixos: $H/L = 1,0$; $t_1/t_0 = 11,0$; $\phi = 0,05$ e $\psi = 0,3$	76
Tabela 6.4. Comparação entre os resultados obtidos com SA, AG e BE para uma otimização com os seguintes parâmetros fixos: $H/L = 1,0$; $\phi = 0,05$ e $\psi = 0,3$	77
Tabela 6.5. Medidas estatísticas da distribuição porcentual em encontrar as formas ótimas para cada <i>Cooling Schedule</i>	80
Tabela 6.6. Análise de Variância da distribuição de porcentagens entre todos os <i>Cooling Schedules</i> analisados...	83
Tabela 6.7. Resultados da otimização completa da cavidade em Y aplicando o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para $\psi = 0,3$	87
Tabela 6.8. Resultados do método de Busca Exaustiva e das diferentes versões do SA para dois graus de liberdade em $H_2/L_2 = 0,4$	99
Tabela 6.9. Resultados da otimização de dois graus de liberdade com o método de Busca Exaustiva e diferentes versões do SA (BoltzExp, ConstExp1 e ConstExp2).....	101
Tabela 6.10. Resultados da otimização de três graus de liberdade com o método de Busca Exaustiva.....	104
Tabela 6.11. Comparação entre os resultados do método de Busca Exaustiva e diferentes versões do <i>Simulated Annealing</i> para $\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = \phi_2 = 0,015$; $H/L = 1,0$; $H_0/L_0 = 6,0$	107
Tabela 6.12. Resultados da otimização de três graus de liberdade com diferentes versões do SA.....	109
Tabela 6.13. Resultados da otimização de três graus de liberdade para cada valor de H_0/L_0	111
Tabela 6.14. Resultados da otimização de quatro graus de liberdade para cada versão do SA.....	114
Tabela 6.15. Resultados da otimização completa da cavidade em duplo-T relatados por diferentes versões do algoritmo SA.....	114
Tabela 6.16. Resultados da otimização de quatro graus de liberdade para cada valor de H/L	115
Tabela 6.17. Resultado da otimização completa da cavidade em duplo-T para diferentes ϕ_c e empregando diferentes versões do SA.....	118
Tabela A.1. Resultados da otimização completa da cavidade em Y aplicando o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para $\psi = 0,4$	140
Tabela A.2. Resultados da otimização completa da cavidade em Y aplicando o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para $\psi = 0,5$	151
Tabela A.3. Resultados da otimização completa da cavidade em Y aplicando o SA com vários <i>Cooling Schedules</i> para $\psi = 0,6$	162

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas

A	Área, m ²
A_c	Área da cavidade
A_{aux}	Área auxiliar no problema da cavidade em forma de Y
L	Largura, m
H	Altura, m
S	Altura do braço inferior da cavidade em duplo-T
t_0	Espessura do ramo bifurcado da cavidade em Y
t_1	Largura da base do ramo simples da cavidade em Y
x, y, z	Coordenadas espaciais, m
t	Tempo, s
t_c	Contador de alterações na temperatura do <i>Simulated Annealing</i>
C_p	Calor específico, kJ/kg·K
k	Condutividade térmica, W/m·K
q'''	Taxa de geração volumétrica de calor, W/m ³
T_{min}	Temperatura mínima prescrita nas superfícies da cavidade em Y
T	Temperatura de controle do algoritmo <i>Simulated Annealing</i>
i, j	Índices de iteração

Símbolos Gregos

ρ	Massa específica, kg/m ³
θ	Temperatura, K
$\tilde{\theta}$	Temperatura adimensional,
ϕ	Fração de área em relação à área total do sólido
α	Ângulo entre o ramo bifurcado da cavidade em Y e o eixo x
δ	Varição entre estados do algoritmo <i>Simulated Annealing</i>
ψ	Fração de área auxiliar em relação à área do sólido retangular no problema da cavidade Y

Subscritos

max	Máximo
min	Mínimo
m	Uma vez minimizado
mm	Duas vezes minimizado
mmm	Três vezes minimizado
mmmm	Quatro vezes minimizado
mmmmm	Cinco vezes minimizado
o	Uma vez otimizado
oo	Duas vezes otimizado
ooo	Três vezes otimizado
oooo	Quatro vezes otimizado
ooooo	Cinco vezes otimizado
0,1	Índice de variáveis de comprimento e largura
c	Cavidade

Sobrescrito

(~)	Variáveis adimensionais
'	Vetor transposto

LISTA DE ABREVIACOES

PDE Tool-Box	<i>Partial Differential Equations Tool - Box</i>
SA	<i>Simulated Annealing</i>
AG	Algoritmo Genético
FO	Função Objetivo
CD	<i>Constructal Design</i>
BE	Busca Exaustiva
MEF	Método de Elementos Finitos
DOF	<i>Degrees of Freedom</i>

1 INTRODUÇÃO

Absorver calor de um meio com geração ou acúmulo de energia com o propósito de resfriamento é uma técnica de controle de temperatura abordada em vários sistemas térmicos, desde motores de combustão, ferramentas de usinagem a circuitos eletrônicos (Bejan, 2003; Biserni et al., 2004; Wenjun et al., 2007; Rocha et al., 2007). Como exemplo, pode-se observar os sistemas de resfriamento de processadores em microcomputadores, *desktop* ou *notebooks*, todos possuem um material como dissipador junto ao processador que age de forma a extrair o calor gerado pelo *chip*, nestes casos ainda é possível ter um sistema motriz de movimentação do ar circundante removendo o calor do dissipador por meio de convecção forçada. Outro exemplo é o *chip-set* da placa-mãe, onde geralmente não existe a presença direta de um ventilador, o calor do *chip* é removido por condução pelo contato com o dissipador. Este último por sua vez, é resfriado por convecção natural, sendo a sua geometria uma característica fundamental no desempenho do resfriamento do sistema.

Porém, com o progresso dos circuitos eletrônicos em dispositivos cada vez mais compactos, as formas tradicionais de sistemas de troca térmica por convecção forçada não são mais suportadas. Simplesmente por que não há mais espaço para dissipadores e sistemas de convecção forçada. Segundo Bejan (2003), soluções viáveis apontam para o emprego de dutos ou cavidades introduzidas no meio com geração de energia. Nestes, um material de alta condutividade é inserido de forma a facilitar o resfriamento. Conseqüentemente, a racionalização geométrica desses sumidouros de calor, cavidades ou dutos, se apresenta com grande importância na eficiência do sistema de arrefecimento. Desta forma, o presente trabalho pretende realizar um estudo das técnicas e metodologias aplicadas na otimização das relações geométricas que influem na minimização da resistência térmica em problemas de transferência de calor, mais precisamente em cavidades resfriadoras inseridas em sólidos com geração interna de calor.

O problema inicial a ser estudado possui um domínio bidimensional, ou seja, a temperatura é dependente das coordenadas x e y em um sistema de coordenadas cartesianas. O mesmo envolve um sólido isotrópico retangular com geração de calor constante e uniforme em toda a sua área. Uma cavidade em seu interior, com temperatura mínima prescrita, tem como função remover o calor gerado no sólido. Uma hipótese simplificativa comumente empregada é considerar as superfícies laterais do sólido termicamente isoladas, de forma que o único efeito sobre o campo de temperaturas do sólido esteja relacionado à variação geométrica da cavidade. A distribuição da temperatura ao longo do sólido é calculada através da equação de difusão do calor que será

resolvida de forma aproximada com o uso do método numérico de elementos finitos (Zienkiewicz e Taylor, 2000), o qual resolve a equação de condução do calor para vários pontos do domínio computacional de acordo com a malha a ser utilizada. Após calcular o campo de temperaturas, obtêm-se a temperatura máxima presente no sólido para uma determinada configuração da geometria da cavidade. Além disso, o problema está sendo considerado no regime permanente. Neste trabalho pretende-se encontrar as relações e valores ótimos para os graus de liberdade da geometria que tendem a minimizar a temperatura máxima e assim a resistência ao fluxo de calor em direção à cavidade resfriadora que está a uma temperatura mais baixa.

As geometrias são variadas empregando o método *Constructal Design* (CD) que é baseado na Teoria Constructal. De acordo com Bejan (1996) a Teoria Constructal é a visualização de que existe um fenômeno físico que influencia a geração das configurações em sistemas de fluxo (Lei Constructal). Assim, as formas geométricas dos sistemas de fluxo, animados ou inanimados, presentes na natureza, não são geradas aleatoriamente e sim deterministicamente de acordo com um princípio físico. Esse princípio é a Lei Constructal que diz que para um sistema de fluxo de dimensões finitas persistir no tempo (sobreviver) sua configuração deve evoluir de forma a facilitar o acesso das correntes que fluem através do sistema (Bejan, 1996; Bejan, 2000; Bejan e Lorente, 2008; Bejan e Zane, 2012). Para avaliar as geometrias em sistemas de fluxo em engenharia, bem como, para prever a forma e estrutura de diversos sistemas de fluxo na natureza emprega-se o método CD, que é um método baseado no princípio de objetivos e restrições (locais e globais). No presente trabalho, pretende-se minimizar o ponto máximo de temperatura presente no interior do domínio sólido com geração de calor, ou seja, a máxima temperatura em excesso. Alguns exemplos de restrições geométricas no estudo de cavidades são as áreas do domínio sólido e da cavidade resfriadora.

De acordo com a literatura atual, a otimização geométrica de problemas de transferência de calor envolvendo cavidades resfriadoras é realizada através do método de Busca Exaustiva (BE), onde são simuladas todas as possibilidades para os graus de liberdade estudados. Encontradas as temperaturas máximas e comparadas, extrai-se a temperatura máxima mínima e assim se encontra as relações geométricas ótimas, vide os estudos de cavidades em forma de C, T, Y, cavidades complexas e múltiplas cavidades (Biserni et al., 2004; Xie et al., 2010; Lorenzini et al., 2011; Lorenzini et al., 2012; Lorenzini et al., 2013; Hajmohammadi et al., 2013). Contudo, estudos mais recentes (Estrada et al., 2012; Lorenzini et al., 2014a; Lorenzini et al., 2014b) compararam a aplicação do método de otimização na forma convencional de BE com a aplicação da técnica de

otimização meta-heurística do Algoritmo Genético (AG), para um mesmo problema de transferência de calor em uma cavidade complexa em forma de Y inserida em um sólido com geração de calor.

A utilização de técnicas meta-heurísticas possibilita a otimização de geometrias mais complexas onde a técnica exaustiva e convencional não é aplicável pelo grande número de simulações e demasiado esforço computacional. A proposta deste trabalho é aplicar primeiramente o algoritmo de busca *Simulated Annealing* (SA) para a otimização do problema de cavidades em forma de Y, com superfícies isotérmicas, desenvolvido nos estudos de Lorenzini et al. (2014a) e comparar a sua aplicação com os resultados obtidos pelo AG e BE. Assim como, avaliar a aplicação deste algoritmo meta-heurístico (SA) para vários graus de liberdade na otimização de novas geometrias, mais complexas, principalmente onde o método exaustivo de otimização não é aplicável pela demanda de esforço computacional.

O problema de transferência de calor pesquisado aborda a transferência por condução, utilizando, assim, equações e métodos numéricos adequados para a solução do campo de temperatura. O objetivo geral é minimizar a resistência ao fluxo de calor ou a temperatura máxima acumulada no sólido com geração de calor e investigar quais geometrias conduzem o sistema ao melhor desempenho térmico. Acredita-se que o emprego do mecanismo de busca SA reduzirá sensivelmente o número de iterações, minimizando o esforço computacional para a avaliação geométrica do problema. Conseqüentemente, permitindo o estudo de geometrias com mais graus de liberdade e explorando restrições do problema (e. g., área que a cavidade ocupa do domínio sólido).

O foco do trabalho está em apresentar a robustez do algoritmo SA quando aplicado à otimização geométrica de cavidades com geometrias complexas. Este estudo também pretende validar o emprego do SA junto ao CD no processo de otimização, assim como determinar a melhor configuração de seus parâmetros. O principal parâmetro do SA investigado é o decaimento da temperatura do algoritmo, conhecido como *cooling schedule*. Os dados referentes a esta aplicação serão comparados com os resultados já obtidos na literatura (Estrada et al., 2012; Lorenzini et al., 2014a) onde uma cavidade em forma de Y foi otimizada através do emprego de BE e AG associados ao CD. Além disso, um estudo de otimização geométrica em uma cavidade ainda não estudada (duplo-T) é proposto. Para poucos graus de liberdade (dois) os resultados obtidos com SA são comparados com BE, enquanto a otimização completa (cinco graus de liberdade) é realizada apenas com o SA para várias restrições de área. Esses resultados representam uma recomendação teórica para a melhor geometria que se aproxima da ótima para este tipo de cavidade, o que ainda não foi estudado na literatura.

1.1 BREVE ESTADO-DA-ARTE

Atualmente o estudo de cavidades resfriadoras possui um amplo foco na forma e estrutura da cavidade que ofereça a menor resistência térmica. Utiliza-se como ferramenta de otimização o método *Constructal Design*, para propor os objetivos e restrições do problema, assim como avaliar a influência de cada grau de liberdade sobre a função objetivo.

A proposta de otimização de cavidades resfriadoras, baseada na Teoria Constructal (Bejan, 2000) tem sido bastante estudada na literatura, um dos estudos pioneiros nessa área foi desenvolvido por Biserni et al. (2004) onde foi avaliada a otimização geométrica de uma cavidade retangular, em forma de C, inserida em um corpo retangular com geração e acúmulo de calor. Neste mesmo estudo, a otimização de uma cavidade em forma de T, demonstrou a influência do formato da cavidade ao apresentar um melhor desempenho térmico. A partir destes estudos outras propostas para o formato da cavidade foram avaliadas, como o formato H nos estudos de Biserni et al. (2007). Aumentando a complexidade do formato T o formato T-Y também foi otimizado em Lorenzini et al. (2009), mostrando que esta geometria, submetida as mesmas restrições, é 108 % superior ao formato C. Em Lorenzini et al. (2012), o formato T-Y foi estudado com a adição de cavidades laterais em duas diferentes geometrias. A melhor geometria, chamada de *design two*, apresentou um desempenho até duas vezes melhor que a forma básica da cavidade em T-Y.

A investigação do formato da cavidade em direção à procura da forma que otimiza a distribuição de temperatura, leva à geração de geometrias mais complexas e, conseqüentemente, ao aumento nos graus de liberdade, como demonstra o estudo de Rocha et al. (2007). Junto ao incremento nos graus de liberdade da geometria, aumenta também o esforço computacional durante o processo de otimização. O estudo da cavidade em forma de Y (Lorenzini et al. 2011) usou o método exaustivo de busca pela geometria ótima, onde foram otimizados quatro graus de liberdade. Com base neste estudo a pesquisa de Lorenzini et al. (2014a) aplicou o Algoritmo Genético (AG) para a busca da geometria ótima, diminuindo consideravelmente o esforço computacional, viabilizando futuras pesquisas para geometrias mais complexas. Em Lorenzini et al. (2014b), o AG foi aplicado para otimizar a geometria da cavidade em Y submetida a um problema de transferência de calor por convecção, onde se pôde investigar parâmetros não estudados anteriormente, como por exemplo o efeito da área da cavidade (ϕ) e da área em que a cavidade está inscrita (ψ).

A aplicação de técnicas meta-heurísticas como o AG, tem sido realizada nos estudos de transferência de calor em pesquisas recentes, como apresenta o estudo de Gosselin et al. (2009).

Este estudo se concentra em uma revisão da utilização de AG em problemas de transferência de calor, demonstrando a aplicação em três famílias de problemas, projeto de sistemas térmicos (forma e estrutura), problemas de transferência de calor inversa e correlações no desenvolvimento de transferência de calor.

Na literatura pesquisada, apenas o estudo de Norouzi et al. (2012), utilizou o AG em associação ao CD para a otimização geométrica de um módulo de reaquecedor de um gerador de vapor. Os demais estudos encontrados apenas comparam metodologias meta-heurísticas com a aplicação do CD (Xianghua et al., 2007; Song et al., 2011). Nos estudos de cavidades, aplicando a Teoria Constructal, os trabalhos de Lorenzini et al. (2014a) e Lorenzini et al. (2014b) são pioneiros na aplicação do AG em conjunto ao CD para a otimização da geometria de cavidades resfriadoras.

Em Lorenzini et al. (2014b), a geometria da cavidade foi otimizada para diferentes parâmetros de coeficiente de transferência de calor por convecção, e a otimização com AG encontrou valores de temperaturas mínimas e geometrias ótimas muito próximos aos encontrados pelo método de BE, validando o emprego do algoritmo de busca. A grande vantagem, como mostram os estudos, está na diminuição do esforço computacional, em relação ao método exaustivo.

Contudo, não foram encontrados estudos referentes a aplicação de outras técnicas meta-heurísticas como o SA em conjunto ao CD em problemas envolvendo cavidades resfriadoras inseridas em sólidos com geração de calor. Além disso, não foi encontrado, no momento desta pesquisa, investigações no sentido de obter os melhores parâmetros para a execução de algoritmos de busca em problemas de otimização geométrica de cavidades resfriadoras, bem como comparações entre métodos heurísticos que melhor se adaptam a esta classe de problemas.

1.2 OBJETIVOS

O presente estudo tem como objetivo geral analisar a aplicação do algoritmo de otimização combinatória *Simulated Annealing* (SA) aliado ao *Constructal Design* (CD) para a otimização geométrica de cavidades resfriadoras em problemas de transferência de calor.

1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A pesquisa tem como objetivos específicos:

- otimizar a geometria da cavidade resfriadora inserida em um sólido gerador de calor através

- da aplicação do algoritmo de otimização combinatória *Simulated Annealing* (SA);
- estudar os parâmetros do algoritmo SA, principalmente o parâmetro de *cooling schedule*, com a finalidade de ajustar o algoritmo ao problema estudado e obter melhores resultados.
 - reproduzir os resultados encontrados na literatura para a otimização geométrica de uma cavidade complexa em forma de Y isotérmica empregando o algoritmo SA e validar seus resultados comparando com os resultados obtidos com o Algoritmo Genético (AG) e Busca Exaustiva (BE);
 - avaliar o comportamento do *cooling schedule* na predição do efeito das razões geométricas e restrições sobre o desempenho térmico das cavidades resfriadoras em forma de Y;
 - propor a otimização de uma nova geometria complexa (duplo-T) comparando os resultados obtidos entre o algoritmo SA e o método BE para poucos graus de liberdade;
 - otimizar completamente a geometria da cavidade em duplo-T com o algoritmo SA;
 - avaliar a influência dos graus de liberdade e restrições na performance térmica da cavidade em duplo-T proposta. Assim como comparar o desempenho da nova geometria com a cavidade em forma de Y.

1.3 DELINEAMENTO DO TEXTO

O texto deste estudo apresenta em seu capítulo 1 uma introdução ao problema de transferência de calor a ser pesquisado. É realizada uma breve discussão sobre como a otimização desse tipo de problema tem sido tratada na literatura (principalmente através de uma abordagem convencional, que consiste em testar todas as possibilidades geométricas existentes: método Busca Exaustiva), assim como a recente proposta de metodologia de aplicação de algoritmos meta-heurísticos. A introdução também faz uma rápida discussão sobre o foco de estudo deste trabalho, as pesquisas iniciais e futuras propostas de estudo. Este capítulo apresenta ainda um breve estado da arte dos problemas de transferência de calor envolvendo cavidades, os objetivos gerais e específicos desta pesquisa e a estrutura de texto deste trabalho.

O capítulo 2 aborda alguns fundamentos e conceitos relacionados com a Teoria Constructal e o método *Constructal Design* (CD), empregado em problemas de otimização geométrica de cavidades, que serão avaliadas nesse estudo. Além disso, é apresentada uma breve visão dos problemas de difusão do calor cuja avaliação geométrica é realizada através do CD. Este mesmo capítulo aborda a fundamentação teórica e conceitos do algoritmo *Simulated Annealing* (SA).

O capítulo 3 trata da modelagem matemática do problema a ser estudado. Sendo um problema de transferência de calor no regime permanente, este capítulo apresenta as equações utilizadas para calcular e descrever a distribuição de temperatura no domínio investigado. São apresentados os domínios e o modelo matemático para a cavidade em Y e para a cavidade em duplo-T.

O capítulo 4 aborda o método numérico de Elementos Finitos a ser utilizado para as simulações, assim como o estudo de independência de malha para os dois problemas de cavidade investigados, cavidade em Y e cavidade em duplo T. Neste capítulo é explicado como é utilizada a ferramenta *PDE Tool-Box*, do ambiente MATLAB, a qual aplica o método de elementos finitos para a resolução do campo de temperaturas presente no domínio do problema.

A metodologia de otimização é descrita no capítulo 5, começando com a definição das restrições e objetivos determinados pelo método CD. O capítulo segue explanando sobre as técnicas de otimização com algoritmos de busca, demonstrando a aplicação do algoritmo SA nos problemas pesquisados. O capítulo é dividido em dois subcapítulos, um para a cavidade em Y e outro para a cavidade em duplo-T.

O capítulo 6 apresenta os resultados da pesquisa, também dividido em duas seções (uma para cada tipo de cavidade pesquisada). O capítulo sobre os resultados da cavidade em Y, apresenta uma comparação do desempenho do algoritmo SA com os dados provenientes de estudos onde foram aplicadas as técnicas exaustivas e Algoritmos Genéticos para a busca das soluções ótimas, assim como a análise estatística de experimentos com diferentes versões do SA com o parâmetro *cooling schedule*. O estudo referente à cavidade em duplo-T, apresenta uma otimização parcial obtida com busca exaustiva e *Simulated Annealing*. Posteriormente, a cavidade é completamente otimizada para várias restrições geométricas com diferentes versões do algoritmo *Simulated Annealing*. Ao final do capítulo 6 é realizada uma comparação dos resultados otimizados das duas geometrias estudadas, cavidade em forma de Y e cavidade em forma de duplo-T.

A conclusão do presente estudo é explanada no capítulo 7. O capítulo 8 apresenta sugestões de estudos futuros. Finalmente o capítulo 9 apresenta as referências que orientaram esta pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 TEORIA CONSTRUCTAL

Analisando a natureza e contrariado com a visão predominante na comunidade científica, Adrian Bejan formulou a Teoria Constructal para explicar padrões geométricos que se repetem na natureza. A teoria proposta por Bejan (1996), defende que as formas geométricas de sistemas de fluxo presentes na natureza não são aleatórias, ao acaso, e sim determinísticas e orientadas por um princípio físico.

O princípio físico que a Teoria Constructal relaciona aos padrões, formas e estruturas semelhantes, encontrados na natureza é a Lei Constructal, a qual afirma que “Para um sistema onde existe escoamento persistir no tempo, sua configuração deve evoluir de modo a facilitar o acesso às suas correntes (fluido, energia e etc)” (Bejan e Zane, 2012). Através desta lei todos os sistemas de escoamento adaptam sua estrutura e forma de modo a facilitar o acesso ao fluxo. Vários sistemas podem ser representados aqui, de bacias de rios às geometrias de árvores, pulmões humanos, etc. A Figura 2.1 demonstra alguns exemplos onde a forma e estrutura dos sistemas de fluxo são gerados pela Lei Constructal, bem como, a semelhança entre alguns padrões encontrados na natureza. Por exemplo, as imagens do topo da Fig. 2.1 ilustram uma comparação do padrão geométrico que surge no escoamento de água em rios, do ar nos pulmões e a geometria de escoamentos em canais e dutos.

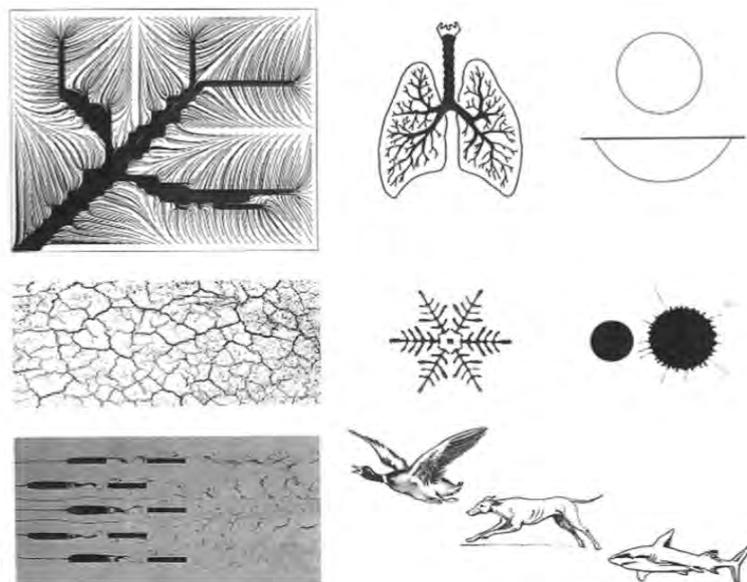


Figura 2.1. Exemplos de forma e estrutura de sistemas de fluxo e comparação entre padrões presentes na natureza (Fonte: Bejan e Lorente, 2011).

A Lei Constructal aborda sistemas de fluxo, todo o tipo de sistema onde houver um desequilíbrio, movimento, a estrutura deste sistema tenderá a adaptar-se no tempo de forma a maximizar este processo de movimento e minimizar a resistência ao escoamento. Como sistema de escoamento pode-se considerar vários exemplos onde a Teoria Constructal pode ser empregada, em redes de transporte, geometria de rios, árvores, a forma de uma descarga elétrica e até em economia como apresentam os estudos de Bejan e Merckx (2007), Bejan e Lorente (2008), Miguel (2013) e Rocha et al. (2013).

Um sistema de escoamento possui duas propriedades básicas, o escoamento (por exemplo, fluido, calor, massa ou informação) e a estrutura por onde ele flui. Um raio, por exemplo, é um sistema de escoamento de uma descarga elétrica. Em um pequeno instante de tempo são criados braços luminosos revelando a estrutura mais eficiente para dispersar a corrente elétrica de um volume (nuvem) a um ponto (chão, árvore, para-raios ou outra nuvem). Assim como em raios, vários outros sistemas apresentam o padrão de estrutura em forma de árvore chamado de *treelike*. Este padrão é o formato que facilita de forma mais eficaz o fluxo de um ponto para um volume ou de um volume para um ponto (Bejan e Zane, 2012).

Mesmo sendo uma forma muito comum na natureza, o padrão *treelike* é apenas uma das várias manifestações da Lei Constructal. Outras formas mais complexas e variadas podem ser observadas, como a estrutura de um iceberg, perpendicular ao vento, de forma a transferir a quantidade de movimento do ar para o seu deslocamento na água. Assim como formas de animais que evoluíram para mover a sua massa cada vez melhor em seu ambiente, conseguindo percorrer maiores distâncias com menos energia (Bejan e Zane, 2012).

A Lei Constructal dita que sistemas de escoamento devem evoluir através do tempo. O que é interessante neste princípio físico é que ele ocorre em diferentes escalas. Cada árvore, cada arroio e cada estrada são componentes que possuem um sistema de escoamento e estão inseridos em estruturas maiores, como florestas, rios e redes de transporte. Os componentes de diferentes tamanhos se unem facilitando o escoamento global (Bejan, 2000; Bejan e Zane, 2012).

Não se pode confundir a lei constructal com otimização (obtenção de mínimo ou máximo) visto que o princípio não trata sobre o destino, mas sim sobre a direção em que a evolução ocorre, em busca do sistema menos imperfeito. A Teoria Constructal aborda em síntese a minimização das imperfeições de um sistema. Ela não é um meio de otimização mas sim uma visualização de que a forma geométrica e estrutura dos sistemas de fluxo seguem um princípio físico de distribuição das imperfeições. A aplicação desta teoria em projetos de engenharia gerou o surgimento do método

Constructal Design.

O método *Constructal Design* é o método de aplicação da Teoria Constructal em sistemas de fluxo. De acordo com Bejan e Lorente (2008) o método não é a otimização em si do problema mas sim a definição dos objetivos e restrições do mesmo, visando a melhor distribuição das imperfeições.

2.1.1 CONSTRUCTAL DESIGN EM PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DO CALOR

O calor é definido como a forma de energia que pode ser transferida de um sistema para outro como resultado da diferença de temperatura (Çengel e Ghajar, 2012). A área da ciência que se concentra no estudo das taxas de transferência de energia é a transferência de calor (Hahn e Ozisik, 2012; Bejan, 2004; Siegel e Howell, 2002). Existem três modos de transferência de calor, a transferência por condução, por convecção e por radiação. A diferença de temperatura entre dois meios é o que determina a transferência de calor em todos os modos de transferência. Portanto o calor é transferido do meio mais quente para o mais frio, até que os dois sistemas entrem em equilíbrio térmico.

Este estudo foca a transferência de calor por condução, também chamada de difusão. A transferência por condução ocorre entre partículas adjacentes em uma substância, a energia em média, é passada das partículas mais energéticas para as menos energéticas. O mecanismo físico da difusão está relacionado aos efeitos de translação, rotação e vibração entre moléculas, bem como, pelo transporte de elétrons livres (Incropera et al., 2008). Devido à maior força intermolecular existente em domínios sólidos (especialmente nos materiais metálicos) há uma maior magnitude da transferência de calor por difusão nestes meios, enquanto nos fluidos e gases, sua importância é menor e outros mecanismos de transferência de calor (convecção e radiação térmica) passam a ser mais importantes.

Em problemas de transferência de calor, é possível considerar a variação em relação ao tempo, classificando o problema em regime transiente ou permanente (estacionário) onde não há variação ao longo do tempo. A hipótese de regime permanente tem sido empregada na grande maioria dos problemas pesquisados sobre otimização geométrica de cavidades inseridas em sólidos com geração de calor e será adotada neste estudo, visando a simplificação do problema. A equação da difusão do calor na sua forma completa é dada, segundo Incropera et al. (2008), por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.1)$$

A Eq. (2.1) apresenta a equação da difusão do calor em um domínio tridimensional em um sistema de coordenadas cartesianas (dimensões x , y e z) e dependente do tempo t (transiente). O calor específico C_p , assim como a massa específica ρ são propriedades termodinâmicas relacionadas ao acúmulo de energia ao longo do tempo. Quando o problema é analisado em regime permanente, o termo à direita é considerado nulo. A constante k é a condutividade térmica do material, enquanto o termo q''' representa a taxa de geração de energia por unidade de volume presente no sistema estudado.

Através da Eq. (2.1) o campo de temperaturas pode ser resolvido no domínio do problema estudado. Com o campo de temperaturas é possível determinar e analisar a distribuição da temperatura em todo domínio do sistema. No problema pesquisado neste trabalho a determinação do campo de temperatura é crucial para a extração da temperatura máxima presente no sistema de acordo com a geometria da cavidade resfriadora.

A metodologia do *Constructal Design* é empregada em vários estudos presentes na literatura para a otimização geométrica de problemas de transferência de calor, como pode-se observar nos estudos de Rocha et al. (2002), onde o problema é caracterizado pelo fluxo de calor de um volume para um ponto. Na Fig. 2.2 é possível observar o domínio computacional, onde a geometria de caminhos constituídos de um material de alta condutividade foi otimizada com o objetivo de minimizar a resistência térmica presente no disco com geração de calor.

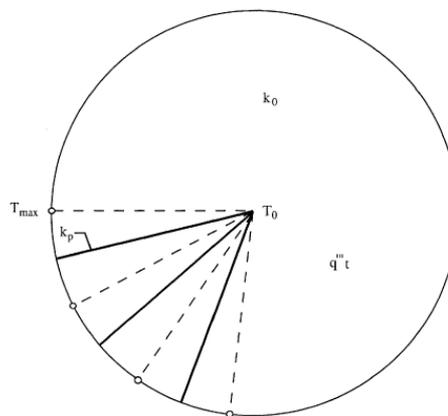


Figura 2.2. Otimização de caminhos de alta condutividade em disco sólido gerador de calor (Fonte: Rocha et al., 2002).

Seguindo os preceitos do método *Constructal Design*, além dos objetivos, a otimização do

problema deve ser submetida às restrições. Nos estudos de Rocha et al. (2002), a restrição imposta para a otimização do problema representado pela Fig 2.2, é dada pela equação a seguir:

$$\phi = \frac{Vm}{(Vt)} \quad (2.2)$$

onde, ϕ representa a restrição de volume, Vm representa o volume do material de alta condutividade e Vt o volume total do domínio do disco. Nestes estudos, Rocha et al. (2002) concluem que, com o crescimento do sistema a ser otimizado, o padrão com braços emerge em detrimento de uma geometria radial simples. A complexidade geométrica dos caminhos de alta condutividade que minimizam a resistência térmica é proporcional à expansão do domínio, como pode ser observado na Fig. 2.3. No trabalho de Rocha et al. (2002) fica evidente que geometrias mais complexas possuem maior capacidade em minimizar a resistência térmica do domínio estudado.

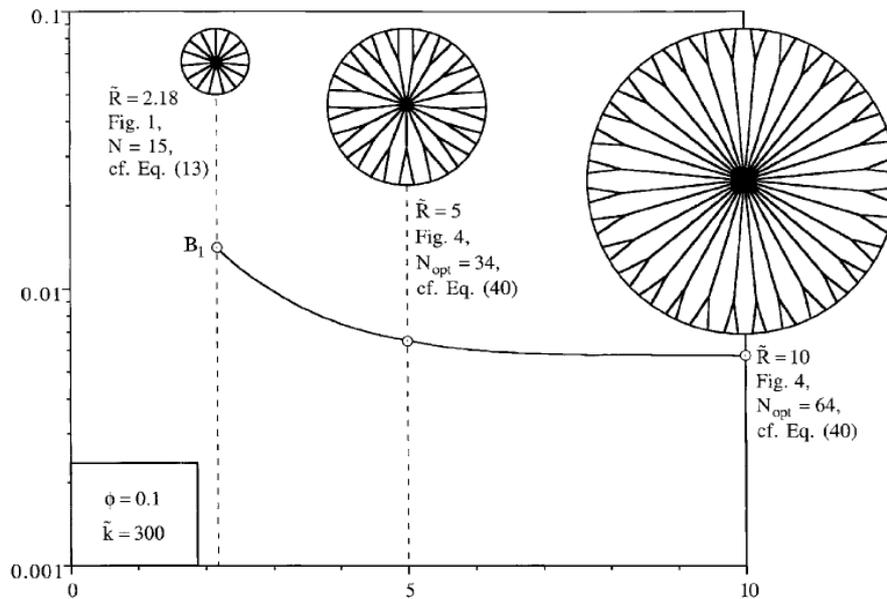


Figura 2.3. Aumento da complexidade geométrica de caminhos de alta condutividade (Fonte: Rocha et al., 2002).

Nos estudos de Biserni et al. (2004), foi investigada a otimização geométrica de uma cavidade resfriadora inserida em um meio com geração de calor. A cavidade estudada apresenta a forma simples de um C, inserida no sólido retangular como apresenta a Figura 2.4. Aplicando o

método *Constructal Design*, foram definidas a máxima temperatura em excesso adimensional como função objetivo e restrições na busca pela geometria ótima.

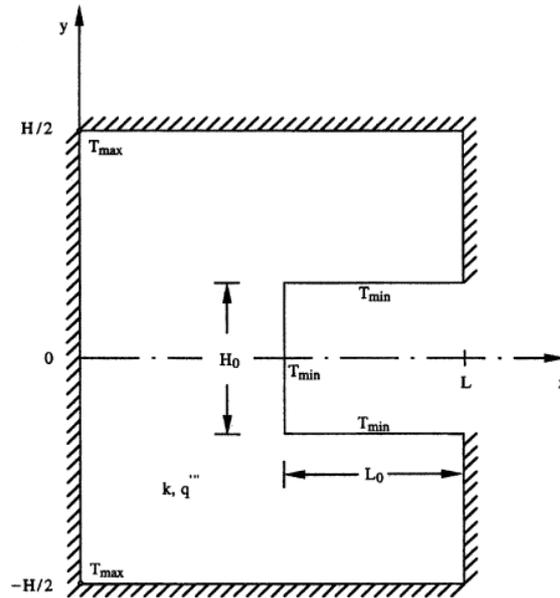


Figura 2.4. Cavidade resfriadora em forma de C investigada por Biserni et al. (2004)

Assim como foi aplicada uma restrição no trabalho de Rocha et al. (2002), na investigação feita por Biserni et al. (2004) a restrição seguiu a mesma lógica de uma área limite na qual se busca a geometria ótima para a cavidade em C. A equação abaixo ilustra a restrição aplicada à cavidade em Biserni et al. (2004):

$$\phi = \frac{H_0 L_0}{HL} \quad (2.3)$$

Na Eq. (2.3), ϕ representa a restrição de área aplicada à cavidade, e os graus de liberdade são definidos pela razão entre as variáveis que compõem as dimensões da cavidade (H_0/L_0) e do sólido (H/L). Vale destacar que o grau de liberdade (H/L) é uma função da restrição de área do domínio sólido.

Nos estudos de Lorenzini et al. (2011) a geometria proposta pela cavidade possui maior complexidade, em forma de Y, gerando um número maior de restrições e graus de liberdade. Os graus de liberdade em pesquisas com o *Constructal Design* representam as medidas, normalmente

tratadas em função de razões, que podem variar na busca pela forma e estrutura ótima. Porém, estes graus de liberdade devem ser submetidos às restrições como observado nos trabalhos já mencionados, Rocha et al. (2002) e Biserni et al.(2004).

2.2 *SIMULATED ANNEALING* (SA)

O algoritmo de otimização combinatória *Simulated Annealing* (SA) foi criado com inspiração em um processo termodinâmico de produção e preparação de materiais mais resistentes, como metais e vidros, onde inicialmente se aquece o material em altas temperaturas e, posteriormente, o mesmo é lentamente resfriado para obter a melhor distribuição de energia, onde a energia entre suas moléculas é minimizada. Com esta meta-heurística o algoritmo SA busca a otimização de sua função objetivo em analogia com a variação de energia do material ao longo do tempo (Eglese, 1990).

Em Metropolis et al. (1953) foi proposto um algoritmo baseado na minimização da energia, movimento ou agitação dos átomos de um material, como processo de minimização de problemas. No trabalho de Kirkpatrick et al. (1983) foi aplicado o algoritmo SA pela primeira vez em problemas de otimização. Foi proposta a execução do algoritmo de Metropolis et al. (1953) várias vezes para vários níveis de um parâmetro de temperatura, o qual decai ao longo do tempo, e simula o processo termodinâmico de recozimento de materiais.

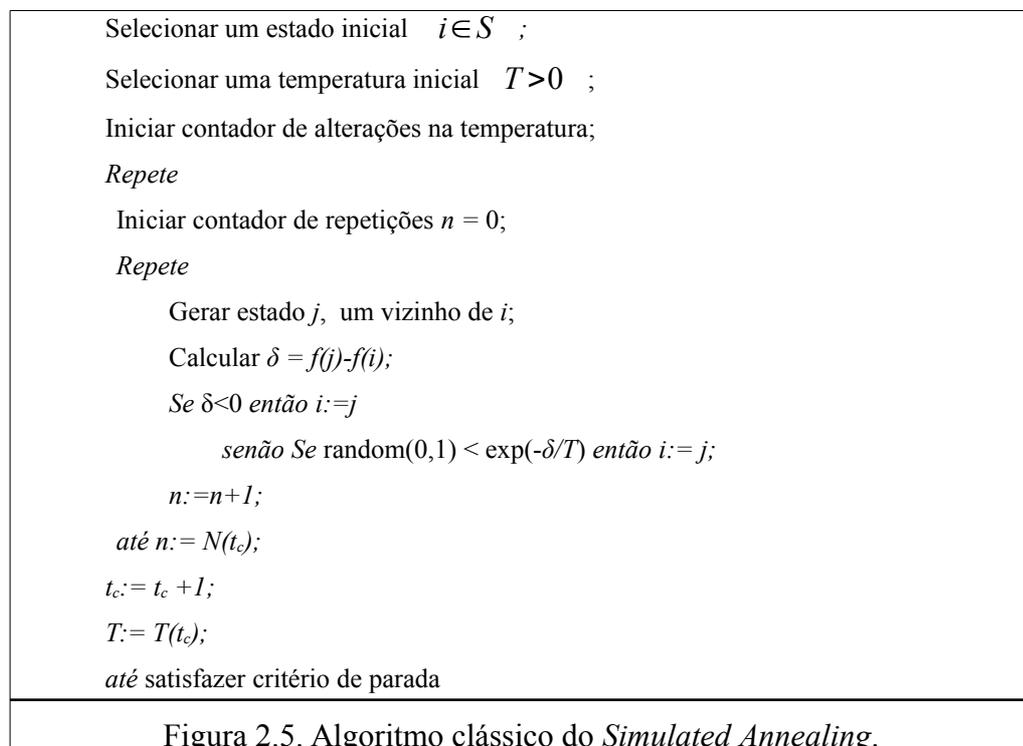
O algoritmo sorteia uma possível solução no espaço de busca e inicia a otimização propondo novas soluções vizinhas. Ao calcular o valor da função objetivo para a solução atual, este é armazenado como a solução vigente. Em uma nova iteração do algoritmo, um vizinho à solução corrente é proposto com a perturbação da solução atual para o próximo ponto no espaço de busca. Esta perturbação é gerada pela função de *annealing* e pode ser relacionada com a temperatura da iteração corrente do SA. Quanto menor a temperatura, menor a perturbação e a busca é refinada para pontos próximos ao ponto atual, ou solução atual.

Ao gerar um novo vizinho, se o cálculo da função objetivo gerar um valor menor que a atual solução, este se torna a melhor solução para o algoritmo SA e novos vizinhos serão propostos a partir desta nova solução. Este processo se repete até satisfazer o critério de parada do SA. Exemplos de critérios de parada são o número de iterações sem mudanças na solução ótima ou a temperatura alcançar um determinado valor denominado temperatura de congelamento. Esta etapa do algoritmo pode ser adaptada, e mesmo a temperatura pode sofrer um processo chamado de

reannealing, quando a mesma é recalculada para um valor mais alto depois de ter atingido o zero. Segundo demonstra Eglese (1990) várias adaptações podem ser feitas no SA para melhorar o tempo de processamento e desempenho do algoritmo na busca pelo ótimo global.

A Fig. 2.5 apresenta o algoritmo clássico do *Simulated Annealing*, presente nos estudos de Eglese (1990). De acordo com a Fig. 2.5, o algoritmo começa propondo um estado inicial i dentro do espaço de soluções S , assim como uma temperatura inicial do algoritmo indicada por T . A variável t_c é usada para controlar o número de modificações na temperatura, é inicializada com o valor zero antes da primeira repetição. A primeira repetição entrará em execução e continuará neste estado de iteração até que um determinado critério de parada seja satisfeito.

O algoritmo da Fig. 2.5 segue dentro da primeira repetição com a inicialização da variável n , usada neste contexto para controlar o número de vezes em que serão propostos e testados novos vizinhos j do estado atual i . Logo, o algoritmo entra em um segundo laço, o qual executará até que n satisfaça o valor dado pela função $N(t_c)$. A função $N(t_c)$ determina o número máximo que n poderá assumir em cada nível de temperatura t_c , ou seja, o número máximo de propostas para cada nível de temperatura. Por padrão do MATLAB, e nesta pesquisa, o parâmetro n é utilizado com valor 1, ou seja, apenas uma solução é visitada para cada nível de temperatura.



Finalmente, dentro da segunda estrutura de repetição, presente no algoritmo da Fig. 2.5,

serão gerados vizinhos j a partir do estado atual i . O próximo passo é calcular δ , que representa a diferença entre o valor da função objetivo $f(j)$ em relação ao valor de $f(i)$. Sendo δ menor que zero, então o estado j é copiado para o estado atual i , permanecendo este como a melhor solução até que seja encontrada outra melhor ou até o algoritmo satisfazer o critério de parada.

Ainda sobre o algoritmo da Fig. 2.5, o controle da temperatura é dado pela função de resfriamento $T(t_c)$, que deve diminuir a temperatura gradualmente em uma determinada taxa de resfriamento. A função $T(t_c)$ também é conhecida como o parâmetro de *cooling schedule* do algoritmo SA. No ambiente de desenvolvimento MATLAB, o algoritmo SA possui por padrão três funções de *cooling schedule* que podem ser passadas como parâmetro na configuração do algoritmo. Neste pesquisa, são propostas e implementadas mais três novas funções híbridas, as quais serão abordadas com maiores detalhes ao longo do texto.

A função de aceitação dada por $\exp(-\delta/T)$ define a probabilidade de aceitar um vizinho j cujo o valor calculado para $f(j)$ seja pior que a solução atual i . Em altas temperaturas, logo no início da execução do algoritmo, a probabilidade de aceitar estados piores que o estado atual é maior do que em temperaturas mais frias. Esta característica do *Simulated Annealing* é crucial para se evitar a convergência para mínimos locais.

2.2.1 MODELO DE RESFRIAMENTO

O algoritmo SA possui como parâmetro de controle, em cada iteração, a temperatura, a qual deve ser reduzida ao longo da execução do algoritmo. A temperatura é importante e influencia tanto a função de aceitação de candidatos ao ponto ótimo quanto a vizinhança a ser explorada. O conjunto de parâmetros que configuram o SA, ou seja, a temperatura inicial, a forma como a mesma é reduzida, o número de propostas de soluções vizinhas para cada temperatura e o critério de parada, podem ser considerados como *annealing schedule*, já o termo *cooling schedule* é empregado apenas ao modelo de resfriamento da temperatura (Eglese et al., 1990). De acordo com Bertsimas e Tsitsiklis (1993), a escolha do *cooling schedule* influencia a qualidade da solução obtida.

A temperatura de controle do algoritmo SA, é inicializada com um valor determinado como parâmetro, como cem (100) por exemplo, de preferência um valor alto. Durante a execução do SA, a temperatura é reduzida, lentamente, por um modelo determinado, um método específico para atualizar a temperatura em função da iteração atual. Segundo Kirkpatrick et al. (1983) em altas temperaturas soluções distantes da atual são exploradas, enquanto que em baixas temperaturas o

algoritmo desenvolve um processo de refinamento na busca pelo ótimo global em torno da exploração de soluções e configurações próximas a configuração atual do sistema.

O modelo de resfriamento clássico proposto por Kirkpatrick et al. (1983) consiste em uma taxa de redução constante da temperatura da iteração corrente de 0,9, proporcionando uma redução exponencial na temperatura. Porém, de acordo com o mesmo estudo, a determinação do *cooling schedule*, deve ser dada através de tentativa e erro para um determinado problema. Assim como afirma Eglese (1990), o modelo de resfriamento (*cooling schedule*) pode ser alterado e outros métodos utilizados, sendo que este parâmetro do algoritmo é definido de forma empírica, ou seja através da observação dos resultados de várias execuções do algoritmo, não existe um parâmetro melhor, mas sim aquele que melhor se adapta ao problema estudado.

Em Triki et al. (2004), o estudo de diferentes tipos de vizinhanças, ou seja, a discretização do espaço de soluções, confirma que uma boa estrutura é crucial para que o algoritmo encontre boas soluções. Existem na literatura vários estudos comparando diferentes *cooling schedules* e variantes do SA clássico (Szu e Hartley, 1987; Hajek, 1988; Ingber, 1989; Ingber, 1993; Nourani e Andresen, 1998; El-Boury et al., 2007; Schneider e Puchta, 2010; Kastanya, 2013; Brusco, 2014). Porém, cada estudo é direcionado para um determinado tipo de problema e os resultados não garantem a eficácia generalizada dos métodos pesquisados, indo ao encontro da ideia da determinação experimental do *cooling schedule* defendida por Kirkpatrick et al. (1983). Brusco (2014), avaliou vários tipos de *cooling schedule* para o problema de seleção de variáveis, onde foi possível identificar aquele que melhor se adapta ao problema específico pesquisado. O que se pode observar dentro da literatura pesquisada é que não existe um parâmetro de *cooling schedule* unânime, para diferentes classes de problemas. Também não foi encontrado um estudo da utilização do SA em um problema de transferência de calor e otimização geométrica em conjunto com o *Constructal Design*, e desta forma não existe a indicação de um *cooling schedule* universal para o problema estudado aqui. Portanto, nesta pesquisa são investigados alguns modelos de *cooling schedules* baseados nas opções disponíveis na ferramenta de otimização do ambiente MATLAB e novos modelos híbridos, baseados nos modelos padrões, são propostos.

2.2.2 FUNÇÃO DE ACEITAÇÃO

Uma forma do algoritmo evitar mínimos locais é a aceitação de soluções piores que a atual com a intenção de reiniciar o processo de otimização em uma outra região do espaço de busca. Esta

aceitação também é controlada pela temperatura do SA e é dada por uma probabilidade. Se o valor da função objetivo da solução vizinha é menor ou igual ao valor gerado pela solução atual, a nova solução é aceita imediatamente, porém se é maior, então deve respeitar a probabilidade de aceitação dada pela equação abaixo (Ingber, 1993):

$$P = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\Delta FO}{\max(T)}\right)} \quad (2.4)$$

onde ΔFO é a diferença entre o valor retornado pela FO (Função Objetivo) da nova configuração em relação ao valor da FO calculado para o melhor ponto. Assim, ao se propor um novo vizinho da solução atual, o valor da função objetivo, a qual se quer minimizar, é calculada para este novo vizinho. Logo, é calculada a ΔFO subtraindo do valor da FO da solução vizinha o valor da FO da solução atual. A probabilidade de aceitação também depende da temperatura da iteração atual do algoritmo, como o algoritmo SA do MATLAB aceita temperaturas diferentes para cada grau de liberdade, no cálculo da Eq. (2.4) é utilizada a maior temperatura presente no vetor T , por isso é empregada a função $\max()$ para obter a máxima temperatura do vetor (MATLAB, 2000).

Portanto, em altas temperaturas, o algoritmo SA tem maior probabilidade de aceitar soluções do espaço de busca em que o valor da sua função objetivo é pior do que a configuração atual. Este mecanismo ajuda ao algoritmo evitar mínimos locais. Porém, em baixas temperaturas esta probabilidade é muito menor e novas configurações somente serão aceitas se a sua avaliação indicar uma melhora na solução corrente (Eglese, 1990).

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DA CAVIDADE EM Y

O problema de transferência de calor estudado nesta pesquisa foi proposto por Lorenzini et al. (2011) e foi posteriormente otimizado empregando AG por Lorenzini et al. (2014a). O problema consiste em um sólido com geração de calor constante que deve ser removido por meio de uma cavidade em forma de Y, que se encontra a uma temperatura mínima. A variação da geometria desta cavidade busca proporcionar um melhor desempenho térmico no sistema. O processo de otimização consiste em resolver o campo de temperaturas para uma determinada configuração da geometria da cavidade em Y e extrair a temperatura máxima encontrada no domínio demonstrado na Fig. 3.1. A melhor geometria será aquela onde a temperatura máxima no domínio for a menor entre as geometrias investigadas. Neste capítulo será apresentada a modelagem matemática (equação governante e condições de contorno) para solução do campo de temperaturas e a função objetivo a ser minimizada neste problema.

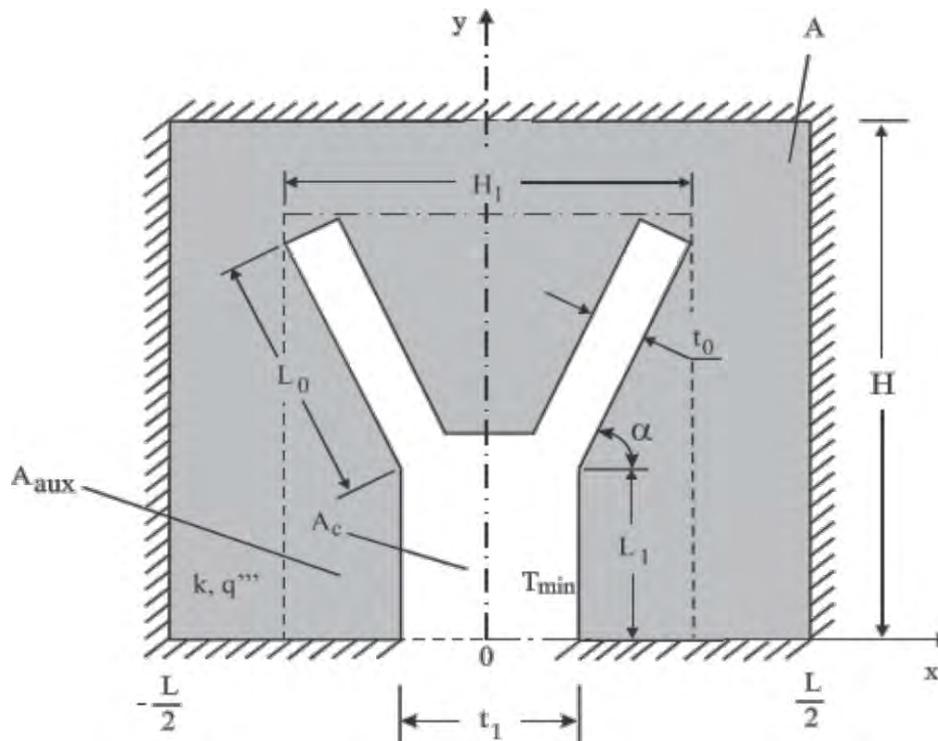


Figura 3.1. Domínio computacional do primeiro problema a ser otimizado (Fonte: Lorenzini et al., 2011).

A Figura 3.1 apresenta o domínio computacional do primeiro problema de transferência de calor que será estudado no presente trabalho. A configuração é bidimensional com a terceira

dimensão W perpendicular ao plano do desenho. Na região em cinza pode se observar o sólido com geração de calor constante, representada por q''' (Wm^{-3}), com área A . Este sólido também possui uma condutividade térmica representada por k . As superfícies externas ao sólido são consideradas adiabáticas, ou seja, perfeitamente isoladas termicamente (Fig. 3.1). O fluxo de calor gerado será removido apenas pela cavidade em Y com uma temperatura mínima prescrita T_{min} . Esse processo representa a passagem de um fluido refrigerante em mudança de fase a baixa temperatura escoando pela região da cavidade.

Como hipótese simplificativa o coeficiente de transferência de calor é considerado muito alto. Portanto, a resistência convectiva pode ser desconsiderada em comparação à resistência de condução do sólido. Desta forma considera-se a temperatura T_{min} em toda a superfície da cavidade.

O objetivo deste estudo é encontrar a forma geométrica ótima (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α) que resulte em uma resistência térmica mínima global $(\theta_{max} - \theta_{min})/(q'''A)$. De acordo com o método *Constructal Design*, esta otimização deve respeitar três restrições, a restrição de área total, área da cavidade e área auxiliar, respectivamente representadas pelas equações:

$$A = HL \quad (3.1)$$

$$A_c = L_1 t_1 + 2 L_0 t_0 + t_1 t_0 \cos \alpha - t_0^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.2)$$

$$A_{aux} = (L_1 + L_0 \sin \alpha + t_0 \cos \alpha)(2 L_0 \cos \alpha + t_1) \quad (3.3)$$

O terceiro e quarto termos da Eq. (3.2) representam a área do trapézio que une os ramos bifurcados ao ramo simples da cavidade em Y. Na Eq. (3.3), o primeiro e o segundo termos entre parênteses no lado direito da equação representam o comprimento e a altura ocupados pela cavidade, respectivamente. As Eqs. (3.2) e (3.3) podem ser expressas como a fração da cavidade em relação à área total e a fração da área auxiliar em relação à área total e são dadas, respectivamente, por:

$$\phi = A_c / A \quad (3.4)$$

$$\psi = A_{aux} / A \quad (3.5)$$

Deve ser mencionado que a Eq. (3.2) é válida somente para o seguinte intervalo: $0 < \alpha < \pi/2$ rad.

O cálculo do campo de temperaturas presente no sólido em função da geometria é dado pela resolução numérica da equação da difusão do calor, representada pela Eq. (2.1). Como hipótese simplificativa do problema, considera-se o problema em regime permanente, o que faz o termo transiente, lado direito da Eq. (2.1), ser igual a zero. Considerando também o espaço bidimensional, o termo referente à terceira dimensão z é anulado. Sendo assim, colocando em evidência a condutividade k é possível reescrever a Eq. (2.1) da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad (3.6)$$

onde θ é o campo de temperaturas no sólido (K ou °C), x e y são as coordenadas espaciais (m).

Com o processo de transformação adimensional da Eq. (3.6), o termo q'''/k é evidenciado em todos os termos o que resulta na unidade 1 no terceiro termo da equação da difusão do calor adimensional, e passa a ser representada, respectivamente, pela equação e suas variáveis adimensionais relacionadas abaixo:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}^2} + 1 = 0 \quad (3.7)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta - \theta_{min}}{q''' \cdot \frac{A}{k}} \quad (3.8)$$

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{H}, \tilde{L} = \frac{x, y, t_0, t_1, L_0, L_1, H, L}{A^{1/2}} \quad (3.9)$$

Após o processo de transformação adimensional, as condições de contorno de fluxo nulo impostas nas superfícies externas do domínio do problema, assim como as condições de contorno impostas na superfície da cavidade em Y, podem ser observadas a seguir:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}}=0 \quad \text{em} \quad \tilde{x}=-\frac{\tilde{L}}{2} \quad \text{ou} \quad \tilde{x}=\frac{\tilde{L}}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}}=0 \quad \text{em} \quad \tilde{y}=0 \quad \text{e} \quad -\frac{\tilde{L}}{2} \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{t}_1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\tilde{t}_1}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}}{2} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}}=0 \quad \text{em} \quad \tilde{y}=\tilde{H} \quad \text{e} \quad -\frac{\tilde{L}}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}}{2} \quad (3.12)$$

$$\tilde{\theta}=\tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{L}_1 \quad \text{e} \quad \tilde{x}=-\frac{\tilde{t}_1}{2} \quad \text{ou} \quad \tilde{x}=\frac{\tilde{t}_1}{2} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}=\tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{L}_1 \leq \tilde{y} \leq \tilde{L}_1+\tilde{L}_0 \sin \alpha \quad \text{e} \quad \frac{\tilde{t}_1}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{t}_1}{2}+\tilde{L}_0 \cos \alpha \\ \text{ou} \quad -\frac{\tilde{t}_1}{2}-\tilde{L}_0 \cos \alpha \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{t}_1}{2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}=\tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{L}_1+\tilde{L}_0 \sin \alpha \leq \tilde{y} \leq \tilde{L}_1+\tilde{L}_0 \sin \alpha+\tilde{t}_0 \sin \alpha \quad \text{e} \\ \frac{\tilde{t}_1}{2}+\tilde{L}_0 \cos \alpha \leq \frac{\tilde{t}_1}{2}+\tilde{L}_0 \cos \alpha-\tilde{t}_0 \cos \alpha \quad \text{ou} \\ -\frac{\tilde{t}_1}{2}-\tilde{L}_0 \cos \alpha \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{t}_1}{2}-\tilde{L}_0 \cos \alpha+\tilde{t}_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}=\tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{L}_1+\tilde{t}_0 \sin \alpha \leq \tilde{y} \leq \tilde{L}_1+\tilde{L}_0 \sin \alpha-\tilde{t}_0 \sin \alpha \quad \text{e} \\ \frac{\tilde{t}_1}{2}+\tilde{t}_0 \cos \alpha \leq \frac{\tilde{t}_1}{2}+\tilde{L}_0 \cos \alpha-\tilde{t}_0 \cos \alpha \quad \text{ou} \\ -\frac{\tilde{t}_1}{2}+\tilde{t}_0 \cos \alpha \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{t}_1}{2}-\tilde{L}_0 \cos \alpha+\tilde{t}_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\tilde{\theta}=\tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{y}=\tilde{L}_1+\tilde{t}_0 \sin \alpha \quad \text{e} \quad -\frac{\tilde{t}_1}{2}+\tilde{t}_0 \cos \alpha \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{t}_1}{2}-\tilde{t}_0 \cos \alpha \quad (3.17)$$

A forma adimensional das Eqs. (3.1), (3.2) e (3.3) é dada respectivamente por:

$$1=\tilde{H} \tilde{L} \quad (3.18)$$

$$\Phi = \tilde{L}_1 \tilde{t}_1 + 2 \tilde{L}_0 \tilde{t}_0 + \tilde{t}_1 \tilde{t}_0 \cos \alpha - \tilde{t}_0^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.19)$$

$$\Psi = (\tilde{L}_1 + \tilde{L}_0 \sin \alpha + \tilde{t}_0 \cos \alpha)(2 \tilde{L}_0 \cos \alpha + \tilde{t}_1) \quad (3.20)$$

A geometria do problema estudado possui quatro graus de liberdade que serão otimizados, três para a cavidade (t_1/t_0 , L_1/L_0 e α) e outro para a geometria do sólido (H/L). O processo é submetido às restrições de área da cavidade em relação à área total do sólido (Φ), área auxiliar (Ψ) e área total do domínio (A). O objetivo é minimizar a temperatura máxima $\tilde{\theta}_{max}$ no domínio do sólido, dada pela equação adimensional:

$$\tilde{\theta}_{max} = \frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{q''' \cdot \frac{A}{k}} \quad (3.21)$$

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DA CAVIDADE EM DUPLO-T

O problema estudado para a otimização da cavidade em forma de duplo-T é exatamente o mesmo estudado para a cavidade em forma de Y, com a única diferença no formato da cavidade e, conseqüentemente, na definição de restrições e graus de liberdade para o processo de otimização. O domínio computacional é representado pela Fig. 3.2.

Assim como o problema da cavidade em Y, o domínio computacional da cavidade em duplo-T possui geração de calor em toda a sua extensão e este calor só pode ser removido através da cavidade resfriadora. A otimização da geometria da cavidade busca minimizar a resistência térmica do domínio sólido. O campo de temperaturas do domínio é resolvido através do modelo matemático e numérico, extraindo no final o ponto com temperatura máxima, a qual se pretende minimizar através da geometria ótima.

A Fig. 3.2 apresenta o domínio da cavidade bidimensional em duplo-T estudada aqui, onde a terceira dimensão W é perpendicular ao plano do desenho. O domínio sólido, região na cor cinza da Fig. 3.2, possui geração de calor constante e uniforme representada por q''' (Wm^{-3}), com área A . A condutividade térmica é representada por k . As superfícies externas do sólido, representadas pelos lados hachurados na Fig. 3.2, estão perfeitamente isoladas, superfícies adiabáticas. Desta forma, o fluxo de calor só pode ser removido em direção à cavidade em duplo-T, a qual está a uma temperatura mínima prescrita (T_{min}). A temperatura mínima da cavidade representa a passagem de

um fluido refrigerante em mudança de fase a baixa temperatura escoando através da cavidade.

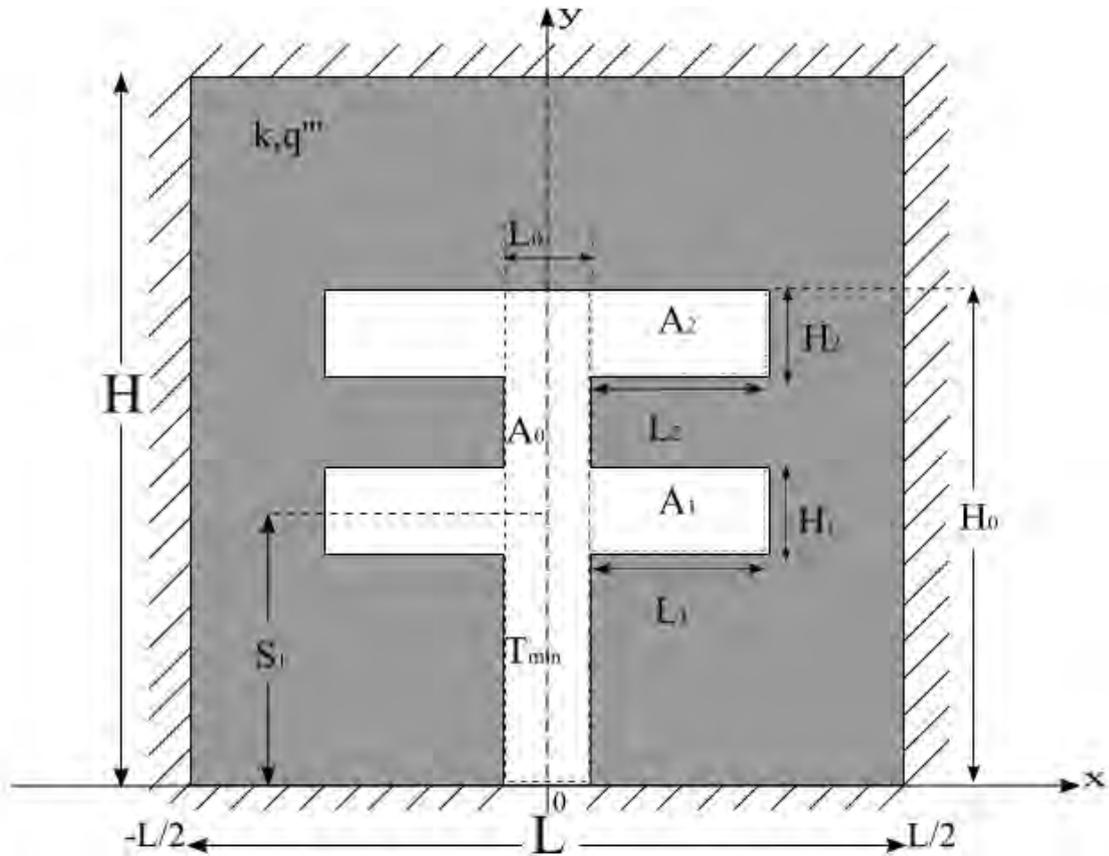


Figura 3.2. Domínio computacional da cavidade em duplo-T.

O objetivo da otimização é encontrar a geometria ótima (H/L , H_0/L_0 , H_2/L_2 , H_1/L_1 e S_1/H_0) que retorne a resistência térmica mínima global $(\theta_{\max} - \theta_{\min})/(q'''A)$. De acordo com o método *Constructal Design*, a otimização deve ser submetida às restrições da área total do domínio e da área da cavidade, representadas respectivamente pelas equações abaixo:

$$A = HL \quad (3.22)$$

$$A_c = A_0 + 2A_1 + 2A_2 \quad (3.23)$$

A Eq. 3.23 pode ser expressa como a fração da área da cavidade em relação a área total, sendo dada por :

$$\phi_c = A_c/A \quad (3.24)$$

Para a determinação do campo de temperaturas em função da geometria no domínio sólido é necessária a resolução numérica da equação da difusão do calor dada pela Eq. (2.1). Assumindo o problema em regime permanente, como efeito de hipótese simplificativa, o termo transiente da Eq. (2.1) é considerado nulo. O termo referente à terceira dimensão z é anulado devido ao problema ser tratado de forma bidimensional. Portanto, evidenciando a condutividade k , a Eq. (2.1) é reescrita de acordo com a Eq. (3.6). Vale destacar que, os ramos horizontais inferiores e superiores foram considerados simétricos, ou seja, os braços no lado direito e esquerdo são iguais.

A variável adimensional de temperatura é definida pela Eq. (3.8), e as demais variáveis adimensionais são dadas pela seguinte equação:

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{H}_0, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{H}, \tilde{L}, \tilde{S}_1 = \frac{x, y, H_0, H_1, H_2, L_0, L_1, L_2, H, L, S_1}{A^{1/2}} \quad (3.25)$$

As condições de contorno de fluxo nulo nas superfícies externas do domínio são dadas pelas Eqs. (3.10 - 3.12). As condições de contorno nas superfícies da cavidade em duplo-T, podem ser observadas a seguir:

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{x} = -\tilde{L}_0/2 \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = \tilde{L}_0/2 \quad \text{e} \quad 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{S}_1 - \tilde{H}_1/2 \quad (3.26)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{x} = -\tilde{L}_0/2 \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = \tilde{L}_0/2 \quad \text{e} \quad \tilde{S}_1 + \tilde{H}_1/2 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_0 - \tilde{H}_2 \quad (3.27)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{x} = -(\tilde{L}_1 + \tilde{L}_0/2) \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0/2 \quad \text{e} \quad \tilde{S}_1 - \tilde{H}_1/2 \leq \tilde{y} \leq \tilde{S}_1 + \tilde{H}_1/2 \quad (3.28)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{x} = -(\tilde{L}_1 + \tilde{L}_0/2) \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0/2 \quad \text{e} \quad \tilde{H}_0 - \tilde{H}_2 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_0 \quad (3.29)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{y} = \tilde{S}_1 - \tilde{H}_1/2 \quad \text{ou} \quad \tilde{y} = \tilde{S}_1 + \tilde{H}_1/2 \quad \text{ou} \quad \tilde{y} = \tilde{H}_0 - \tilde{H}_2 \\ \text{e} \quad -(\tilde{L}_1 + \tilde{L}_0/2) \leq \tilde{x} \leq -\tilde{L}_0/2 \quad (3.30)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{y} = \tilde{S}_1 - \tilde{H}_1/2 \quad \text{ou} \quad \tilde{y} = \tilde{S}_1 + \tilde{H}_1/2 \quad \text{ou} \quad \tilde{y} = \tilde{H}_0 - \tilde{H}_2 \\ \text{e} \quad \tilde{L}_0/2 \leq \tilde{x} \leq \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0/2 \quad (3.31)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{\min} \quad \text{em} \quad \tilde{y} = \tilde{H}_0 \quad \text{e} \quad -(\tilde{L}_2 + \tilde{L}_0/2) \leq \tilde{x} \leq \tilde{L}_2 + \tilde{L}_0/2 \quad (3.32)$$

A forma adimensional da Eq. (3.22), é a mesma apresentada na Eq. (3.18), visto que o domínio sólido é o mesmo. Para a Eq. (3.23) a forma adimensional é dada pelas seguintes equações:

$$\phi_c = \tilde{H}_0 \tilde{L}_0 + 2\phi_1 + 2\phi_2 \quad (3.33)$$

$$\phi_1 = \tilde{H}_1 \tilde{L}_1 \quad (3.34)$$

$$\phi_2 = \tilde{H}_2 \tilde{L}_2 \quad (3.35)$$

O objetivo é minimizar a temperatura máxima $\tilde{\theta}_{max}$ expressa pela Eq. (3.21). Para a minimização da temperatura máxima em excesso é necessária a otimização da geometria da cavidade representada pelos cinco graus de liberdade (H/L , H_0/L_0 , H_2/L_2 , H_1/L_1 e S_1/H_0). O processo de otimização é submetido às três restrições de área da cavidade (ϕ_c , ϕ_1 e ϕ_2) além da área total do sólido representada pela Eq. 3.22.

4 MÉTODO NUMÉRICO

4.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O Método de Elementos Finitos (MEF) foi proposto nos estudos de Clough (1960), para aplicações em problemas de mecânica estrutural, sendo o resultado do somatório de vários esforços e pesquisas desde estudos em Métodos Variacionais (Rayleigh, 1870) aos estudos de Diferenças Finitas (Richardson, 1910). O MEF parte do princípio da discretização do domínio estudado em consideração à limitação humana de analisar um sistema complexo em poucas operações. Desta forma, o domínio estudado é dividido em pequenos elementos que podem ser analisados separadamente e depois agrupados para formar uma análise completa do mesmo através de uma solução aproximada (Zienkiewicz e Taylor, 2000).

A aproximação por diferenças finitas de uma equação diferencial é dada pela substituição das derivadas da equação por quocientes diferenciais que envolvem os valores da solução em uma malha de pontos discretos presentes no domínio. As equações discretas resultantes são resolvidas, antes impondo as condições de contorno, para os valores da solução em cada ponto da malha discretizada. O método é simples em conceito, porém possui desvantagens relacionadas à imprecisão e incapacidade de lidar com condições de contorno em domínios geométricos complexo, segundo Reddy (1984).

No campo dos métodos variacionais de equações diferenciais, estas são colocadas na forma variacional equivalente, e a solução aproximada é considerada uma combinação ($\sum c_j \varphi_j$) dada por funções de aproximação φ_j . Sendo c_j o parâmetro determinado pela forma variacional da equação diferencial. Mas este método também possui desvantagens quando se tenta construir funções de aproximação para domínios complexos (Reddy, 1984). Porém, segundo Reddy e Gartling (1994), além do método variacional clássico o MEF também pode se basear no método de resíduos ponderados (Galerkin, mínimos quadrados, entre outros).

De acordo com Reddy (1984), o MEF superou as dificuldades do método variacional por prover um procedimento sistemático para a derivação das funções de aproximação. Este procedimento sistemático possui duas principais abordagens que tornam o MEF superior aos demais métodos citados. Primeiramente, o domínio geométrico complexo do problema é representado por uma coleção de subdomínios geometricamente simples chamados de elementos finitos. A segunda abordagem fundamental para o MEF é derivação das funções de aproximação, em cada elemento finito, baseada na ideia de que qualquer função contínua pode ser representada por uma combinação

de polinômios algébricos. As funções de aproximação são derivadas usando conceitos da teoria de interpolação, sendo chamadas de funções de interpolação (*interpolation functions*). Desta forma, o MEF pode ser interpretado como uma aplicação por partes do método variacional, em que as funções de aproximação são polinômios algébricos e os parâmetros indeterminados representam os valores da solução em um número finito de pontos pré-selecionados, conhecidos como nós. Através da teoria da interpolação determina-se a ordem das funções de interpolação de acordo com o número de nós (*nodes*) em cada elemento finito (Reddy, 1984). A Figura 4.1 demonstra um exemplo da divisão do domínio estudado em uma malha de elementos finitos e seus respectivos nós. A Figura 4.1(a) ilustra o domínio completo, enquanto a Fig. 4.1(b) ilustra uma visualização aproximada do canto inferior direito do domínio com os elementos e nós da região e a Fig. 4.1(c) ilustra um elemento específico com número do elemento e número dos nós do mesmo.

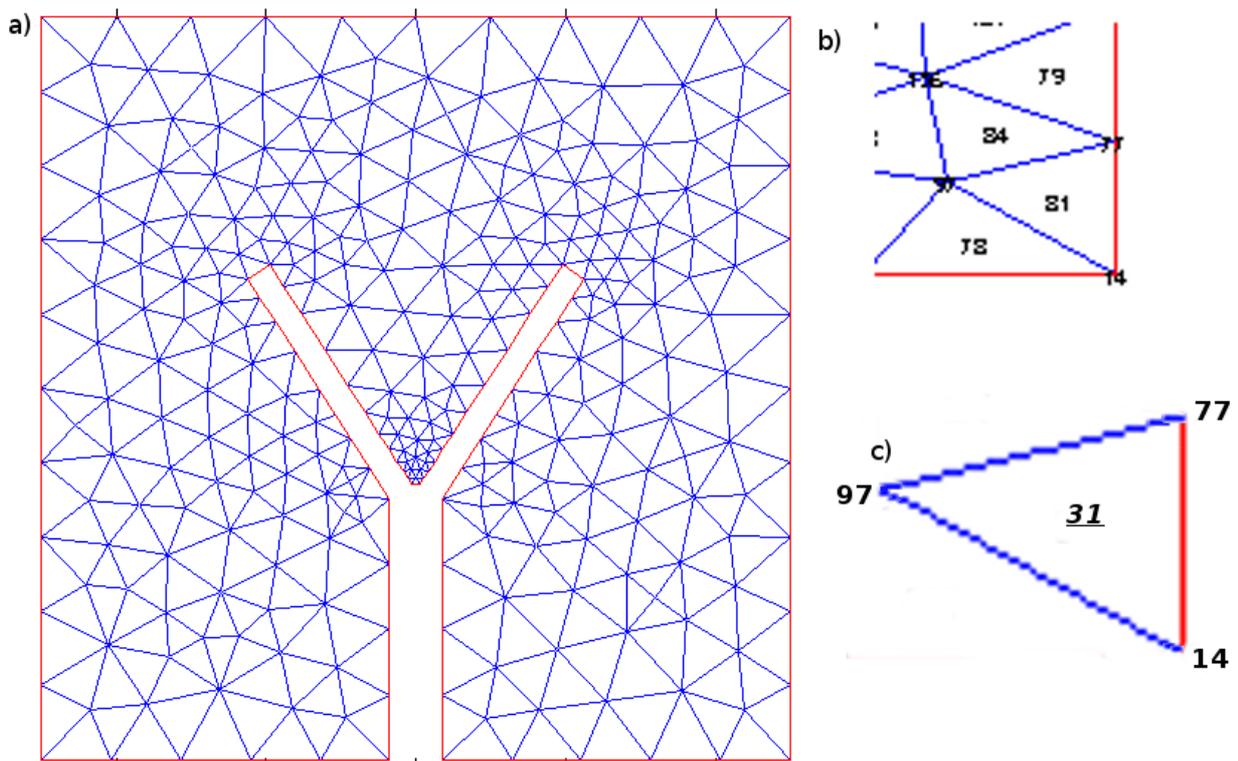


Figura 4.1. Discretização espacial da cavidade em Y:

- a) domínio completo dividido em uma malha de elementos finitos triangulares;
- b) aproximação do domínio com identificação dos elementos e seus respectivos nós;
- c) elemento número 31 em detalhe dos nós 14, 77 e 97.

4.2 ESTUDO DE INDEPENDÊNCIA DE MALHA PARA A CAVIDADE EM Y

A função representada pela Eq. (3.21) será resolvida numericamente através da resolução da Eq. (3.7) em todo o domínio do sólido utilizando o MEF (Reddy e Gartling, 1994; Zienkiewicz e Taylor, 2000). Com o campo de temperatura determinado através do MEF, é possível extrair o ponto de temperatura máxima ou excesso de calor, representada por $\tilde{\theta}_{\max}$. Para minimizar o excesso de temperatura, são calculados e comparados os valores de $\tilde{\theta}_{\max}$ para diferentes configurações da geometria (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α).

Para calcular os campos de temperatura através do MEF é utilizado o ambiente MATLAB com a ferramenta *PDE Tool-Box* para resolução de equações diferenciais parciais, como é o caso da Eq. (3.7). O método de elementos finitos empregado é baseado em elementos triangulares. A malha gerada (discretização espacial) não é uniforme e varia entre as configurações geométricas estudadas. A equação a seguir apresenta o critério de independência de malha:

$$|(\tilde{\theta}_{\max}^i - \tilde{\theta}_{\max}^{i+1})/\tilde{\theta}_{\max}^i| < 1 \times 10^{-4} \quad (4.1)$$

O tamanho apropriado da malha é determinado através de refinamentos sucessivos até que o valor da Eq. (4.1) seja menor do que 1×10^{-4} . Na Eq. (4.1) $\tilde{\theta}_{\max}^i$ representa o valor máximo de temperatura calculado com a malha corrente, e $\tilde{\theta}_{\max}^{i+1}$ corresponde ao valor calculado com a malha refinada, ou seja, quatro vezes mais elementos do que a malha anterior.

A Tabela 4.1 demonstra o processo de refinamento de malha com o objetivo de encontrar uma malha independente, ou seja, que não influencie no resultado final do campo de temperaturas. Após testes realizados com um intervalo de 2240 a 143360 elementos triangulares, a malha independente foi encontrada com o terceiro refinamento. Os testes de malha foram executados para uma geometria com os seguintes parâmetros ($\phi = 0,05$; $\psi = 0,5$; $H/L = 1,0$; $t_1/t_0 = 2,0$; $L_1/L_0 = 0,5$; $\alpha = 0,94$).

Tabela 4.1. Teste de independência de malha.

Número de Elementos	$\tilde{\theta}_{\max}$	$ (\tilde{\theta}_{\max}^i - \tilde{\theta}_{\max}^{i+1})/\tilde{\theta}_{\max}^i $
2240	0,079046	$5,6600 \times 10^{-4}$
8960	0,079001	$1,8978 \times 10^{-4}$
35840 (Malha Independente)	0,078986	$5,6971 \times 10^{-5}$
143360	0,078982	-----

Já a verificação do modelo computacional, considerada a malha independente, foi feita comparando o seu resultado com os resultados apresentados em Lorenzini et al. (2011) e Lorenzini et al. (2014a), também para uma cavidade em Y (Tabela 4.2). A comparação foi realizada para uma geometria com os seguintes parâmetros ($\phi = 0,1$; $\psi = 0,5$; $H/L = 1,0$; $t_1/t_0 = 10,0$; $L_1/L_0 = 2,0$; $\alpha = 0,01$).

Tabela 4.2. Comparação dos resultados obtidos no presente trabalho e os obtidos na literatura.

Referência	$\tilde{\theta}_{max}$
Presente Trabalho	0,0762
Lorenzini et al. (2014a)	0,0762
Lorenzini et al. (2011)	0,0762

Observando a Tabela 4.2 é possível afirmar que o modelo computacional foi devidamente verificado.

4.3 ESTUDO DE INDEPENDÊNCIA DE MALHA PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T

O método numérico utilizado para o cálculo do campo de temperaturas da cavidade em duplo-T será o mesmo empregado nos estudos da cavidade Y. Desta forma, o MEF é empregado através do ambiente MATLAB para a determinação do campo de temperaturas e definição do valor do ponto com temperatura máxima $\tilde{\theta}_{max}$. Durante o processo de otimização, a minimização da temperatura se dá através da busca pela geometria ótima representada pela combinação dos cinco graus de liberdade H/L , H_0/L_0 , H_1/L_1 , H_2/L_2 e S_1/H_0 .

A malha de elementos utilizada para a aplicação do método de elementos finitos no domínio computacional do problema da cavidade em duplo-T, é determinada através de sucessivos testes de refinamento para alcançar o número de elementos que caracterize a malha independente. A equação e o critério utilizado no teste de independência de malha são dados a seguir:

$$|(\tilde{\theta}_{max}^i - \tilde{\theta}_{max}^{i+1})/\tilde{\theta}_{max}^i| < 5 \times 10^{-4} \quad (4.2)$$

Os termos da Eq. (4.2) são os mesmos representados na Eq. (4.1) diferenciando apenas pelo critério de independência de 5×10^{-4} . O critério utilizado é baseado nos estudos de Biserni et al. (2004), onde foram estudadas as cavidades em forma de C e T. A Tabela 4.3, demonstra os resultados do teste de independência de malha, sendo possível verificar que a malha independente é

obtida após quatro refinamentos, com o total de 80640 elementos. Os testes de malha foram executados para uma geometria com os seguintes parâmetros ($\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = 0,015$; $\phi_2 = 0,015$; $H/L = 1$; $H_0/L_0 = 0,6$; $H_1/L_1 = 0,4$; $H_2/L_2 = 0,4$; $S_1/H_0 = 0,5$).

Tabela 4.3. Teste de independência de malha para a cavidade em duplo-T.

Número de Elementos	$\bar{\theta}_{\max}$	$ (\bar{\theta}_{\max}^i - \bar{\theta}_{\max}^{i+1}) / \bar{\theta}_{\max}^i $
1260	0,16646	$5,565 \times 10^{-3}$
5040	0,16739	$2,224 \times 10^{-3}$
20160	0,16776	$8,614 \times 10^{-4}$
80640(Malha Independente)	0,16791	$3,435 \times 10^{-4}$
322560	0,16797	-----

5 METODOLOGIA PARA OTIMIZAÇÃO

5.1 METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO DA CAVIDADE EM Y

A metodologia de otimização aplicada na geometria da cavidade Y consiste, primeiramente, na definição dos objetivos e restrições do problema de transferência de calor. As restrições e definição dos objetivos do problema foram determinados através do *Constructal Design* que se baseia na Teoria Constructal para a obtenção da melhor configuração geométrica que minimize as imperfeições do sistema estudado.

Com as restrições e objetivos determinados, a busca pela geometria ótima se deu através da aplicação do algoritmo de busca *Simulated Annealing* (SA) que avaliou de forma meta-heurística e probabilística, as possíveis soluções até a busca da configuração ótima. Os resultados obtidos com a aplicação do SA foram comparados e validados através dos estudos realizados com Busca Exaustiva e com o Algoritmo Genético. Estas duas metodologias foram empregadas recentemente para a otimização de cavidades em forma de Y isotérmicas e com convecção nos trabalhos de Lorenzini et al. (2011, 2014a, 2014b). É importante salientar que a geometria ótima só é garantida quando se pode comparar os resultados dos algoritmos meta-heurísticos com os resultados da busca exaustiva, nas demais situações não é possível garantir a geometria ótima, porém se pretende encontrar a geometria que mais se aproxima, ou seja a geometria quase ótima.

5.1.1 CONSTRUCTAL DESIGN APLICADO À CAVIDADE EM Y

Seguindo o método *Constructal Design*, a otimização de um problema deve ser a ótima distribuição de suas imperfeições. Para aplicar o método *Constructal* define-se primeiramente as restrições empregadas no problema, que neste caso serão o ϕ e ψ representados respectivamente pelas Eqs. (3.19) e (3.20). Os graus de liberdade da geometria da cavidade em Y são (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 e α), estes são os valores que variam durante o processo de busca e otimização. O MEF é utilizado para o cálculo do campo de temperaturas e a extração do ponto com temperatura máxima, sendo a função objetivo a ser minimizada durante o processo de otimização.

O processo de otimização é dividido em quatro etapas que podem ser observadas na Figura 5.1. A otimização inicia apenas com um grau de liberdade, primeiramente o de menor hierarquia, neste caso o ângulo α . Enquanto apenas um grau de liberdade (α) é otimizado os demais (H/L , t_1/t_0 e

L_1/L_0) são mantidos com valores previamente fixados, quando dois graus de liberdade são otimizados (α e L_1/L_0) os outros dois permanecem constantes (H/L e t_1/t_0), e assim por adiante até a otimização completa da geometria. Por exemplo, para a otimização dos dois graus de liberdade α e L_1/L_0 , os valores de $H/L = 1$ e $t_1/t_0 = 11$ não variaram durante o processo de otimização. O fluxo da Fig. 5.1 é válido apenas para uma combinação de ϕ e ψ , pois para cada combinação diferente de restrições o processo de otimização é único e, desta forma, o seu fluxo de otimização também.

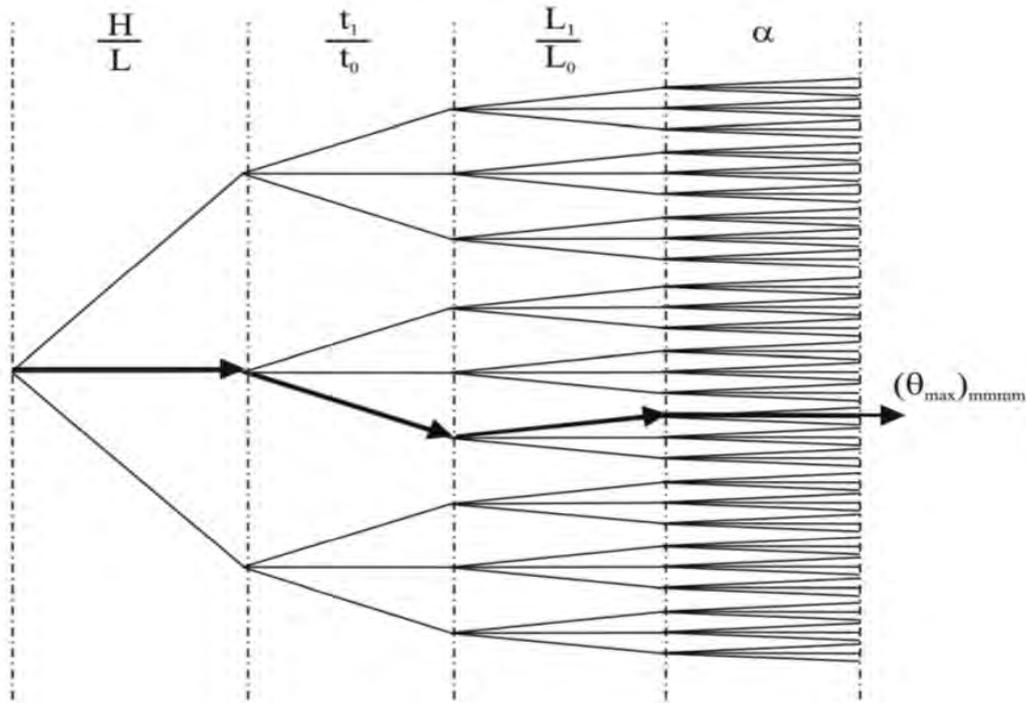


Figura 5.1. Fluxograma ilustrando o processo de otimização da cavidade em Y
(Fonte: Lorenzini et al., 2014b)

A geometria da cavidade em Y possui sete variáveis (H, L, L_1, L_0, t_1, t_0 e α) e três restrições de área (A, A_c e A_{aux}), desta forma para o fechamento das equações e determinação das variáveis, são necessários quatro graus de liberdade ($H/L, t_1/t_0, L_1/L_0$ e α). Durante o processo de otimização, os valores das restrições são pré-definidos e os valores dos graus de liberdade são variados dentro do espaço de busca de configurações geométricas válidas. As equações que determinam as variáveis da geometria de acordo com os seus respectivos graus de liberdade são dadas por:

$$\tilde{L} = \left[\frac{1}{\left(\frac{H}{L} \right)} \right]^{1/2} \quad (5.1)$$

$$\tilde{H} = \left(\frac{H}{L} \right) \cdot \tilde{L} \quad (5.2)$$

$$\tilde{L}_1 = \left(\frac{L_1}{L_0} \right) \cdot \tilde{L}_0 \quad (5.3)$$

$$\tilde{t}_1 = \left(\frac{t_1}{t_0} \right) \cdot \tilde{t}_0 \quad (5.4)$$

Substituindo as Eqs. (5.3) e (5.4) nas Eqs. (3.19) e (3.20), respectivamente, encontra-se o seguinte sistema algébrico:

$$\tilde{L}_0 = \frac{\Phi - t_0^2 \cdot \left(\left(\frac{t_1}{t_0} \right) \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \right)}{t_0 \cdot \left(\left(\frac{L_1}{L_0} \right) \cdot \left(\frac{t_1}{t_0} \right) + 2 \right)} \quad (5.5)$$

$$\tilde{t}_0 = \left(\frac{\Psi}{\left(L_0 \cdot \left(\frac{L_1}{L_0} \right) + L_0 \sin \alpha + t_0 \cos \alpha \right)} - 2 L_0 \cos \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{t_1}{t_0} \right)} \right) \quad (5.6)$$

Os valores dos graus de liberdade (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α) e das restrições (Φ , Ψ) são parâmetros definidos durante as simulações. Com as variáveis calculadas o algoritmo que resolve a equação da energia com o MEF pode ser executado e assim calculado o campo de temperaturas para uma determinada configuração da geometria.

5.1.2 METODOLOGIA PARA OTIMIZAÇÃO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE DA CAVIDADE EM Y

As pesquisas tradicionais na área do *Constructal Design*, principalmente relacionadas com o estudo de cavidades, usam como técnica de otimização a Busca Exaustiva (BE), como é possível observar nos estudos de Biserni et al. (2004), Xie et al. (2010), Lorenzini et al. (2011, 2013). A BE se caracteriza por explorar todo o espaço de soluções factíveis durante o processo de otimização, isto é, simula todas as configurações possíveis para cada grau de liberdade. Desta forma, a pesquisa e aplicação do *Constructal Design* em geometrias mais complexas, que geram um número maior de graus de liberdade e, conseqüentemente, de geometrias possíveis, se torna inviável ou muito onerosa em termos computacionais. Por exemplo, para a otimização de dois graus de liberdade (L_1/L_0 e α) a combinação de todos os valores gera até 334 simulações através do método de BE.

Uma alternativa ao método BE é a utilização da inteligência artificial por meio de algoritmos de busca. Os algoritmos de busca estudados nesta pesquisa são os Algoritmos Genéticos (AG) e *Simulated Annealing* (SA), dois tipos de algoritmos combinatórios e probabilísticos que usam uma determinada meta-heurística no processo de otimização. A aplicação destes algoritmos é observada em vários problemas de diversos campos de pesquisa, como visto em Donnelly (1987) e Song et al. (2011). O próprio AG também é vastamente empregado em problemas de transferência de calor e vem sendo utilizado em várias pesquisas desta área, como demonstra Gosselin et al. (2009) e Norouzi et al. (2012). Além disso, recentemente, o método *Constructal Design* em associação com o uso de AG tem sido empregado para a otimização geométrica de cavidades inseridas em sólidos com geração de calor (Estrada et al., 2013; Lorenzini et al., 2014a, 2014b).

Neste estudo avalia-se o desempenho e aplicação do SA em comparação com a utilização do AG no problema de otimização da cavidade em Y, desenvolvido e pesquisado nos estudos de Estrada et al. (2013) e Lorenzini et al. (2014a). Neste caso, aplica-se a otimização ao mesmo problema, nas mesmas condições e com a mesma discretização do espaço de busca. Primeiramente, o estudo se concentrou na otimização do problema da cavidade em Y até o seu terceiro nível de otimização, ou seja, $(t_1/t_0)_o$, $(L_1/L_0)_{oo}$ e α_{ooo} .

5.1.2.1 IMPLEMENTAÇÃO DO *SIMULATED ANNEALING* PARA A CAVIDADE EM FORMA DE Y

A implementação do algoritmo *Simulated Annealing* (SA) se deu através do ambiente MATLAB e sua ferramenta de otimização *Global Optimization Toolbox*, mais precisamente a utilização da função específica para a execução do SA, a função *simulannealbnd*. O *solver* de SA do MATLAB é extremamente adaptável, ou seja, é possível desenvolver algoritmos próprios para diversas funções como: modelo de resfriamento, função de *annealing*, ou a própria função de aceitação. A integração com funções próprias é extremamente fácil e agiliza o processo de desenvolvimento.

Neste trabalho aplica-se o algoritmo SA ao mesmo problema de transferência de calor com uma cavidade em forma de Y do estudo de Lorenzini et al. (2014a), onde foi aplicada a técnica de Algoritmos Genéticos (AG), também utilizando o ambiente MATLAB. Nestes trabalhos foram avaliados os quatro graus de liberdade (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α). Aqui foi reproduzida a otimização completa, ou seja, com os mesmos graus de liberdade avaliados em Lorenzini et al. (2014a). Porém, inicialmente, a avaliação do SA é abordada em um caso onde os parâmetros H/L e t_1/t_0 são mantidos fixos ($H/L = 1,0$ e $t_1/t_0 = 11$) buscando o máximo excesso de temperatura adimensional mínimo $(\theta_{\max})_m$ para os valores ótimos L_1/L_0 e α .

O espaço de busca formado pelos graus de liberdade L_1/L_0 e α , é discretizado de modo a executar o SA no mesmo espaço de soluções que se utilizou o AG nos estudos de Lorenzini et al. (2014a). O grau de liberdade L_1/L_0 possui o intervalo de $0,001 \leq L_1/L_0 \leq 1,0$, variando em 15 diferentes valores representados em um vetor. Já o grau de liberdade α representa o ângulo que varia entre um espaço, em radianos, de 1,00 a 1,57 com o passo de 0,01. O espaço de busca para o grau de liberdade L_1/L_0 é dado por $L_1/L_0 = \{0,001; 0,002; 0,003; 0,005; 0,007; 0,01; 0,02; 0,03; 0,05; 0,07; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 1,0\}$

Para executar o algoritmo no espaço de busca apropriado, é necessário o desenvolvimento de uma função de *annealing*, ou seja, a função que irá propor soluções vizinhas do ponto atual durante o processo de otimização. A Fig. 5.2 apresenta o algoritmo simplificado da solução de *annealing* implementada neste trabalho. A proposta de novos vizinhos para os possíveis valores de L_1/L_0 deve respeitar os valores do espaço de busca para L_1/L_0 , assim como os novos pontos para α não podem extrapolar o intervalo já apresentado (1,0 a 1,57) e devem ter uma precisão de 0,01.

```

Inicio ( )
  atual = OtimoAtual()
  temp = temperaturaAtual()
  vl1dl0 = [0.001 0.002 0.003 0.005 0.007 0.01 0.02 0.03 0.05 0.07 0.1 0.3 0.5 0.7 1]
  steplen = 1
  stepmax = 0
  enquanto steplen > stepmax
    r = (((tamanho(vl1dl0)-1)-arredonda(randomico()*tamanho(vl1dl0)))^2)^(1/2))+1;
    perturbacao = vl1dl0(r)-atual(1)
    steplen = ((perturbacao)^2)^(1/2)
    stepmax = (atual(1)*temp/10)
  fim enquanto
atual(1) = atual(1)+perturbacao
u_alfa = 1.57
b_alfa = 1.00
step_a = 0.01;
steplen = 1
stepmax = 0
enquanto steplen > stepmax
  perturbacao = (((arredonda(randomico()/step_a)*step_a+1)-u_alfa)^2)^(1/2)+b_alfa-atual(2);
  steplen = ((perturbacao)^2)^(1/2)
  stepmax = (atual(2)*temp/10)
fim enquanto
atual(2) = atual(2)+perturbacao
retorna atual
fim

```

Figura 5.2. Pseudocódigo da função de *annealing* desenvolvida para o espaço de busca dos graus de liberdade L_1/L_0 e α .

No algoritmo representado pela Fig. (5.2), a variável “atual” armazena um vetor contendo dois valores para os dois graus de liberdade otimizados. Os novos valores são gerados a partir dos valores atuais. Para cada grau de liberdade existe uma equação que gera o próximo ponto no espaço de soluções. Para a geração de novos pontos baseados na função “rand()” do MATLAB, é utilizado o seguinte equacionamento:

$$r = (((\text{tamanho}(vl1dl0) - 1) - \text{arredonda}(\text{aleatorio}() \times \text{tamanho}(vl1dl0)))^2)^{(1/2)} + 1 \quad (5.7)$$

$$\alpha_i = (((\text{arredonda}(\text{aleatorio}()/0,01) \times 0,01 + 1) - 1,57)^2)^{(1/2)} + 1 \quad (5.8)$$

onde r , na Eq. (5.7), será a posição do vetor de L_1/L_0 , com este valor será calculada a perturbação e o módulo da mesma. Para o ângulo α , a Eq. (5.8) retorna aleatoriamente valores no espaço de busca discretizado para este grau de liberdade.

O ponto gerado não é aceito diretamente, ainda existe um processo de validação controlado pela própria temperatura atual. Para cada grau de liberdade é calculada a diferença entre o novo ponto e o atual, esta é chamada de perturbação, que pode ser de qualquer direção, negativa ou positiva. Com o módulo da perturbação se chega no tamanho do passo até o próximo ponto, este tamanho, representado no algoritmo da Fig (5.2) por “steplen” não pode ultrapassar o valor de “stepmax”, calculado a partir da temperatura atual representada pela variável “temp”.

Sintetizando a ideia da função de *annealing*, ela gera novos vizinhos com distâncias ao ponto atual proporcionais à temperatura e de acordo com o espaço de busca, neste caso discretizado. Portanto, além da função de *annealing* o *cooling schedule* também é importante no desempenho do algoritmo SA por influenciar a maneira como o algoritmo explora o espaço de busca.

A necessidade de adaptar a função de *annealing* é dada exatamente pela utilização da mesma representação discreta do espaço de busca de acordo com os estudos de Lorenzini et al. (2014a) na aplicação do AG. A função de *annealing* padrão do ambiente MATLAB utiliza valores pseudocontínuos e extrapola o espaço discretizado.

5.1.2.2 FLUXOGRAMA DO ALGORITMO *SIMULATED ANNEALING*

O fluxograma da Fig. 5.3, demonstra o algoritmo *Simulated Annealing* executado neste estudo de forma integrada com a ferramenta *PDE Tool-Box*, sendo esta última a função objetivo, a qual resolve os campos de temperatura e retorna a temperatura máxima.

De acordo com o fluxograma apresentado pela Fig. 5.3, o primeiro passo do algoritmo consiste em iniciar os valores de L_1/L_0 e α . Os valores iniciais são sorteados de acordo com as Eqs. (5.7) e (5.8). O sorteio do ponto inicial de otimização, ou seja, o estado em que o algoritmo partirá à busca pelo ótimo global, é uma característica comum em algoritmos combinatórios de busca.

Após a inicialização do ponto de partida do algoritmo, logo são configurados os parâmetros da função *simulannealbnd* do ambiente MATLAB. As principais opções ajustadas foram o tipo de função de *cooling schedule* (*@temperaturefast*), a função de *annealing* (*@discrete_annealing*) e o critério de parada do algoritmo (*StallIterLimite*). O último parâmetro representa o número de

iterações sem mudança no estado ótimo já encontrado, por exemplo, se $StallIterLimite = 100$, se após cem iterações o algoritmo não houver encontrado um estado melhor, então a execução é finalizada. A função de *annealing* desenvolvida neste estudo e demonstrada pela Fig (5.2) em seu pseudocódigo, foi chamada de `@discrete_annealing`, e é executada para gerar novos vizinhos no espaço de busca discretizado.

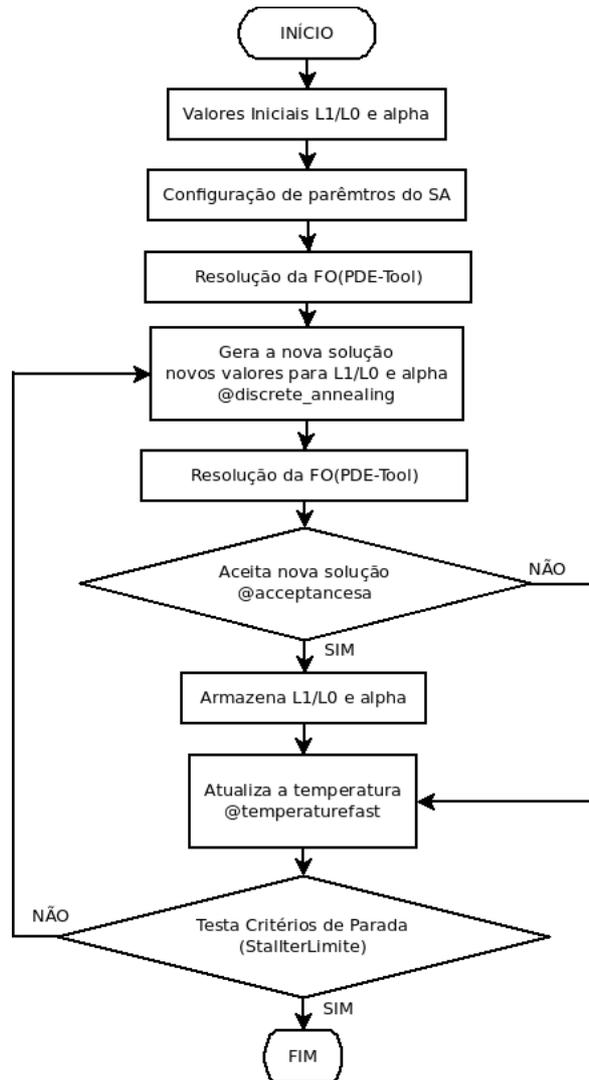


Figura 5.3. Fluxograma do algoritmo SA aplicado à otimização geométrica do problema de transferência de calor.

O próximo passo no fluxograma da Fig. 5.3 é justamente uma chamada à função que resolve os campos de temperatura através da ferramenta *PDE Tool-Box* e extrai o ponto de temperatura máxima, este é o valor o qual se propõe minimizar buscando a geometria ótima. Após avaliadas a

solução inicial (valores para os graus de liberdade L_1/L_0 e α) e a nova solução, o algoritmo decide através da probabilidade dada pela Eq. (2.4), se a nova solução será armazenada como uma melhor candidata ao ótimo, ou se continuará sendo considerada a solução inicial como a melhor até então. A função do ambiente MATLAB que calcula a probabilidade de aceitação é chamada de `@acceptancesa`.

A etapa seguinte do algoritmo é a atualização da temperatura, neste caso utilizando o parâmetro de *cooling schedule* `@temperaturefast` como se pode observar na Fig. (5.3). Finalmente o algoritmo testa o critério de parada no próximo passo e se o mesmo for satisfeito a busca termina, do contrário a execução volta ao passo em que propõe soluções vizinhas a atual e repete todo o processo anterior.

5.1.2.3 ESTUDO COMPARATIVO DE DIFERENTES *COOLING SCHEDULES*

O algoritmo SA do MATLAB tem como opção três tipos de *cooling schedules*, o `@temperatureexp` (modelo padrão do *solver*), `@temperaturefast` e `@temperatureboltz`. Os *cooling schedules* padrões, `@temperatureexp`, `@temperaturefast` e `@temperatureboltz` do ambiente MATLAB são representados respectivamente pela seguintes equações:

$$T_i = T_0 \times 0,95^{k_{sa}} \quad (5.9)$$

$$T_i = \frac{T_0}{k_{sa}} \quad (5.10)$$

$$T_i = \frac{T_0}{\ln(k_{sa})} \quad (5.11)$$

onde k_{sa} é o parâmetro de *annealing*, considerado na documentação do MATLAB como igual ao número da iterações antes do *reannealing*, ou seja, um número de iteração antes que a temperatura seja recalculada. Por padrão no MATLAB, k_{sa} é iniciado, junto à execução do SA, com o valor um (1) e é incrementado a cada iteração do algoritmo. Quando o valor de k_{sa} é igual ao parâmetro *ReannealInterval*, então é executado o *reannealing*, a temperatura é igualada à temperatura inicial T_0 e k_{sa} também volta ao valor inicial. O parâmetro *ReannealInterval* é, por padrão, definido com o

valor cem (100) no ambiente MATLAB, sendo assim a cada cem iterações do SA é realizado o *reannealing*.

Nas Eqs. (5.9 - 5.11), T_i representa a temperatura na iteração atual e T_0 representa a temperatura inicial do algoritmo, que por padrão é 100. Neste trabalho ainda foi proposta e utilizada uma quarta função para a atualização da temperatura, nomeada *@tempboltzexp*, por ser uma forma híbrida do modelo das Eqs. (5.9) e (5.11). Basicamente a função calcula as duas equações e utiliza a temperatura menor na iteração atual. A Eq. (5.12) apresenta o modelo matemático do *cooling schedule* híbrido *@tempboltzexp*.

$$T_i = \begin{cases} \frac{T_0}{\ln(k_{sa})} & : k_{sa} \leq 80 \text{ for } T_0 = 100 \\ T_0 \times 0,95^{(k_{sa} - T_0/2)} & : k_{sa} > 80 \text{ for } T_0 = 100 \end{cases} \quad (5.12)$$

Na Eq. (5.12) é possível observar que houve uma adaptação no modelo matemático do *cooling schedule* Exponencial para a composição do modelo híbrido BoltzExp. A adaptação refere-se à substituição do termo k_{sa} por $(k_{sa} - T_0/2)$ no expoente de 0,95, com esta adaptação o modelo híbrido reduz de forma exponencial a temperatura apenas a partir da iteração 80. Este modelo apresentou melhores resultados, o que será discutido no próximo capítulo. As Figuras 5.4 e 5.5 fazem uma comparação entre os diferentes modelos de temperatura, inclusive o modelo híbrido proposto neste trabalho.

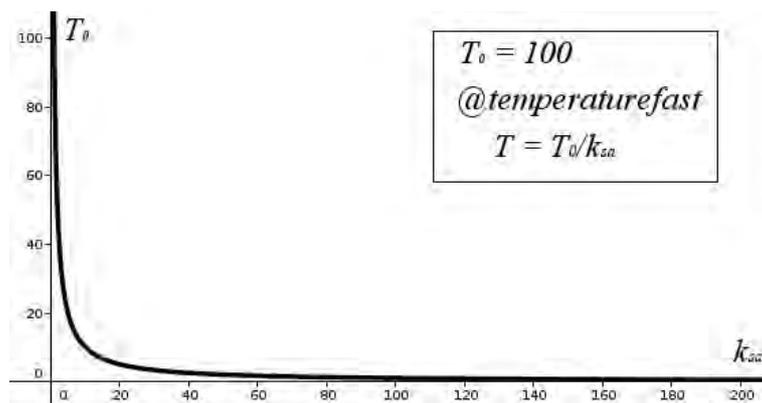


Figura 5.4. Modelo de resfriamento do SA do tipo *Fast* em função de k_{sa} iterações.

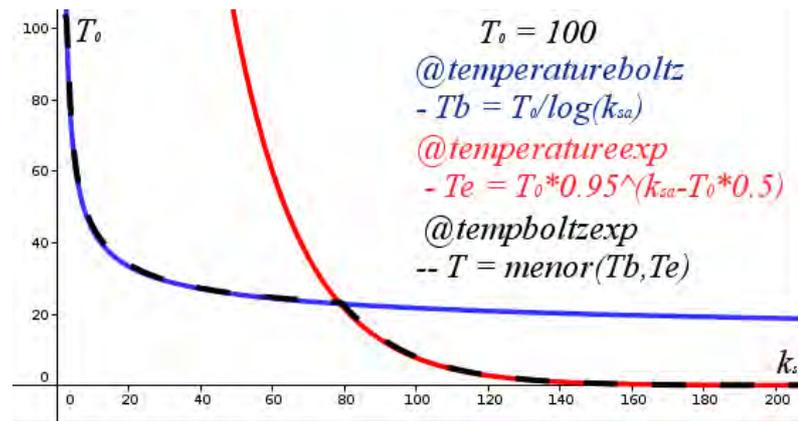


Figura 5.5. Composição do *cooling schedule* híbrido BoltzExp.

Foram realizadas sessenta execuções do algoritmo SA, para os quatro diferentes modelos de resfriamento (*cooling schedule*), ou seja, 240 execuções no total. Cada execução do SA, para cada tipo de modelo de resfriamento, apresentou diferentes desempenhos, os quais serão analisados no próximo capítulo. Como critério de parada, foi utilizado o valor de temperatura mínima 0,6119 devido ao fato de ser o mesmo critério empregado nos trabalhos de Estrada et al. (2012) e Lorenzini et al. (2014a) para a validação do Algoritmo Genético. O número máximo de 150 iterações sem mudança no ótimo atual também foi utilizado como critério de parada na execução do SA. Contudo, todas as execuções do SA encontraram o mesmo valor ótimo registrado nos estudos de Estrada et al. (2012) e Lorenzini et al. (2014a) para o caso de $H/L = 1,0$ e $t_1/t_0 = 11$.

5.1.3 ESTUDO DE *COOLING SCHEDULES* HÍBRIDOS NA REGIÃO ÓTIMA

A pesquisa também analisou novos modelos de *cooling schedules* híbridos, sendo assim, além do híbrido denominado @tempboltzexp, a pesquisa estudou os modelos @const_exp1 e @const_exp2. Os dois novos modelos caracterizam-se por manter a temperatura do SA constante enquanto o número de iterações do algoritmo for inferior ao valor de 50 % da temperatura inicial. Após um determinado número de iterações a temperatura sofre um decaimento exponencial, o qual difere de um modelo para o outro em relação à taxa de decaimento.

Lembrando que o espaço de busca é explorado de acordo com a temperatura, a intenção com a manutenção de uma temperatura inicial constante é a avaliação da influência da temperatura na busca por uma solução melhor antes do processo de refinamento em busca local ocasionado por

baixas temperaturas. Com a temperatura constante no estado inicial do SA, espera-se que o algoritmo refine a busca em uma região mais próxima ao ótimo global dentro do espaço de busca, e assim aumente também a confiabilidade do algoritmo em encontrar a configuração geométrica com a real temperatura mínima. Portanto, a presente pesquisa avaliou os dois novos *cooling schedules* (*@const_exp1* e *@const_exp2*) híbridos em relação ao híbrido já proposto (*@tempboltzexp*) e aos demais modelos de resfriamento, padrões do ambiente MATLAB (*@temperatureexp*, *@temperaturefast* e *@temperatureboltz*).

Para a avaliação dos parâmetros de *cooling schedules* foram realizadas vinte rodadas de trinta execuções para cada parâmetro estudado. Os testes foram executados na região ótima de $t_1/t_0 = 10, 11$ e 12 , para cada valor de t_1/t_0 foram realizadas as vinte rodadas com trinta processos de otimização na busca pelos valores ótimos de L_1/L_0 e α . Ao final de cada processo de otimização foi registrado o sucesso em atingir o ótimo global e ao final de cada rodada foi registrada a porcentagem em encontrar a geometria ótimo global. Neste caso a geometria ótima global é conhecida pelos resultados da aplicação do método BE de Lorenzini et al. (2011), portanto é possível garantir que os algoritmos atingem a configuração ótima global. Desta forma, se obteve uma distribuição de porcentagens, em um total de sessenta observações, para cada *cooling schedule*. Os resultados desta experiência são discutidos no próximo capítulo.

Os modelos matemáticos dos dois novos *cooling schedules*, *@const_exp1* e *@const_exp2*, podem ser observados respectivamente nas seguintes equações:

$$T_i = \begin{cases} T_0 & : k_{sa} \leq \frac{T_0}{2} \\ T_0 \times 0,95^{(k_{sa} - T_0/2)} & : k_{sa} > \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (5.13)$$

$$T_i = \begin{cases} T_0 & : k_{sa} \leq \frac{T_0}{2} \\ T_0 \times 0,9^{(k_{sa} - T_0/2)} & : k_{sa} > \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (5.14)$$

Nas Eqs. (5.13) e (5.14), o termo T_i representa a temperatura do algoritmo na iteração corrente, T_0 representa o valor da temperatura inicial e k_{sa} representa o número de iterações do algoritmo antes do processo de *reannealing*. A Figura 5.6 apresenta uma comparação entre os *cooling schedules* analisados.

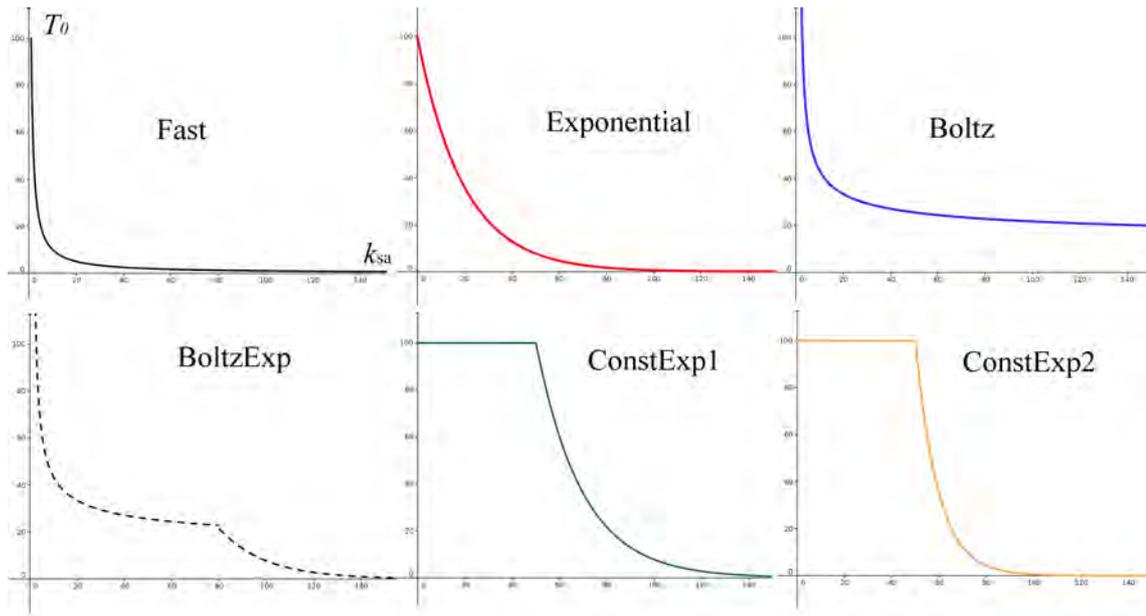


Figura 5.6. *Cooling Schedules* investigados na região ótima de t_1/t_0 .

Na Figura 5.6, T_0 representa a temperatura inicial do algoritmo SA, enquanto que k_{sa} representa o número de iterações ao longo da execução do algoritmo.

5.1.4 OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM Y

Para a otimização completa da cavidade em Y, ou seja, buscando os quatro graus de liberdade (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α) o espaço de busca para cada grau de liberdade foi discretizado conforme os estudos de Lorenzini et al. (2014a). O espaço de busca discreto para os graus de liberdade L_1/L_0 e α foi o mesmo apresentado na seção 5.1.2.1 no processo de otimização de dois graus de liberdade. As equações a seguir demonstram o espaço de busca discreto para os graus de liberdade H/L e t_1/t_0 :

$$H/L = [0,2 \quad 0,5 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 7 \quad 10 \quad 15 \quad 18 \quad 20] \quad (5.15)$$

$$t_1/t_0 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 15 & 17 & 18 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 & 100 & 110 & 120 & 130 & 140 \\ 150 & 160 & 170 & 180 & 190 & 200 & 210 & 220 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

As Eqs. (5.15) e (5.16) apresentam os valores discretos do espaço de busca em forma de matrizes, pois na codificação dos algoritmos os DOF são representados como vetores, desta forma o

grau de liberdade t_1/t_0 é utilizado como uma matriz 1×32 . A implementação do algoritmo SA para a otimização dos quatro graus de liberdade exigiu a adaptação do algoritmo da Fig. 5.2. O algoritmo de *annealing* foi alterado para a combinação aleatória dos quatro DOF na geração dos pontos vistos pelo SA durante o processo de busca pela configuração ótima. A geração aleatória de pontos foi implementada de acordo com o tamanho do espaço de busca de cada grau de liberdade com base na Eq. (5.7). O processo de otimização completa da cavidade em Y através do SA foi realizado para vários valores e combinações das restrições $\psi = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ e $\phi = 0,01; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2$.

Após os resultados obtidos com as comparações entre os modelos padrões de *cooling schedule* do ambiente MATLAB (*Fast*, *Boltz* e *Exponencial*) e os modelos híbridos (*BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*) para até três graus de liberdade, iniciou-se o processo de otimização completa com todos os modelos já analisados. A intenção com este processo foi avaliar a continuidade da vantagem dos modelos híbridos apresentada nas otimizações parciais, dois e três DOF, na otimização completa da cavidade em Y.

Os demais parâmetros do SA, como critério de parada do algoritmo e configuração do *reannealing*, foram adaptados à execução do algoritmo em um espaço de busca com um número maior de possibilidades em função da otimização dos quatro graus de liberdade. A combinação dos quatro DOF geram 273600 diferentes configurações para a geometria da cavidade em Y. Portanto, o critério de parada (*StallIterLimit*) foi ajustado em 1000 iterações sem mudanças na FO. Enquanto que o número de iterações antes do *reannealing* foi configurado para 100 iterações. Isto significa que para que a temperatura do SA volte ao valor inicial, devem ocorrer 100 iterações sem que o algoritmo aceite uma nova solução no espaço de busca. A temperatura inicial do algoritmo também foi mantida com o valor 100. Os resultados da otimização completa da cavidade em Y com o SA empregando os diferentes *cooling schedules* serão apresentados e discutidos no capítulo 6.

5.2 METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO DA CAVIDADE EM DUPLO-T

O método *Constructal Design* foi aplicado ao processo de otimização da cavidade em duplo-T para a definição do objetivo e das restrições, assim como os graus de liberdade que serão variados na busca pela geometria ótima. Após a determinação dos graus de liberdade e restrições a serem impostas ao problema, a busca pela geometria ótima se deu de duas formas. Primeiramente, para a otimização parcial de poucos graus de liberdade, foi empregado o método de Busca Exaustiva, em

que todas as possibilidades do espaço de busca discretizado são simuladas. O segundo método utilizado, para a otimização completa, foi o método estocástico e probabilístico com a utilização do algoritmo *Simulated Annealing* (SA).

O algoritmo SA foi aplicado com diferentes configurações do parâmetro de *cooling schedule*, devido aos resultados apresentados na otimização da cavidade em Y, o *cooling schedule Fast* não foi utilizado para a otimização da cavidade em duplo-T. Os demais modelos de resfriamento investigados nesta pesquisa (*Boltz*, *Exponencial*, *BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*), foram utilizados como diferentes versões do SA. Para a conclusão do processo de otimização, assim como a interpretação dos efeitos das restrições e graus de liberdade sobre a geometria ótima e máxima temperatura em excesso adimensional mínima, buscou-se analisar os melhores resultados entre todas as versões do SA. Os resultados individuais de cada *cooling schedule* também foram observados e comparados, sendo relatados na seção 6.2 do capítulo de resultados e discussões.

5.2.1 CONSTRUCTAL DESIGN APLICADO À CAVIDADE EM DUPLO-T

O problema estudado busca maximizar a transferência de calor entre o sólido e a cavidade em duplo-T, ou seja, maximizar o fluxo de calor em direção à cavidade através da geometria ótima a qual minimiza a resistência térmica entre o sólido e a cavidade. A variação da geometria da cavidade está sujeita a restrições, sendo a principal restrição a fração de área da cavidade em relação à área total (ϕ_c) representada pela Eq.(3.33).

Para a variação da geometria da cavidade em duplo-T é necessária a definição de cinco graus de liberdade, ou seja, variáveis que irão determinar a geometria do domínio computacional. A geometria do domínio estudado possui nove variáveis (H , L , H_0 , L_0 , H_1 , L_1 , H_2 , L_2 e S_1), e quatro restrições de área (A , A_0 , A_1 e A_2), desta forma para o fechamento das equações e determinação das variáveis, são necessários cinco graus de liberdade (H/L , H_0/L_0 , H_1/L_1 , H_2/L_2 e S_1/H_0). Os cinco graus de liberdade assumem valores determinados através da discretização do espaço de busca durante o processo de otimização. As equações a seguir demonstram a definição das variáveis através dos graus de liberdade.

$$\tilde{L} = \left[\frac{1}{\left(\frac{H}{L} \right)} \right]^{1/2} \quad (5.17)$$

$$\tilde{H} = \left(\frac{H}{L} \right) \cdot \tilde{L} \quad (5.18)$$

$$\tilde{L}_0 = \left[\frac{\phi_c - 2\phi_1 - 2\phi_2}{\left(\frac{H_0}{L_0} \right)} \right]^{1/2} \quad (5.19)$$

$$\tilde{H}_0 = \left(\frac{H_0}{L_0} \right) \cdot \tilde{L}_0 \quad (5.20)$$

$$\tilde{L}_1 = \left[\frac{\phi_1}{\left(\frac{H_1}{L_1} \right)} \right]^{1/2} \quad (5.21)$$

$$\tilde{H}_1 = \left(\frac{H_1}{L_1} \right) \cdot \tilde{L}_1 \quad (5.22)$$

$$\tilde{L}_2 = \left[\frac{\phi_2}{\left(\frac{H_2}{L_2} \right)} \right]^{1/2} \quad (5.23)$$

$$\tilde{H}_2 = \left(\frac{H_2}{L_2} \right) \cdot \tilde{L}_2 \quad (5.24)$$

$$\tilde{S}_1 = \left(\frac{S_1}{H_0} \right) \cdot \tilde{H}_0 \quad (5.25)$$

Com os cinco graus de liberdade definidos (H/L , H_0/L_0 , H_1/L_1 , H_2/L_2 e S_1/H_0), é possível seguir para o processo de otimização determinando o espaço de busca a ser investigado, ou seja, o conjunto de valores que os graus de liberdade poderão assumir e combinar entre si para a geração da variedade de configurações geométricas a serem simuladas. No processo de Busca Exaustiva

(BE) seleciona-se um grau de liberdade para ser variado enquanto os demais são mantidos fixos, porém para a aplicação de algoritmos estocásticos, as combinações de valores de cada grau de liberdade são geradas aleatoriamente a partir do espaço de busca discretizado.

As próximas seções apresentam como foi realizado o processo de otimização pelo método BE e através do algoritmo estocástico SA, assim como descrevem a discretização do espaço de busca.

5.2.2 OTIMIZAÇÃO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T

Para a automatização do processo de otimização, foram desenvolvidos diversos códigos de programação (*scripts*) no ambiente MATLAB. O principal *script* desenvolvido foi a função responsável por executar a ferramenta *PDE-Tool*, passando como parâmetros os valores da geometria, assim como as definições das restrições. Este *script* calcula os campos de temperatura e extrai a temperatura máxima presente no domínio, sendo propriamente a Função Objetivo de todo o processo de otimização. A FO também foi programada para evitar combinações de valores para os graus de liberdade que gerem geometrias inválidas, tais como aquelas que extrapolam o limite do domínio sólido ou as quais não se é possível determinar todas as condições de contorno para a cavidade em forma de duplo-T.

Inicialmente a otimização da cavidade em duplo-T se deu através da Busca Exaustiva (BE), método que testa todas as possibilidades, desta forma os seus resultados serviram para validar os resultados do algoritmo SA. Para a otimização de dois graus de liberdade foram investigados os valores de H_1/L_1 , H_2/L_2 e S_1/H_0 . Os valores de H_1/L_1 e H_2/L_2 foram mantidos iguais, de acordo com a simetria da cavidade em duplo-T, seus valores foram variados igualmente no espaço de busca do intervalo de 0,4 a 2,0, com variação de 0,4. Para cada valor de H_1/L_1 , o grau de liberdade S_1/H_0 também foi variado em diferentes valores do seu espaço de busca. A equação abaixo representa o vetor com os valores do espaço de busca para os graus de liberdade H_1/L_1 e H_2/L_2 :

$$H_1/L_1 = H_2/L_2 = [0,4 \quad 0,8 \quad 1,2 \quad 1,6 \quad 2,0] \quad (5.26)$$

O caso estudado para a otimização de dois graus de liberdade, possui como geometria constante as razões de $H/L = 1$, $H_0/L_0 = 6$ e restrição de $\phi_c = 0,1$, com ϕ_1 e ϕ_2 igual a 0,015, ou seja,

foi mantida a simetria entre as restrições de área dos braços do duplo-T. O espaço de busca de S_1/H_0 foi determinado de acordo com a variação da variável S_1 , respeitando os valores mínimo e máximo de S_1 para cada configuração de H_1/L_1 e H_2/L_2 (0,4-2,0). Os valores mínimo e máximo de S_1 de acordo com H_1/L_1 e H_2/L_2 são representados respectivamente pelas seguintes equações:

$$S_{1min} = (H_1/2) + \Delta S_1 \quad (5.27)$$

$$S_{1max} = H_0 - H_2 - H_1/2 - \Delta S_1 \quad (5.28)$$

onde ΔS_1 é a variação da variável S_1 .

Foram testados três ΔS_1 para a otimização com o método exaustivo, sendo eles 0,01, 0,001 e 0,0001. Se optou pela variação 0,001 por oferecer maior precisão e menos esforço computacional. A diferença entre as temperaturas encontradas com o $\Delta S_1 = 0,001$ e $\Delta S_1 = 0,0001$ é da ordem de $3,4 \times 10^{-7}$, o que não justifica o uso da $\Delta S_1 = 0,0001$ o qual requer até dez vezes mais iterações.

A aplicação do SA se deu no mesmo espaço de busca utilizado pelo método BE. Foram utilizadas três versões do SA, cada uma configurada com um parâmetro de *cooling schedule* diferente (*BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*). Os códigos desenvolvidos para as funções híbridas de resfriamento da temperatura do SA para a cavidade em Y, foram os mesmos utilizados no processo de otimização da cavidade em duplo-T.

O desenvolvimento da função de *annealing* foi a única adaptação do SA para a otimização de dois graus de liberdade da cavidade em duplo-T. A função de *annealing* é a rotina responsável pelo sorteio de um novo ponto no espaço de busca. O algoritmo desenvolvido para a função de *annealing* sorteou vários valores de S_1/H_0 dentro do espaço de busca discretizado para este grau de liberdade, representado no código por um vetor gerado no início do processo de otimização de acordo com os valores de H_1/L_1 e H_2/L_2 . Outra adaptação importante na função de *annealing* foi uma rotina de verificação de valores repetidos assim como a verificação de geometrias inválidas.

Os resultados da otimização de dois graus de liberdade com o método de busca exaustiva e com o algoritmo SA, serão apresentados e discutidos na seção 6.2.1.

5.2.3 OTIMIZAÇÃO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T

A otimização de três graus de liberdade para a cavidade em duplo-T foi realizada de duas maneiras diferentes, a primeira com o mesmo espaço de busca da otimização com dois graus de liberdade, porém a segunda utilizou um espaço de busca gerado de forma dinâmica, o qual será explicado em detalhes ao longo deste capítulo. A otimização em ambos os casos foi realizada mantendo-se fixos os valores de $H/L = 1$ e $H_0/L_0 = 6$, assim como as restrições $\phi_c = 0,1$, $\phi_1 = 0,015$ e $\phi_2 = 0,015$.

Primeiramente a otimização dos três graus de liberdade H_1/L_1 , H_2/L_2 e S_1/H_0 , seguiu o mesmo espaço de busca apresentado no capítulo anterior. A única diferença foi a variação do grau de liberdade H_1/L_1 , desfazendo a simetria da otimização de dois graus de liberdade. Desta forma, assim como o grau de liberdade S_1/H_0 , H_1/L_1 foi investigado formando diferentes combinações entre os valores de S_1/H_0 e H_1/L_1 para cada valor de H_2/L_2 , avaliados no intervalo de $0,2 \leq H_2/L_2 \leq 2,0$.

O método BE foi empregado para poder validar os resultados do SA. Desta forma, foram simuladas todas as possíveis combinações entre os valores S_1/H_0 e H_1/L_1 para cada valor de H_2/L_2 . Ao final de todas as simulações, foram registradas as temperaturas máximas mínimas para cada valor de H_2/L_2 .

Para a execução do SA no processo de otimização de três graus de liberdade foi necessária a adaptação de alguns *scripts*, e um dos principais foi a adaptação da função de *annealing* da otimização de dois graus de liberdade para o contexto da otimização dos três graus de liberdade. Nesta nova versão da rotina de *annealing*, a função gera valores aleatórios para os dois DOF investigados, gerando combinações aleatórias de valores para a configuração da geometria. Os testes de geometria inválida e geometrias repetidas foram mantidos.

Os *cooling schedules* híbridos foram utilizados reaproveitando os códigos já utilizados nas otimizações anteriores. Para os três graus de liberdade foram executadas diferentes versões do SA, cada uma com uma configuração de *cooling schedule* diferente. Nesta otimização se investigou todos os parâmetros já estudados no processo de otimização da cavidade em Y, com exceção do *cooling schedule Fast*, devido ao seu baixo desempenho na busca pelas geometrias ótimas. Os resultados do capítulo e os demais resultados referentes à otimização completa da cavidade em Y, orientaram a exclusão do modelo de resfriamento *Fast* do processo de otimização da cavidade em duplo-T.

Após a análise dos resultados da otimização de três graus de liberdade com o espaço de busca determinado arbitrariamente para os graus de liberdade H_1/L_1 e H_2/L_2 , foi definido um novo método de criação do espaço de busca. Este método foi baseado na necessidade de geração dinâmica do espaço de busca para o grau de liberdade S_1/H_0 , o qual era recriado em cada combinação de H_1/L_1 e H_2/L_2 . A recriação do espaço de busca de S_1/H_0 é necessária, por que este depende dos valores dos graus de liberdade imediatamente superiores na hierarquia de todos os graus de liberdade.

Assim como o grau de liberdade S_1/H_0 , a definição do espaço de busca dos graus de liberdade H_1/L_1 e H_2/L_2 também dependem da razão de H_0/L_0 , e este último depende de H/L para que o seu espaço de busca seja discretizado sem gerar combinações de geometrias inválidas. Os graus de liberdade H_1/L_1 e H_2/L_2 não dependem entre si para a definição do espaço de busca, esta é uma característica da geometria da forma em duplo-T. As expressões a seguir demonstram o equacionamento utilizado na geração dos espaços de busca dinâmicos:

$$(H_1/L_1)_{min} = \frac{\phi_1}{\left(\frac{(L-L_0-e_1)^{1/2}}{4}\right)} \quad (5.29)$$

$$(H_1/L_1)_{max} = \frac{\left[\frac{H_0}{2} - e_1\right]^{1/2}}{\phi_1} \quad (5.30)$$

$$(H_2/L_2)_{min} = \frac{\phi_2}{\left(\frac{(L-L_0-e_1)^{1/2}}{4}\right)} \quad (5.31)$$

$$(H_2/L_2)_{max} = \frac{\left[\frac{H_0}{2} - e_1\right]^{1/2}}{\phi_2} \quad (5.32)$$

$$(S_1/H_0)_{min} = \frac{\frac{H_1}{2} + e_2}{H_0} \quad (5.33)$$

$$(S_1/H_0)_{max} = \frac{H_0 - H_2 - \left(\frac{H_1}{2}\right) - e_1}{H_0} \quad (5.34)$$

Nas Eqs. (5.29) até (5.34) os termos e_1 e e_2 possuem os respectivos valores de 0,01 e 0,001, ambos representam uma tolerância para que a geometria seja válida. A variável e_1 nas Eqs. (5.30) e (5.32) representa o limite da geometria dos braços para a base do duplo-T. Por outro lado, o termo e_1 nas Eqs. (5.29) e (5.31) representa o limite geométrico do domínio sólido, ou seja, um valor muito pequeno para estas razões faria com que os braços do duplo-T extrapolassem o domínio. Enquanto que o termo e_1 , na Eq. (5.34), representa o limite da geometria para a altura mínima do primeiro braço do duplo-T, o termo e_2 na Eq. (5.33) representa a altura máxima, ou a mínima diferença entre os braços da cavidade em duplo-T. Com estas equações o espaço de busca para os graus de liberdade, submetidos aos valores fixos de $H/L = 1$ e $H_0/L_0 = 6$, não gerará combinações que tornem a geometria inválida. Portanto, o espaço de busca de cada grau de liberdade depende dos valores dos demais graus de liberdade respeitando a hierarquia entre eles.

Para gerar o espaço de busca ainda é preciso discretizar os valores compreendidos entre as razões mínimas e máximas de cada grau de liberdade. A discretização do espaço de busca dinâmico foi realizada através do uso da função *linspace* do próprio ambiente MATLAB, desta forma são gerados vetores com a distribuição linear e uniforme de valores entre os valores máximo e mínimo. A função *linspace* recebe como parâmetro os limites e o número de elementos entre estes limites, logo a função retorna um vetor representando o espaço discretizado.

A otimização com o espaço dinâmico foi realizada através do algoritmo SA com diferentes versões, uma para cada *cooling schedule* investigado (*Boltz*, *Exponencial*, *BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*). Com o espaço de busca gerado dinamicamente e explorando os limites geométricos, a geometria da cavidade em duplo-T pôde se distribuir melhor através da área do domínio sólido, diminuindo ainda mais a resistência térmica. Os resultados da otimização com o espaço de busca dinâmico, assim como os resultados gerais da otimização de três graus de liberdade da cavidade em duplo-T, são apresentados na seção 6.2.2 de resultados e discussões.

5.2.4 OTIMIZAÇÃO DE QUATRO GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T

A otimização de quatro graus de liberdade seguiu o mesmo critério de geração do espaço de

busca dinâmico. Neste processo, o grau de liberdade H_0/L_0 também foi otimizado, assumindo valores gerados de acordo com o cálculo do espaço de busca dinâmico, respeitando a limitação geométrica do domínio para que a cavidade não extrapole a geometria. Desta forma, foram configurados dez diferentes valores para o grau de liberdade H_0/L_0 entre os valores mínimos e máximos calculados através das seguintes equações:

$$(H_0/L_0)_{min} = \frac{\phi_c - 2\phi_1 - 2\phi_2}{(0,3L)^{1/2}} \quad (5.35)$$

$$(H_0/L_0)_{max} = \frac{(H - 0,01)^{1/2}}{\phi_c - 2\phi_1 - 2\phi_2} \quad (5.36)$$

Novamente a função *linspace* do ambiente MATLAB foi utilizada para a geração dos valores compreendidos entre as razões mínimas e máximas de H_0/L_0 . Na Eq. (5.35) o valor máximo de L_0 representado pela razão mínima de H_0/L_0 , é de 30 % do tamanho de L . Valores maiores que este geram geometrias inválidas. Portanto, esta também é uma restrição da geometria da cavidade. Na Eq. (5.36) $H - 0,01$ é o valor máximo de H_0 .

O espaço de busca dos demais graus de liberdade (H_2/L_2 , H_1/L_1 e S_1/H_0) também foi gerado dinamicamente de acordo com a hierarquia entre os graus de liberdade. Assim como H_0/L_0 , foram definidos dez valores diferentes para cada grau de liberdade, permitindo um total de dez mil possíveis combinações geométricas diferentes. O valor de H/L foi fixado em $H/L = 1.0$, assim como as restrições de área seguiram os mesmos valores para a otimização de três graus de liberdade ($\phi_c = 0,1$, $\phi_1 = 0,015$ e $\phi_2 = 0,015$).

O algoritmo SA foi adaptado para a otimização de quatro graus de liberdade, portanto foi desenvolvida a função de *annealing* a qual gera os valores aleatórios para cada grau de liberdade investigado. Com o espaço de busca gerado dinamicamente, cada grau de liberdade é representado por um vetor com o número de elementos do espaço de busca, e assim a função de *annealing* gera um valor aleatório de 1 até o tamanho máximo do vetor, e ao final retorna o valor do grau de liberdade encontrado na posição sorteada. A função *randi()* foi utilizada no *script* da função de *annealing* para a geração de valores aleatórios de 1 até o tamanho do espaço de busca.

Para o processo de otimização foram empregados os mesmos parâmetros de *cooling schedule* utilizados na otimização da cavidade em Y. Apenas o modelo *Fast* foi descartado em virtude dos resultados apresentados. Quanto aos parâmetros de *StallIterLimit* e *Reannealing* foram configurados

respectivamente com os valores 250 e 100. Os resultados do processo de otimização de quatro graus de liberdade para a cavidade em duplo-T são apresentados na seção 6.2.3.

5.2.5 OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM DUPLO-T

A otimização completa da cavidade em duplo-T se fez em dois momentos. Primeiramente com o valor de $\phi_c = 0,1$, se buscou a geometria ótima para diferentes razões de H/L . O segundo momento da otimização buscou a geometria ótima para diferentes valores da restrição ϕ_c . O espaço de busca de H/L foi determinado arbitrariamente, seus valores são representados pelo vetor abaixo:

$$H/L = [0,5 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 7 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 25 \quad 30] \quad (5.37)$$

O espaço de busca para os demais graus de liberdade (H_0/L_0 , H_2/L_2 , H_1/L_1 e S_1/H_0) foram gerados dinamicamente conforme as Eqs. (5.29) - (5.36). Para cada grau de liberdade foram gerados dez valores diferentes em seu espaço de busca, gerando um total de 100000 combinações geométricas possíveis para a cavidade em duplo-T. Com a investigação de mais quatro diferentes valores para $\phi_c = 0,01$, $0,05$, $0,015$ e $0,2$, seriam necessárias 500000 simulações com o método de Busca Exaustiva.

O algoritmo SA empregado também contou com diferentes versões, assim como a otimização de quatro graus de liberdade, sendo utilizados os *cooling schedules* padrões do MATLAB (*Exponencial* e *Boltz*) e os modelos híbridos propostos neste pesquisa (*BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*). O algoritmo SA também precisou passar por adaptações na função de *annealing* adicionando a geração aleatória dos valores do grau de liberdade H/L , desta forma a função foi alterada para retornar aleatoriamente as combinações geométricas entre os graus de liberdade em cada iteração do algoritmo. É importante salientar que o processo de geração de novos pontos a serem simulados é influenciado também pelo *cooling schedule*. Quanto maior o valor da temperatura do algoritmo SA, maior será a área de exploração do espaço de busca. Para valores menores o algoritmo inicia um processo de busca local e realiza um refinamento na região do melhor ponto encontrado.

Os resultados para a otimização completa da cavidade em duplo-T para diferentes valores de ϕ , assim como os resultados da influência de H/L e ϕ_c sobre a temperatura máxima e geometria otimizada, são apresentados na seção 6.2.4 de resultados e discussões.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA PARA CAVIDADE EM Y

6.1.1 ESTUDO DE *COOLING SCHEDULES* PARA DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Após as execuções do SA, com várias simulações em busca do ótimo global, se obteve diferentes desempenhos entre as diferentes configurações dos parâmetros do SA, sendo o modelo de resfriamento (*cooling schedule*), o item mais influente neste processo. As Figs. 6.1 e 6.2 apresentam os gráficos dos diagramas de caixas e de comparação múltipla pareada, ou seja, comparação entre cada parâmetro estudado. Em estatística, os diagramas de caixas representam a dispersão dos dados e são úteis para a comparação de amostras de diferentes conjuntos de dados. Os gráficos foram gerados a partir dos dados da execução de sessenta rodadas do algoritmo SA para cada *cooling schedule* analisado, na otimização dos graus de liberdade L_1/L_0 e α para os graus de liberdade fixos de $H/L = 1,0$ e $t_1/t_0 = 11$ e restrições de $\phi = 0,05$ e $\psi = 0,3$. A configuração ótima global para este caso, conhecida pelos estudos de Lorenzini et al. (2011, 2014a), é utilizada como critério de parada do algoritmo SA. Porém, caso o SA não alcance a configuração ótima o mesmo também encerra a busca após 100 iterações sem melhorias na Função Objetivo.

Através do gráfico da Fig. 6.1 é possível observar a variação dos resultados entre os diferentes tipos de modelos de resfriamento e dentro do próprio modelo, ou tratamento como também podem ser definidos os níveis do fator analisado (Hines et al., 2006). A Fig. 6.1 demonstra o diagrama de caixa onde é possível observar os três quartis, o ponto mínimo e o máximo de temperaturas encontradas em cada *cooling schedule*. Os três quartis aqui referenciados indicam o intervalo interquartil presente na amostra analisada, sendo 25 % das menores medidas, 50 % ou mediana e 75 % das maiores medidas. Essas medidas são representadas, respectivamente por: primeiro quartil (parte inferior da caixa), segundo quartil ou a mediana (linha vermelha na Fig. 6.1) e o terceiro quartil (parte superior da caixa). Sendo assim, a caixa no diagrama de caixas representa o intervalo interquartil, os pontos de máximo e mínimos encontrados são indicados através de um traço horizontal superior e inferior ligados à caixa por uma linha tracejada, Fig. 6.1. Os símbolos de mais (+) presentes na Fig. 6.1 representam valores considerados como atípicos (*outliers*) (Hines et al., 2006).

Segundo Hines et al. (2006), as características dos gráficos indicam que os modelos de resfriamento não apresentam significativa diferença a não ser para o controle de temperatura *Fast*, que apresenta diferença acentuada na busca pela máxima temperatura em excesso adimensional mínima. É possível observar, na Fig. 6.1, que o modelo de resfriamento *Boltz-Exp*, apresenta menos valores atípicos, neste caso, mínimos locais, do que os outros modelos investigados. Em uma ótica voltada à otimização é plausível considerar o modelo híbrido como o melhor entre os três algoritmos semelhantes (*Boltz*, *Exp* e *BoltzExp*), partindo do princípio de que é o que menos apresentou valores atípicos, que neste caso representam a obtenção de pontos de mínimo local. Também é possível observar que o *cooling schedule Fast* apresentou a maior variância assim como a sua média para a $(\theta_{max})_{mm}$ é maior que o valor da temperatura máxima mínima da geometria otimizada de 0,0611.

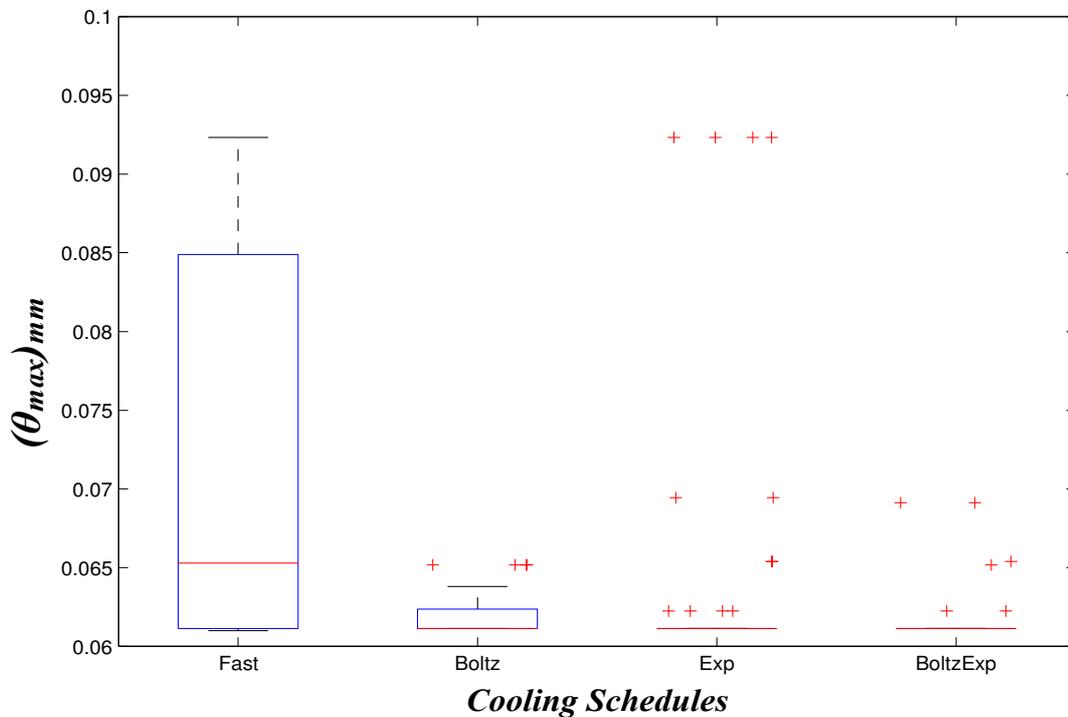


Figura 6.1. Diagramas de caixas comparando os resultados gerados pelos quatro tipos de *Cooling Schedules* estudados.

A Tabela 6.1 apresenta os dados da análise de variância entre os resultados dos diferentes *cooling schedules*. O cálculo da análise de variância foi realizado através da ferramenta de estatística, *Statistic Tool-box*, do ambiente MATLAB. A tabela está organizada em fonte de variação na primeira coluna, que seriam os grupos ou os diferentes modelos de resfriamento (*cooling*

schedules). A segunda coluna apresenta a soma dos quadrados para cada fonte. Na terceira coluna, GL representa os graus de liberdade para a variável estatística analisada, neste caso $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$. Esta variável é dada pela Eq. (6.1), onde n é o número de níveis, ou seja, modelos de resfriamento analisados. A quarta coluna apresenta a média dos quadrados para cada análise, entre e dentro dos grupos. A quinta coluna mostra o valor do teste-F, o qual representa uma estatística de teste dada pela Eq. (6.2):

$$GL = n - 1 \quad (6.1)$$

$$F_0 = \frac{MQG}{MQR} \quad (6.2)$$

onde MQG é a média quadrada entre os grupos e MQR é a média quadrada dentro dos grupos, ou média quadrada dos resíduos. Esta estatística de teste, assim como o P-Valor da última coluna, determinam se a hipótese nula será descartada ou não. A hipótese nula é a possibilidade de as médias dos grupos serem iguais. É possível observar na Tabela 6.1 que o P-valor é significativamente pequeno em comparação com o nível de significância de 0,05, indicando que a hipótese nula deve ser descartada (Hines et al., 2006). Desta forma, o resultado da análise de variância aponta para diferenças entre as médias dos grupos analisados e, portanto, existe a influência do parâmetro *cooling schedule* nos resultados do algoritmo SA.

Tabela 6.1. Análise de variância entre os diferentes modelos de resfriamento do SA.

FONTE DE VARIACÃO	SOMA DOS QUADRADOS	GL	MÉDIA DOS QUADRADOS	TESTE- F	P-VALOR
ENTRE GRUPOS	0,0047	3	0,0016	27,2852	3,4740e-15
DENTRO DOS GRUPOS (ERRO)	0,0137	236	5,7933e-05	---	--
TOTAL	0,0184	239	---	---	---

Com o resultado da análise de variância é possível comprovar que existe diferenças entre os resultados dos parâmetros de *cooling schedules* observados. Porém ainda não é possível determinar quais resultados são diferentes, mesmo o modelo *Fast* apresentando um gráfico muito distinto e média diferente dos demais na Fig. 6.1, ainda não é possível determinar se há diferença entre os

demais modelos. Desta forma, a Fig. 6.2 apresenta um gráfico com os resultados da comparação múltipla executada através da função *multcompare* da ferramenta de estatística, *Statistic Tool-box*, do ambiente MATLAB. O gráfico da Fig. 6.2 apresenta os quatro diferentes tipos de *cooling schedules* junto ao eixo das ordenadas, enquanto que no eixo das abcissas estão os valores de $(\theta_{max})_{mm}$. A proposta do gráfico é ilustrar as diferenças entre as médias dos parâmetros analisados. A mediana dos resultados observados de cada *cooling schedule* é representada pelo círculo. A linha representa o intervalo de valores estimados calculados com base nos valores de $(\theta_{max})_{mm}$ para cada modelo de resfriamento. As linhas em vermelho significam que não existe uma diferença significativa entre as médias dos modelos *Botz*, *Exp* e *BoltzExp*. A linha em azul representa o modelo *Fast* como o fator que apresenta uma diferença estatisticamente significativa em relação às médias dos demais parâmetros estudados.

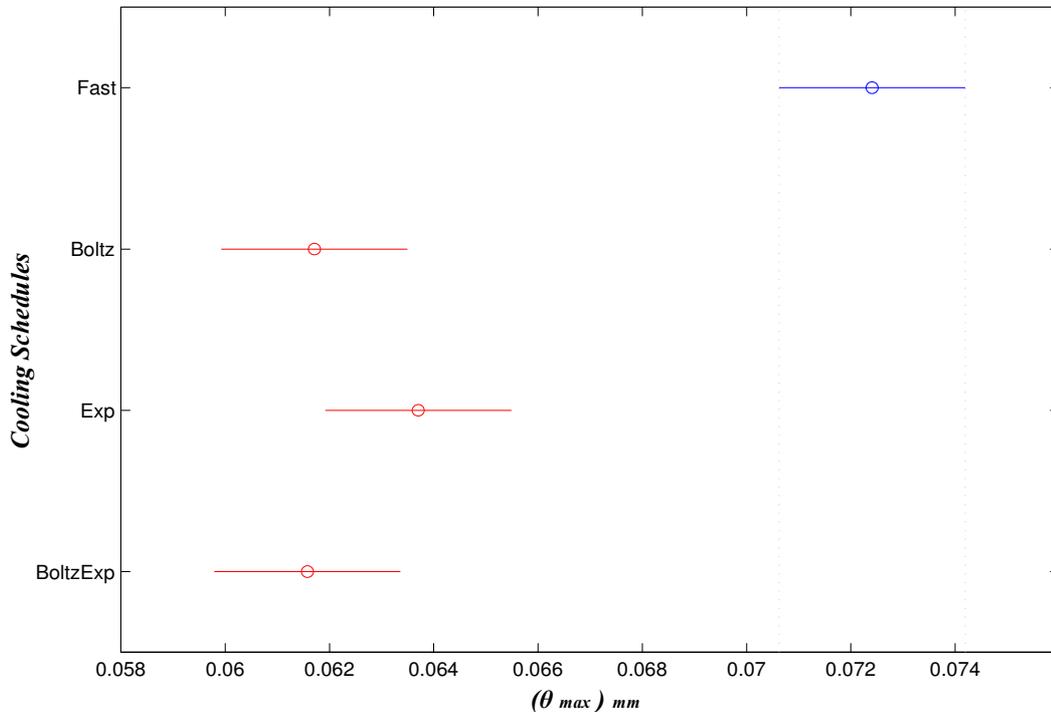


Figura 6.2. Comparação entre as médias dos resultados de cada *Cooling Schedule* estudado.

O teste de comparação múltipla é realizado com o nível de significância de 0,05 e os intervalos de confiança de cada *cooling schedule* representados pelas linhas na Fig. 6.2 são calculados com 95 % de confiança. Os valores dos limites inferior e superior das linhas são

calculados como funções estatísticas dos dados amostrais, a equação empregada neste cálculo é dada por:

$$\bar{X} - Z_{\lambda/2} \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\lambda/2} \sigma / \sqrt{n} \quad (6.3)$$

onde \bar{X} representa a média amostral, n é o tamanho da amostra e λ é o nível de significância (0,05). O termo μ é a média de \bar{X} , representada como um círculo no gráfico da Fig. 6.2. O desvio padrão é representado pelo termo σ . Z é a distribuição estatística dada pela seguinte equação:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (6.4)$$

A Tabela 6.2 apresenta uma comparação entre as execuções do SA para os quatro tipos de resfriamento da temperatura. É importante salientar que os dados da Tabela 6.2 foram baseados em sessenta execuções do algoritmo SA para cada modelo de resfriamento (*Fast*, *Boltz*, *Exp*, e *BoltzExp*). A quarta coluna da tabela apresenta o número de vezes que o algoritmo encontrou a configuração ótima, assim como a quinta coluna demonstra a porcentagem em encontrar o ponto ótimo em relação ao total de execuções. Como o algoritmo SA é um algoritmo do tipo probabilístico e possui funções de geração aleatória de números, observa-se que o número de iterações até encontrar o valor ótimo não é constante. Portanto, a Tabela 6.2 apresenta, também, a média de iterações, assim como o menor e maior número de iterações ocorridas na busca pelo valor ótimo.

Tabela 6.2. Comparação entre modelos de resfriamento.

COOLING SCHEDULE	(L/L₀)_o	(a)_{oo}	Qtd	%	MÉDIA ITERAÇÕES	MENOR N° ITERAÇÕES	MAIOR N° ITERAÇÕES
<i>Fast</i>	0,007	1,55	30	50	129,28	4	187
<i>Boltz</i>	0,007	1,55	43	72	206,63	6	422
<i>Exp</i>	0,007	1,55	48	80	100,9	18	248
<i>BoltzExp (híbrido)</i>	0,007	1,55	54	90	154,58	49	381

De acordo com a Tabela 6.2 o algoritmo com melhor desempenho foi aquele controlado pela função híbrida de temperatura (*Boltzexp*). O modelo de resfriamento híbrido proporcionou ao SA

uma melhor convergência ao ponto ótimo, sendo que 54 execuções, do total de 60, retornaram os valores ótimos para L_1/L_0 e α , (0,007 e 1,55) resultando a $(\theta_{\max})_{\text{mm}} = 0,61134$. É possível observar pela Tabela 6.2, que o controle híbrido (*BoltzExp*) teve um desempenho 10 % melhor que o controle exponencial (*Exp*), 18 % melhor que o controle *Boltz* e 40 % melhor que o controle *Fast*.

6.1.1.1 COMPARAÇÃO ENTRE SA, AG E BE

Considerando que o desempenho do algoritmo SA com o *cooling schedule* híbrido foi o mais satisfatório, o próximo passo será realizar uma comparação entre a máxima temperatura em excesso adimensional duas vezes minimizada, $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$, e suas respectivas geometrias ótimas: $(L_1/L_0)_o$ e α_{oo} , obtidas através do *Simulated Annealing* (SA), Algoritmo Genético (AG) e Busca Exaustiva (BE). Mais precisamente, a Tabela 6.3 apresenta uma comparação entre os resultados e o desempenho dos métodos de BE, apresentado em Lorenzini et al. (2011) e o AG, aplicado na pesquisa de Estrada et al. (2012) e Lorenzini et al. (2014a). Nesta comparação foi usada a moda do número de iterações presente nos resultados das sessenta execuções do SA, ou seja, o número de iterações com maior ocorrência.

De uma forma geral, os resultados mostram que a máxima temperatura em excesso adimensional duas vezes minimizada, $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$, foi a mesma em todos os mecanismos de busca. Além disso, todos os métodos empregados conduziram às mesmas geometrias ótimas: $(L_1/L_0)_o$ e α_{oo} . Com relação ao número de iterações (simulações requeridas para otimizar o problema) pode ser observado que os mecanismos de busca heurísticos e probabilísticos requerem um número de simulações sensivelmente inferior ao necessário com BE, permitindo a otimização de geometrias complexas com maior número de graus de liberdade. Para o problema estudado o número de simulações requeridas com BE foi 1,96 e 2,31 vezes maior do que o simulado com os métodos AG e SA, respectivamente. Também pode ser visualizado que, para este caso específico, o método SA foi superior que o AG em aproximadamente 15 %. Outras simulações e a avaliação de novos graus de liberdade são requeridas para uma avaliação mais conclusiva sobre uma comparação de desempenho entre SA e AG.

Tabela 6.3. Comparação entre os resultados obtidos com SA, AG e BE para uma otimização com os seguintes parâmetros fixos: $H/L = 1,0$; $t_1/t_0 = 11,0$; $\phi = 0,05$ e $\psi = 0,3$.

MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO	$(L_1/L_0)_o$	$(\alpha)_{oo}$	$(\theta_{max})_{mm}$	NÚMERO ITERAÇÕES
<i>Busca Exaustiva</i>	0,007	1,55	0,611	331
<i>Algoritmos Genéticos</i>	0,007	1,55	0,611	169
<i>Simulated Annealing</i>	0,007	1,55	0,611	143*

* Moda do número de iterações nas 60 execuções do SA com modelo de resfriamento híbrido

A Figura 6.3 ilustra uma comparação do campo de temperaturas entre a geometria ótima encontrada e geometrias extremas no espaço de soluções válidas, para o caso em que os graus de liberdade são fixados em $H/L = 1,0$ e $t_1/t_0 = 11,0$ e para as seguintes restrições: $\phi = 0,05$ e $\psi = 0,3$. A Figura 6.3(a) mostra o campo de temperaturas para o extremo inferior do espaço de busca de L_1/L_0 ($L_1/L_0 = 0,001$), enquanto a Fig. 6.3(b) apresenta o campo de temperaturas para a geometria duas vezes otimizada e a Fig. 6.3(c) ilustra o campo de temperaturas para o extremo superior de L_1/L_0 estudado ($L_1/L_0 = 1,0$). Semelhantemente ao que foi observado nos trabalhos anteriores de Lorenzini et al. (2011, 2014a) o emprego do *Constructal Design* permitiu a obtenção de geometrias ótimas com desempenho térmico significativamente superior ao obtido com geometrias não otimizadas. Para os casos apresentados a geometria ótima (Fig. 6.3(b)) teve um desempenho térmico aproximadamente 81 % e 39 % superior ao obtido para as geometrias extremas, Fig. 6.3(a) e 6.3(c), respectivamente. A Figura 6.3 também permite observar que o desempenho térmico máximo é obtido para a geometria com campo de temperaturas mais homogeneamente distribuído, ou seja, de acordo com o princípio constructal da “Ótima Distribuição das Imperfeições” (Bejan, 2000; Bejan e Lorente, 2008).

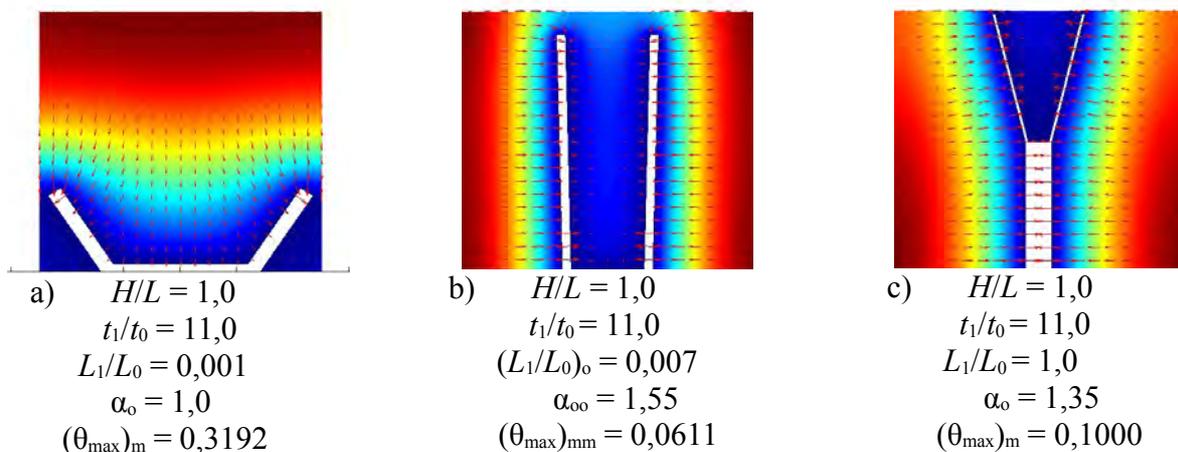


Figura 6.3. Campos de temperaturas para as geometrias com várias razões de L_1/L_0

6.1.2 OTIMIZAÇÃO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

A otimização de três graus de liberdade utiliza o algoritmo *Simulated Annealing* com o *cooling schedule* híbrido (*BoltzExp*) e com parâmetro de parada do algoritmo entre 150 e 200 iterações sem mudança na configuração ótima. Nesta etapa, a máxima temperatura em excesso adimensional é minimizada três vezes, ou seja, além dos graus de liberdade L_1/L_0 e α é avaliado também o efeito da razão t_1/t_0 sobre o desempenho térmico do problema. Os resultados comparativos entre o número de simulações, valores encontrados para $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$ e suas respectivas geometrias ótimas podem ser observados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4. Comparação entre os resultados obtidos com SA, AG e BE para uma otimização com os seguintes parâmetros fixos: $H/L = 1,0$; $\phi = 0,05$ e $\psi = 0,3$.

Parâmetro / Estudo		Presente Estudo SA	Lorenzini et al. (2014a) AG	Lorenzini et al. (2011) BE
$t_1/t_0 = 7,0$	Iterações	141	31	527
	$(\alpha)_{\text{oo}}$	1,48	1,48	1,48
	$(L_1/L_0)_{\text{o}}$	0,001	0,001	0,001
	$(\theta_{\max})_{\text{mm}}$	0,07002	0,0700	0,0700
$t_1/t_0 = 10,0$	Iterações	149	47	649
	$(\alpha)_{\text{oo}}$	1,54	1,54	1,53
	$(L_1/L_0)_{\text{o}}$	0,001	0,001	0,001
	$(\theta_{\max})_{\text{mm}}$	0,063905	0,0639	0,0642
$t_1/t_0 = 11,0$	Iterações	143	169	331
	$(\alpha)_{\text{oo}}$	1,55	1,55	1,55
	$(L_1/L_0)_{\text{o}}$	0,007	0,007	0,007
	$(\theta_{\max})_{\text{mm}}$	0,061134	0,0611	0,0611
$t_1/t_0 = 12,0$	Iterações	119	52	385
	$(\alpha)_{\text{oo}}$	1,53	1,53	1,53
	$(L_1/L_0)_{\text{o}}$	0,05	0,05	0,05
	$(\theta_{\max})_{\text{mm}}$	0,064245	0,0642	0,0642

A Tabela 6.4 demonstra os resultados da execução do algoritmo *Simulated Annealing* para diferentes valores de t_1/t_0 , onde foram mantidos fixos os parâmetros: $H/L = 1,0$; $\phi = 0,05$ e $\psi = 0,3$.

Através desta tabela é possível observar que os algoritmos de busca meta-heurísticos e combinatórios, encontraram os pontos de ótimos consumindo consideravelmente menos esforço computacional do que o convencional método de Busca Exaustiva (BE).

A Figura 6.4 nos traz uma visão geral dos pontos de ótimo encontrados pelo algoritmo *Simulated Annealing* (SA) em comparação com os resultados da execução do método de BE realizado nos estudos de Lorenzini et al. (2011), bem como o efeito da razão t_1/t_0 sobre $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$, $(L_1/L_0)_o$ e α_{oo} . Os pontos quadrados e os círculos representam os valores ótimos encontrados pelo SA, assim como a linha no gráfico representa os vários pontos simulados através do método de BE. É possível observar na Fig. 6.4 que o SA além de buscar de forma satisfatória as geometrias ótimas globais, ainda consegue reproduzir o efeito de uma razão geométrica (neste caso t_1/t_0) sobre $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$ e suas respectivas geometrias ótimas $(L_1/L_0)_o$ e α_{oo} .

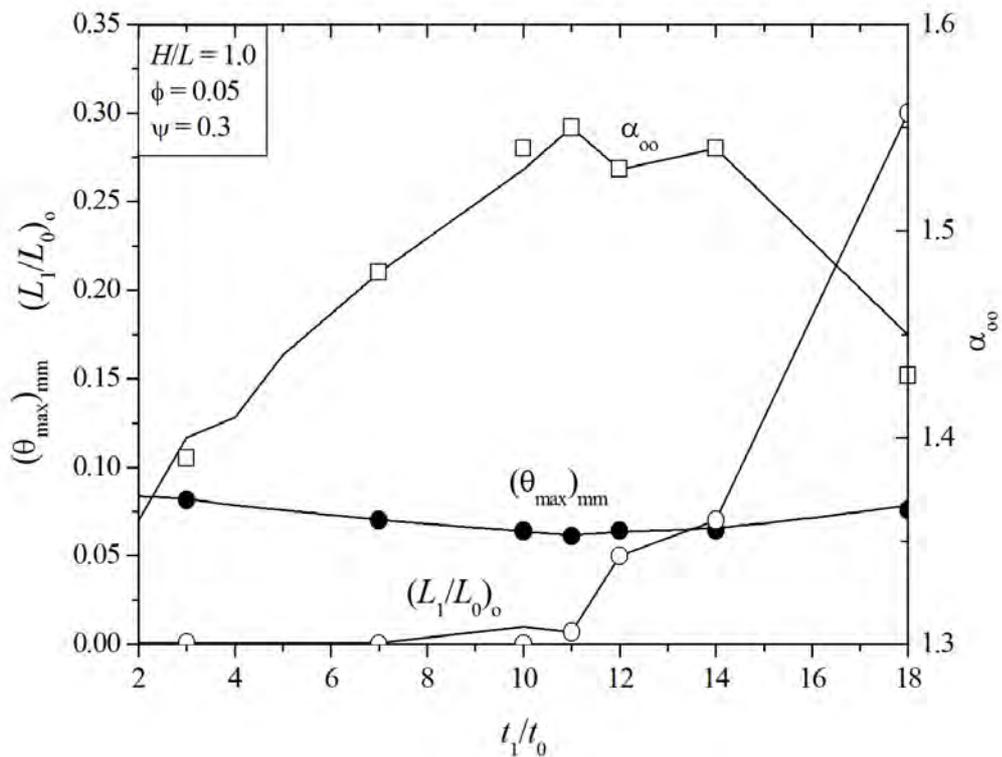


Figura 6.4. Comparação dos resultados para o efeito da razão t_1/t_0 sobre $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$ e suas respectivas geometrias ótimas obtidas com os métodos SA e BE (Lorenzini et al., 2011).

6.1.3 ANÁLISE DOS SEIS *COOLING SCHEDULES*

Além da análise do *cooling schedule* híbrido *BoltExp*, outros dois modelos híbridos, *ConstExp1* e *ConstExp2*, também são propostos e estudados na região ótima para $10 \leq t_1/t_0 \leq 12$. Nesta etapa são otimizados três graus de liberdade, mantendo-se fixos os parâmetros $H/L = 1,0$, $\phi = 0,05$ e $\psi = 0,3$. A seleção da faixa de análise para t_1/t_0 foi realizada em função dos resultados apresentados na Fig. 6.4, onde é possível verificar que a região de ótimo ocorre para $t_1/t_0 \sim 11,0$.

Nessa seção, preocupou-se em realizar uma comparação entre os modelos padrões do MATLAB e os novos modelos híbridos de *cooling schedule* propostos aqui. Foram realizadas vinte rodadas de trinta execuções do SA para cada *cooling schedule*. Ao final de cada rodada, o estudo registrou o percentual de vezes em que o algoritmo foi bem sucedido na busca pelas geometrias ótimas globais, $(L_1/L_0)_o$ e α_{oo} , para os valores de $t_1/t_0 = 10, 11$ e 12 . No total, se obteve sessenta observações de porcentagens para cada modelo de resfriamento estudado. Vale destacar que, a geometria ótima global é previamente definida a partir dos resultados obtidos com o mecanismo de BE.

A Tabela 6.5 apresenta medidas estatísticas calculadas a partir da distribuição da porcentagem de vezes em que a geometria ótima global foi alcançada, ou seja, que minimiza a temperatura máxima adimensional três vezes, $(\theta_{\max})_{\text{mmm}}$. Através da Tabela 6.5 é possível observar que as medidas estatísticas aumentam em direção aos modelos híbridos. Medidas como a média, demonstram a maior confiabilidade dos *cooling schedules* híbridos de forma que representam que o algoritmo SA encontrou a configuração ótima na maior parte de suas execuções. Uma vez que o SA é um algoritmo não determinístico, é de suma importância para as futuras análises da geometria utilizar parâmetros que o tornem mais confiável, ou seja, que apresentem maior robustez nos resultados do algoritmo, principalmente em casos onde não é viável a utilização do método BE. Os estudos completos realizados no presente trabalho são exemplos de situações onde o mecanismo de BE torna-se inviável.

A medida de Desvio Absoluto presente na Tabela 6.5 refere-se ao Desvio Absoluto Médio em que a Média Aritmética é utilizada como valor de tendência central. O equacionamento do Desvio Absoluto Médio, Variância Amostral e do Desvio Padrão é representado, respectivamente, por:

$$DAM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} \quad (6.5)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (6.6)$$

$$\sigma = \sqrt{s^2} \quad (6.7)$$

onde, x_i é uma determinada amostra, \bar{x} é a média e n é o tamanho da amostra.

A Tabela 6.5 evidencia a influência do parâmetro de *cooling schedule* no processo de otimização. O *cooling schedule Fast*, apesar de possuir os menores valores para desvios e variância, possui a menor média de porcentagem em encontrar o ótimo global em relação os demais parâmetros estudados. Para o algoritmo *Fast* é registrada uma média de 12,94 % indicando que de trinta execuções do SA com este parâmetro, apenas 4 execuções retornaram a geometria ótima global. Por outro lado, o *cooling schedule ConstExp2* apresenta uma média de 62,44 % de execuções que encontram a geometria ótima, ou seja, 18 das 30 execuções simuladas.

Tabela 6.5. Medidas estatísticas da distribuição percentual em encontrar as formas ótimas para cada

Cooling Schedule

<i>Cooling Schedules / Estatísticas</i>	Fast	Exponential	Boltz	BoltzExp	ConstExp1	ConstExp2
Média	12,94	27,50	42,72	54,39	54,67	62,44
Desvio Absoluto	8,50	14,75	14,71	17,98	19,80	22,68
Desvio Padrão	10,11	16,86	17,09	20,93	23,57	25,63
Variância	102,10	284,23	292,10	438,23	555,63	656,82
Moda	3,33	6,667	33,33	30,00	20,00	83,33
Mediana	11,67	30,00	36,66	53,33	56,67	71,67
Menor Valor	0,00	0,00	13,33	16,67	10,00	10,00
Maior Valor	36,67	60,00	73,33	90,00	93,33	96,67

A única desvantagem dos modelos híbridos é o aumento da variância em relação aos modelos padrões. Porém, analisando as outras medidas estatísticas, os modelos híbridos apresentam resultados superiores. Um exemplo é a comparação entre os melhores casos, denominados na Tabela 6.5 de Maior Valor, onde os modelos híbridos apresentam percentuais entre 90 a 96,67 % de obtenção da geometria ótima global contra a apenas 36,67 a 73,33 % nos melhores casos dos modelos padrões do MATLAB. Para o pior caso analisado, os *cooling schedules Fast e Exponencial* registraram até 0% de ocorrência da geometria ótima.

Para uma avaliação mais precisa do parâmetro *cooling schedule* do SA para os seis diferentes

tipos analisados, é necessário dispor de ferramentas estatísticas como a análise de variância (ANOVA), já abordada na secção 6.1.1. Através da análise de variância é possível ter uma indicação estatística de que os fatores analisados (*cooling schedules*) possuem médias percentuais diferentes para alcançar o ótimo global. Primeiramente, é apresentado o modelo estatístico linear a ser utilizado para a representação da distribuição de porcentagens através da equação a seguir:

$$p_{ij} = m_t + \tau_i + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, a, \\ j = 1, 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (6.8)$$

onde p_{ij} é a (ij)-ésima observação, neste caso o percentual de vezes que o ótimo global foi atingido, m_t é um parâmetro comum a todos os tratamentos (*cooling schedules*), chamado de *média total*, τ_i é um parâmetro associado ao i -ésimo tratamento, nomeado como efeito do i -ésimo tratamento, e ε_{ij} é um componente de erro aleatório. O modelo da Eq. (6.8) é chamado de análise de variância de um critério, por que se investiga apenas um fator (Hines et al., 2006). Neste caso o fator é a influência do parâmetro *cooling schedule* do SA.

Segundo Hines et al. (2006) para a aplicação da ANOVA é necessária a homogeneidade das variâncias analisadas, sendo que os erros são aleatórios com distribuição normal e independente. Nas observações analisadas a variância não é homogênea, portanto, antes da aplicação da ANOVA, é necessária uma transformação nos dados observados p_{ij} , ou seja, a análise em uma métrica diferente. Como os dados refletem percentuais, a recomendação proposta por Snedecor e Cochran (1980) é dividi-los por 100 e aplicar o arco seno da raiz quadrada. A transformação aplicada sobre as observações é dada a seguir:

$$p_{ij} = \arcsin(\sqrt{p_{ij}/100}) \quad (6.9)$$

A Figura 6.5 apresenta a aplicação do teste de Levene (Fox, 2005; James et al., 2013) (que neste trabalho foi realizado com o Software-R). Antes da transformação, o resultado do valor-P associado ao teste era de $2,431 \times 10^{-8}$, o que descarta com 100 % de intervalo de confiança a hipótese nula, a qual afirmaria a homogeneidade das variâncias. Após a transformação, a Fig. 6.5 demonstra o valor-P de 0,001686 maior que o nível de significância de 0.001, comprovando a veracidade da hipótese nula. Desta forma, é possível concluir com 99,9 % de confiança que a transformação aplicada levou à homogeneidade das variâncias.

TESTE DE LEVENE ANTES DA TRANSFORMAÇÃO

```
+ leveneTest(optg_percent~schedule,datasa)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
  Df F value Pr(>F)
group 5  9.3053 2.431e-08 ***
 354
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

TESTE DE LEVENE DEPOIS DA TRANSFORMAÇÃO

```
+ leveneTest(optg_percent~schedule,datasa)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
  Df F value Pr(>F)
group 5  3.9511 0.001686 **
 354
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Figura 6.5. Aplicação do Teste de Levene para o teste de homogeneidade das variâncias

Após o processo de transformação das observações, tornando as variâncias homogêneas, é possível seguir para a análise de variância e demais análises estatísticas considerando a distribuição normal e independente das observações. A Tabela 6.6 apresenta a ANOVA aplicada à distribuição de porcentagens. A intenção com esta análise é verificar a hipótese nula de que não existem diferenças significativas entre as médias das observações analisadas. A equação a seguir apresenta as hipóteses a serem testadas:

$$\begin{aligned} H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0, \\ H_1: \tau_i \neq 0 \text{ para pelo menos um } i. \end{aligned} \quad (6.10)$$

A Eq. (6.10) apresenta a hipótese nula, H_0 , a qual pressupõe que não existem diferenças entre os tratamentos (*cooling schedules*), o que indicaria que não existe influência deste fator sobre as observações. Enquanto a hipótese H_1 , que rejeita a hipótese nula, representa a diferença de pelo menos um fator em relação aos demais. A Tabela 6.6, apresenta a ANOVA com o valor-P ($4,4920 \times 10^{-42}$) muito pequeno em relação ao nível de significância de 0,001, o que automaticamente rejeita a hipótese nula H_0 com o intervalo de confiança de 99,9 %. O valor-P indica a diferença entre as médias dos tratamentos analisados para o fator único estudado, ou seja, os diferentes *cooling schedules* influenciam a distribuição das porcentagens observadas. Portanto a hipótese H_1 na Eq. (6.10) é verdadeira.

Tabela 6.6. Análise de Variância da distribuição de porcentagens entre todos os *Cooling Schedules* analisados.

FORTE DE VARIACÃO	SOMA DOS QUADRADOS	GL	MÉDIA DOS QUADRADOS	TESTE- F	P-VALOR
Schedules	5	907,57	181,514	65,102	$4,49 \times 10^{-42}$
Residuals	354	987,01	2,788	---	--
Total	359	1894,58	---	---	---

A ANOVA presente na Tabela 6.6 indica a diferença entre os *cooling schedules* analisados, porém apenas com esta análise não é possível analisar quais tratamentos são diferentes entre si. Para identificar as diferenças entre cada tratamento, foi realizada uma análise pareada, onde todos os possíveis pares foram comparados através do teste de *Tukey*. Segundo Hines et al. (2006), o teste de *Tukey* é um dos testes mais populares que evitam erros do tipo I da estatística em análise pareada. O erro do tipo I é a rejeição incorreta da hipótese nula. A hipótese a ser testada é demonstrada a seguir:

$$H_0: m_{i} = m_{j}, \quad \text{para todo } i \neq j \quad (6.11)$$

onde m_{i} é a média total do tratamento i em comparação à m_{j} , media total do tratamento j , e assim comparando todos os pares possíveis. O teste de *Tukey* foi realizado através do Software-R (Team R. D. C. , 2015) considerando o nível de significância igual a 0,05, o que leva a um intervalo de confiança de 95%.

A Figura 6.6 demonstra o resultado da aplicação do teste de *Tukey*, onde é possível observar que a comparação entre os *cooling schedules Boltz* e *BoltzExp*, assim como *Boltz* e *ConstExp1*, indica diferenças entre os modelos para o nível de significância de 0,05(*).

```

+ require(sandwich)
+ amod <- aov(optg_percent ~ schedule, data = data$a)
+ amod_glht <- glht(amod, mcp(schedule = "Tukey"), vcov = vcovHC)
+ summary(amod_glht)

> Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses

Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts

Fit: aov(formula = optg_percent ~ schedule, data = data$a)

Linear Hypotheses:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
boltz - b_exp == 0 -7.1783 2.1392 -3.356 0.0110 *
c_exp1 - b_exp == 0 0.1662 2.5454 0.065 1.0000
c_exp2 - b_exp == 0 5.2846 2.6989 1.958 0.3641
exp - b_exp == 0 -17.7417 2.3185 -7.652 <0.001 ***
fast - b_exp == 0 -29.0399 2.1561 -13.468 <0.001 ***
c_exp1 - boltz == 0 7.3445 2.3331 3.148 0.0214 *
c_exp2 - boltz == 0 12.4629 2.4998 4.986 <0.001 ***
exp - boltz == 0 -10.5634 2.0833 -5.070 <0.001 ***
fast - boltz == 0 -21.8616 1.9010 -11.500 <0.001 ***
c_exp2 - c_exp1 == 0 5.1184 2.8551 1.793 0.4667
exp - c_exp1 == 0 -17.9079 2.4985 -7.167 <0.001 ***
fast - c_exp1 == 0 -29.2061 2.3486 -12.435 <0.001 ***
exp - c_exp2 == 0 -23.0263 2.6548 -8.673 <0.001 ***
fast - c_exp2 == 0 -34.3245 2.5143 -13.652 <0.001 ***
fast - exp == 0 -11.2982 2.1007 -5.378 <0.001 ***
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
(Adjusted p values reported -- single-step method)

```

Figura 6.6. Aplicação do teste de Tukey

Segundo os resultados da Figura 6.6 os parâmetros *BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*, são considerados iguais. Na Figura 6.6, o símbolo de (***) nas demais comparações, indica a diferença entre as médias dos *cooling schedules*. Através do teste de *Tukey* os *cooling schedules* foram classificados em categorias comuns, cada grupo de parâmetros semelhantes recebeu uma identificação por letras (*a*, *b*, *c* e *d*), como pode ser observado na Figura 6.7. Além de classificar os *cooling schedules* analisados, no gráfico da Figura 6.7, os parâmetros também são ordenados em relação às médias percentuais de obtenção da geometria ótima global.

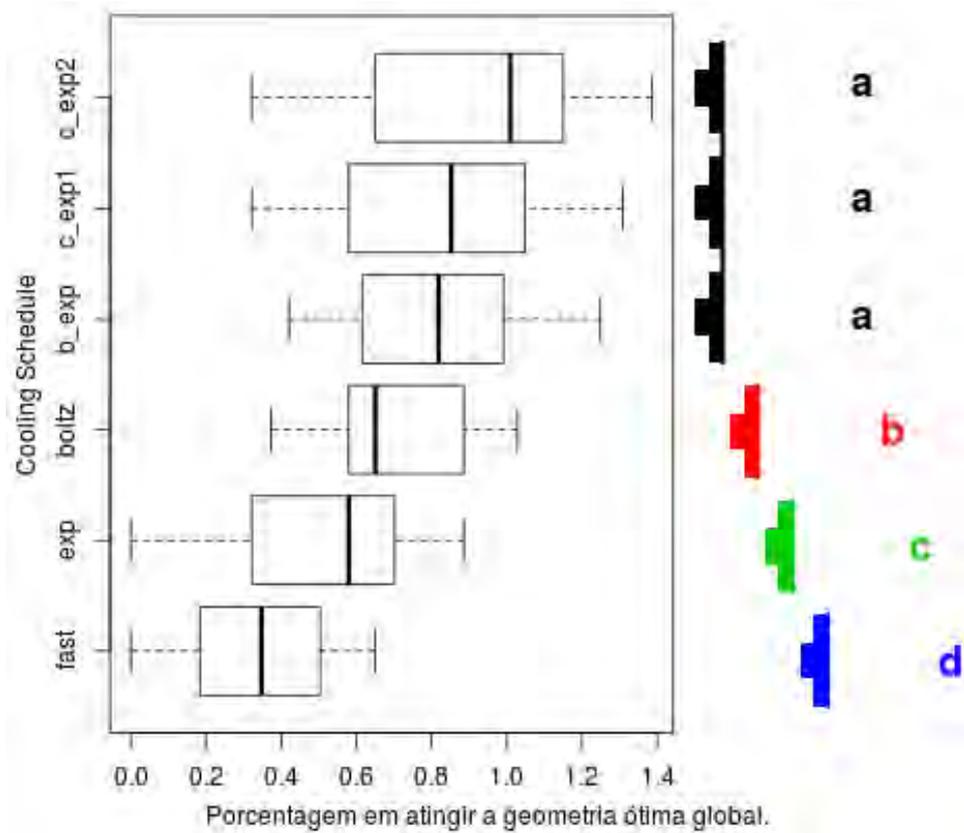


Figura 6.7. Gráfico do Tipo *BoxPlot* com a classificação do teste de *Tukey* para o nível de significância 0,05.

Com os resultados da análise de variância associada aos dados do Teste de *Tukey*, é possível considerar o modelo de resfriamento do SA *Fast*, como o pior *cooling schedule* entre todos os parâmetros analisados. Também é possível constatar, através do gráfico da Fig. 6.7 as semelhanças entre os modelos híbridos propostos. O *cooling schedule* com a melhor média foi o *ConstExp2*, porém o mesmo apresenta uma variação muito grande no percentual de alcance da geometria ótima global. Através das extremidades inferiores do gráfico da Figura 6.7 e dos valores da Tabela 6.5, é possível observar que o pior percentual obtido com o *cooling schedule ConstExp2* (10 %) é inferior aos piores resultados de outros parâmetros como o *BoltzExp* (16 %) e o *Boltz* (13 %), sendo este último de uma classificação inferior aos modelos híbridos. Entretanto, com os resultados apresentados é possível identificar quais parâmetros possuem uma maior confiabilidade no sentido de apresentarem maior probabilidade de encontrar as geometrias ótimas, sendo os modelos híbridos os mais confiáveis. Esta análise é importante para o ajuste do SA, principalmente em situações em que não é possível validar os seus resultados pelo método de Busca Exaustiva.

6.1.4 OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM Y

Esta seção apresenta os resultados da otimização completa da cavidade em Y com a imposição de diferentes valores para as restrições ψ e ϕ . Foram estudados quatro valores para a restrição de área auxiliar (ψ), sendo eles $\psi = 0,3; 0,4; 0,5$ e $0,6$. Para cada um destes valores, a restrição de área da cavidade (ϕ) variou em cinco diferentes valores de $\phi = 0,01; 0,05; 0,1; 0,15$ e $0,2$. Dessa forma, o estudo de otimização para os quatro graus de liberdade (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 e α) deve ser refeito vinte vezes. Conseqüentemente, a avaliação do efeito das restrições ψ e ϕ sobre a máxima temperatura em excesso minimizada quatro vezes, $(\theta_{\max})_{\text{m m m m}}$, e suas respectivas geometrias ótimas, α_{oooo} , $(L_1/L_0)_{\text{oooo}}$, $(t_1/t_0)_{\text{oo}}$ e $(H/L)_{\text{o}}$, torna-se inviável de ser realizada com o método de BE. Para a otimização com o método de BE são necessárias 273600 simulações apenas para uma combinação de ψ e ϕ , para as vinte combinações possíveis são necessárias 5472000. Com o algoritmo SA os resultados demonstram que é possível realizar a otimização completa para todos os casos de ψ e ϕ com 207705, neste caso utilizando seis versões do algoritmo, uma para cada tipo de *cooling schedule* investigado.

Em razão da brevidade, serão abordados os resultados para $\psi = 0,3$, como apresenta a Tabela 6.7, em que para cada combinação de ψ e ϕ existe uma geometria ótima com os devidos valores para os quatro graus de liberdade (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α). Para os demais resultados em relação aos valores de $\psi = 0,4; 0,5$ e $0,6$, consulte o ANEXO I. Além de apresentar as geometrias ótimas, a Tabela 6.7 também apresenta a classificação do SA com os diferentes *cooling schedules* estudados de acordo com o $(\theta_{\max})_{\text{m m m m}}$ e o número de iterações necessárias na otimização.

É possível notar pela Tabela 6.7, que, em alguns casos, mais de uma configuração do SA conseguem encontrar a geometria ótima, porém estes diferem quanto ao número de iterações, exatamente pela natureza não determinística do algoritmo. É possível observar a tendência dos algoritmos híbridos em encontrar com mais facilidade o menor valor de $(\theta_{\max})_{\text{m m m m}}$ e as geometrias ótimas. Vale destacar que, com exceção do caso $\phi = 0,01$ onde o melhor desempenho foi obtido com o *cooling schedule* padrão *Boltz*, as geometrias ótimas globais foram alcançadas com o emprego de algum algoritmo híbrido. Contudo, mesmo no caso $\phi = 0,01$ o modelo híbrido *ConstExp2* encontrou a geometria ótima local mais próxima da global com um menor número de iterações.

Tabela 6.7. Resultados da otimização completa da cavidade em Y aplicando o SA com vários *Cooling Schedules* para $\psi = 0,3$

$\psi = 0,3 \setminus$ RESTRIÇÕES	GRAUS DE LIBERDADE				$(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$	SIMULATED ANNEALING	
ϕ	$(H/L)_o$	$(t_1/t_o)_{oo}$	$(L_1/L_o)_{ooo}$	$(\alpha)_{oooo}$		Cooling Schedule	Iterações
0,01	20	15	0,500	1,56	0,007555	Boltz	1227
-	10	70	0,070	1,56	0,009888	ConstExp2	1646
-	10	70	0,070	1,56	0,009888	Exponencial	2003
-	10	30	0,500	1,55	0,011902	BoltzExp	1257
-	10	30	0,500	1,55	0,011902	ConstExp1	2611
-	10	30	0,500	1,55	0,011902	Fast	1930
0,05	20	18	1,000	1,56	0,005197	ConstExp1	2786
-	15	100	0,700	1,56	0,006489	Exponencial	2259
-	15	100	0,700	1,56	0,006489	Fast	2921
-	10	5	0,100	1,56	0,009909	Boltz	1114
-	10	4	0,700	1,55	0,011831	ConstExp2	1289
-	2	220	0,300	1,54	0,038485	BoltzExp	1849
0,10	15	5	1,000	1,56	0,006138	ConstExp2	1591
-	15	5	1,000	1,56	0,006138	BoltzExp	1701
-	15	100	0,500	1,57	0,007106	Boltz	1360
-	10	160	1,000	1,56	0,008067	ConstExp1	1629
-	7	5	0,300	1,56	0,011859	Exponencial	1497
-	7	9	1,000	1,55	0,012428	Fast	1832
0,15	7	4	0,700	1,56	0,011111	BoltzExp	1674
-	7	4	0,700	1,56	0,011111	Fast	1678
-	7	4	0,700	1,56	0,011111	Boltz	1840
-	7	4	0,700	1,56	0,011111	ConstExp1	2425
-	7	12	0,700	1,57	0,013790	Exponencial	1805
-	15	70	1,000	1,57	0,021003	ConstExp2	1413
0,20	5	2	1,000	1,55	0,015925	ConstExp1	1156
-	5	2	1,000	1,55	0,015925	Boltz	1199
-	5	2	1,000	1,55	0,015925	BoltzExp	1378
-	5	2	1,000	1,55	0,015925	Exponencial	1676
-	5	2	1,000	1,55	0,015925	ConstExp2	3050
-	0,5	2	0,001	1,36	0,116572	Fast	1229

Para a avaliação dos efeitos da variação de ϕ em relação aos graus de liberdade quando $\psi = 0,3$, Figs. 6.9 a 6.12 e na temperatura máxima mínima, Fig. 6.8, é preciso observar a curva da cor preta referente aos dados dos melhores resultados do SA, pois nesta curva encontram-se as configurações geométricas ótimas que conseqüentemente levam ao menor $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ em comparação com os resultados individuais de cada variação do SA e inclusive menor que os resultados apresentados pelos estudos de Lorenzini et al. (2014a) com o AG.

Os resultados mostram que a utilização dos seis diferentes *cooling schedules* potencializaram o processo de otimização, pois ainda que analisados individualmente, o conjunto dos melhores resultados entre todos, também foi considerado no processo de otimização. Neste sentido, os próximos gráficos, assim como a Fig. 6.8, apresentam de forma integrada e separadamente os resultados para cada versão do SA, além de comparar com os resultados obtidos pelo AG no trabalho de Lorenzini et al. (2014a).

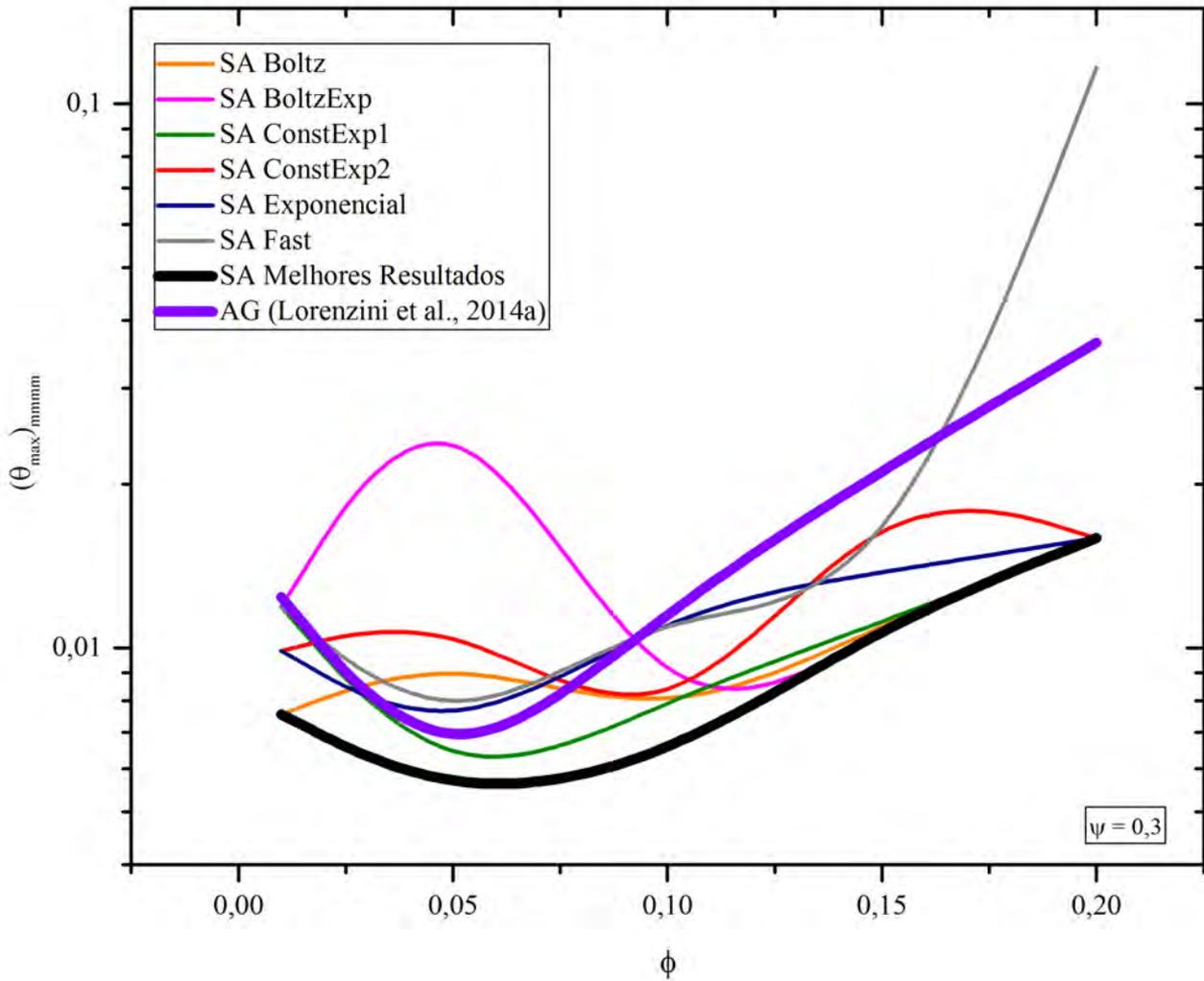


Figura 6.8. Comparação entre o AG (Lorenzini et al. 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ para $\psi = 0,3$

A Figura 6.8 relaciona o efeito da variação de ϕ , para $\psi = 0,3$, sobre $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$, apresentando um gráfico conclusivo, pois fica claro o entendimento da influência dos parâmetros de *cooling schedules* do SA sobre o processo de otimização da geometria em busca da minimização da temperatura máxima em excesso θ_{\max} .

Para $\phi = 0,01$, o *cooling schedule* Boltz, foi o único a registrar a menor $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$, com cerca de 60 % do maior valor de temperatura encontrado pelo AG. Nos demais valores de $\phi = 0,05$ e $0,1$, os modelos híbridos encontram geometrias cuja $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ é até a metade do que os valores apresentados pelo GA. É possível observar ainda que o *cooling schedule* Fast é o modelo que apresenta maior discrepância com relação aos melhores resultados obtidos da combinação de vários *cooling schedules*, especialmente para $\phi > 0,15$. Dessa forma, é possível constatar que os resultados

obtidos aqui para o modelo *Fast* corroboram as apresentações prévias da seção 6.1.3, sendo o parâmetro que apresentou maiores ocorrências de mínimos locais.

Na Figura 6.9 é possível notar que os valores ótimos para o grau de liberdade $(\alpha)_{0000}$ estão em torno de 1,55 a 1,57. Os melhores resultados apresentados pelo SA e suas variações de *cooling schedule* registram o valor constante de 1,56 para o $(\alpha)_{0000}$ de forma insensível ao aumento de ϕ até 0,1, porém para maiores razões da área da cavidade o ângulo apresenta uma tendência de queda até 1,55. Os resultados de Lorenzini et al. (2014a) apresentam a mesma tendência, entretanto registram valores levemente menores chegando a 1,54 em $\phi = 0,2$.

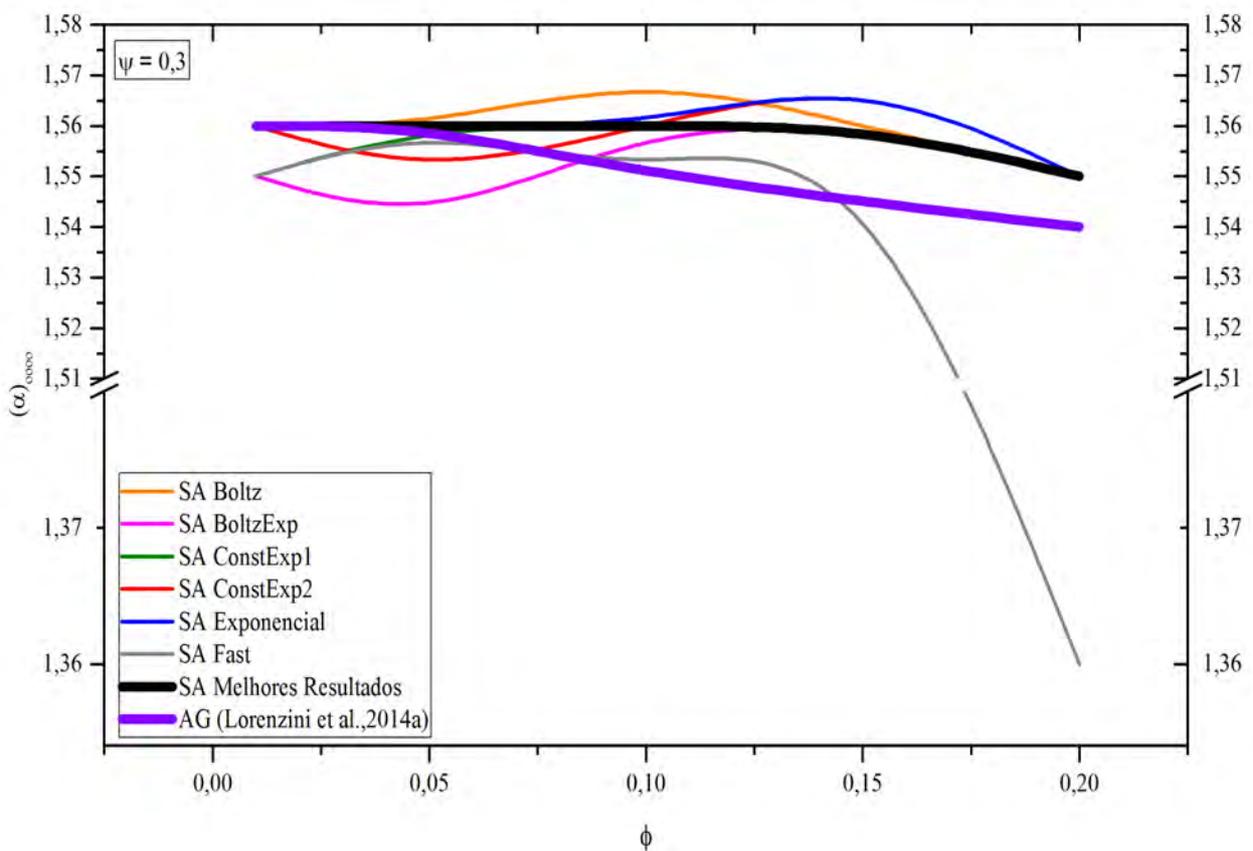


Figura 6.9. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\alpha)_{0000}$ para $\psi = 0,3$

Inicialmente as curvas no gráfico representam os valores de $(\alpha)_{0000}$ para $\phi = 0,1$, e neste caso, o SA com os *cooling schedules BoltzExp* e *ConstExp1*, assim como o *Fast*, não encontraram os valores ótimos registrados pelo AG e pelos demais modelos de resfriamento. Entretanto, ainda registraram uma diferença pequena, estando dentro da região ótima para o grau de liberdade α . O

gráfico aponta para uma boa convergência de todos os algoritmos a partir de $\phi = 0,1$. O AG apresenta uma variação pequena mas também segue no intervalo da região ótima. O *cooling schedule Fast* é o único que apresenta uma grande distorção na avaliação do efeito de ϕ sobre o grau de liberdade estudado, registrando o valor de $\alpha_{0000} = 1,38$ para $\phi = 0,2$.

Os resultados da Figura 6.10 mostram uma grande distorção entre os valores de $(L_1/L_0)_{000}$ em função de ϕ , um padrão de convergência surge para maiores valores da restrição de área da cavidade, sendo que em $\phi = 0,2$, todos apresentam o mesmo valor exceto o modelo *Fast* que registra o valor igual ao apresentado pelo AG. Novamente o *cooling schedule Fast* destoa dos demais quanto à configuração ótima, porém ainda neste caso ele registrou um valor igual ao AG. Com relação à razão de $(t_1/t_0)_{00}$, a Figura 6.11 também apresenta uma grande divergência em relação à configuração ótima para valores de ϕ menores, apenas a partir de $\phi = 0,1$ é possível notar algum padrão de convergência. Para o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{00}$ os resultados do AG e dos melhores resultados entre os *cooling schedules* do SA apresentam uma tendência semelhante para valores de $\phi \geq 0,05$.

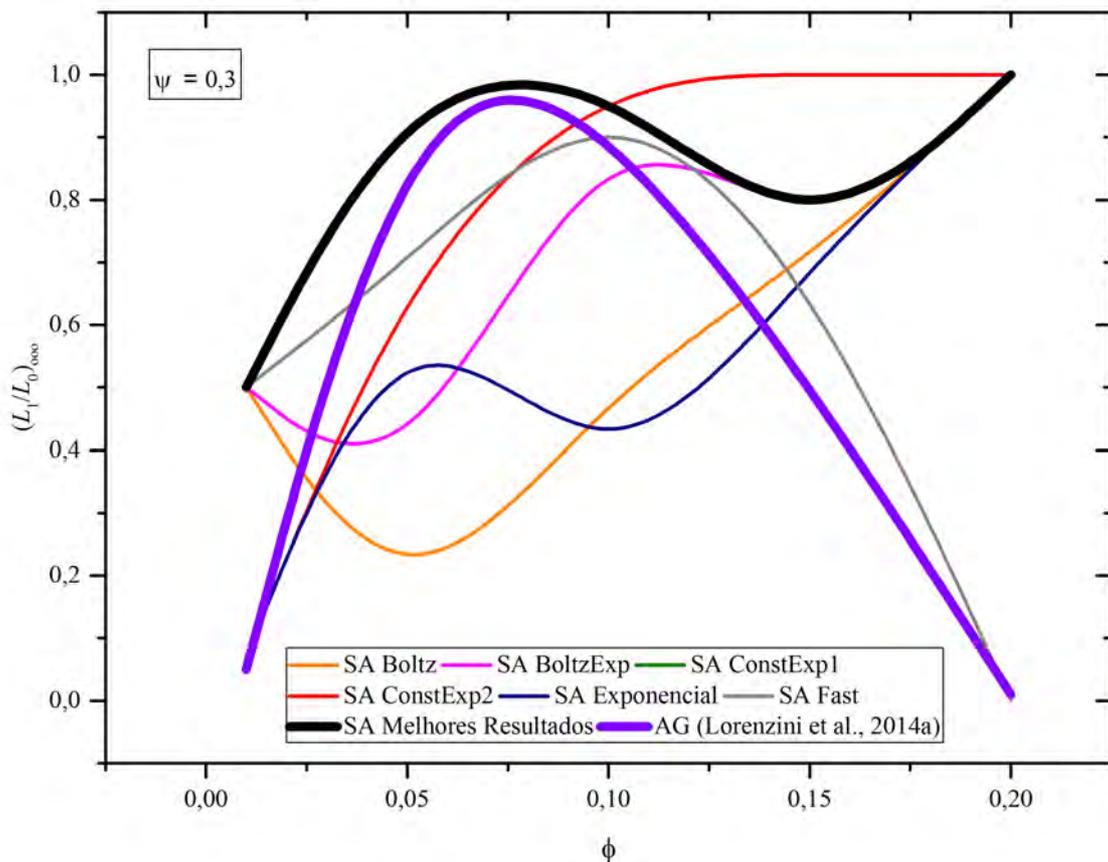


Figura 6.10. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{000}$ para $\psi = 0,3$

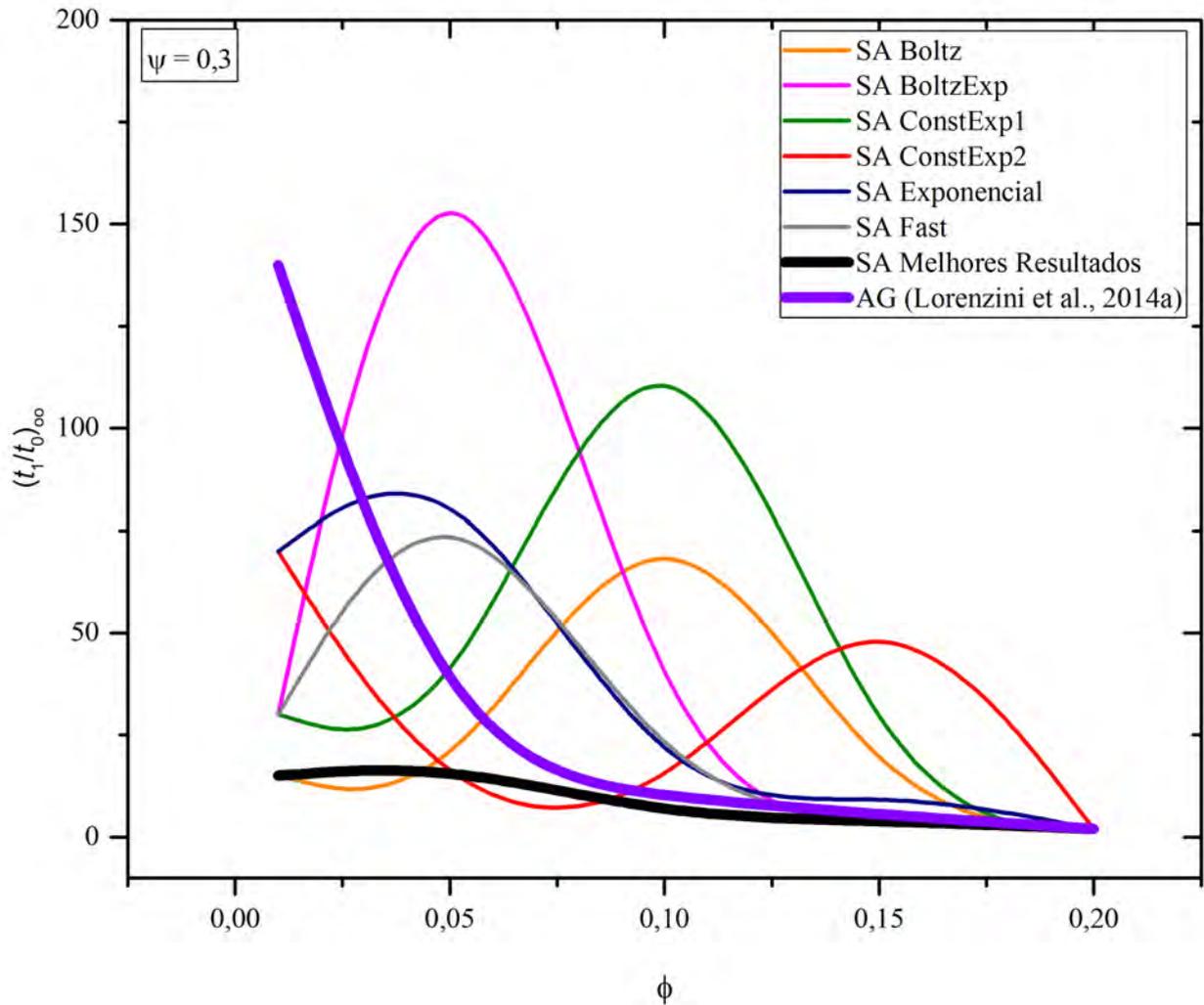


Figura 6.11. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{\infty}$ para $\psi = 0,3$

A Figura 6.12 apresenta o efeito da variação do ϕ sobre o grau e liberdade $(H/L)_o$. Portanto, a linha na cor preta relaciona os pontos onde o valor da razão $(H/L)_o$ pertence à geometria ótima com o menor $(\theta_{\max})_{\text{mínimo}}$ entre todos os *cooling schedules*, enquanto que as demais linhas coloridas, exceto a indicada como AG, representam os resultados individualmente para cada *cooling schedule*.

No caso da Fig. 6.12 não aparecem evidências de superioridade na eficiência de algum modelo de resfriamento sobre outro parâmetro, sendo o conjunto dos resultados das variações do SA que apontam para os melhores resultados. Por exemplo, em $\phi = 0,01$ todas as variações do SA com diferentes *cooling schedules* resultam como $(H/L)_o = 10$ a razão ótima para a geometria, enquanto que apenas o SA com *cooling schedule Boltz* direciona para uma razão maior, $(H/L)_o =$

20,0, que entre as geometrias comparadas é a ótima. Este é um fenômeno normal do carácter não determinístico de métodos de otimização combinatória, onde não é possível prever com total certeza o resultado final do algoritmo. Porém, é possível identificar padrões nos resultados gerais que possibilitem melhores resultados no sentido de ajustar ou adaptar da melhor forma o algoritmo empregado ao problema. Com relação ao efeito de ϕ sobre $(H/L)_o$ é possível observar que na faixa entre $0,01 \leq \phi \leq 0,05$ houve uma grande dificuldade para todos os algoritmos em reproduzir o comportamento de $(H/L)_o$ em função de ϕ . Para valores de $\phi \geq 0,05$ os algoritmos *ConstExp1* e AG apresentaram uma tendência mais semelhante a obtida para a combinação dos melhores resultados

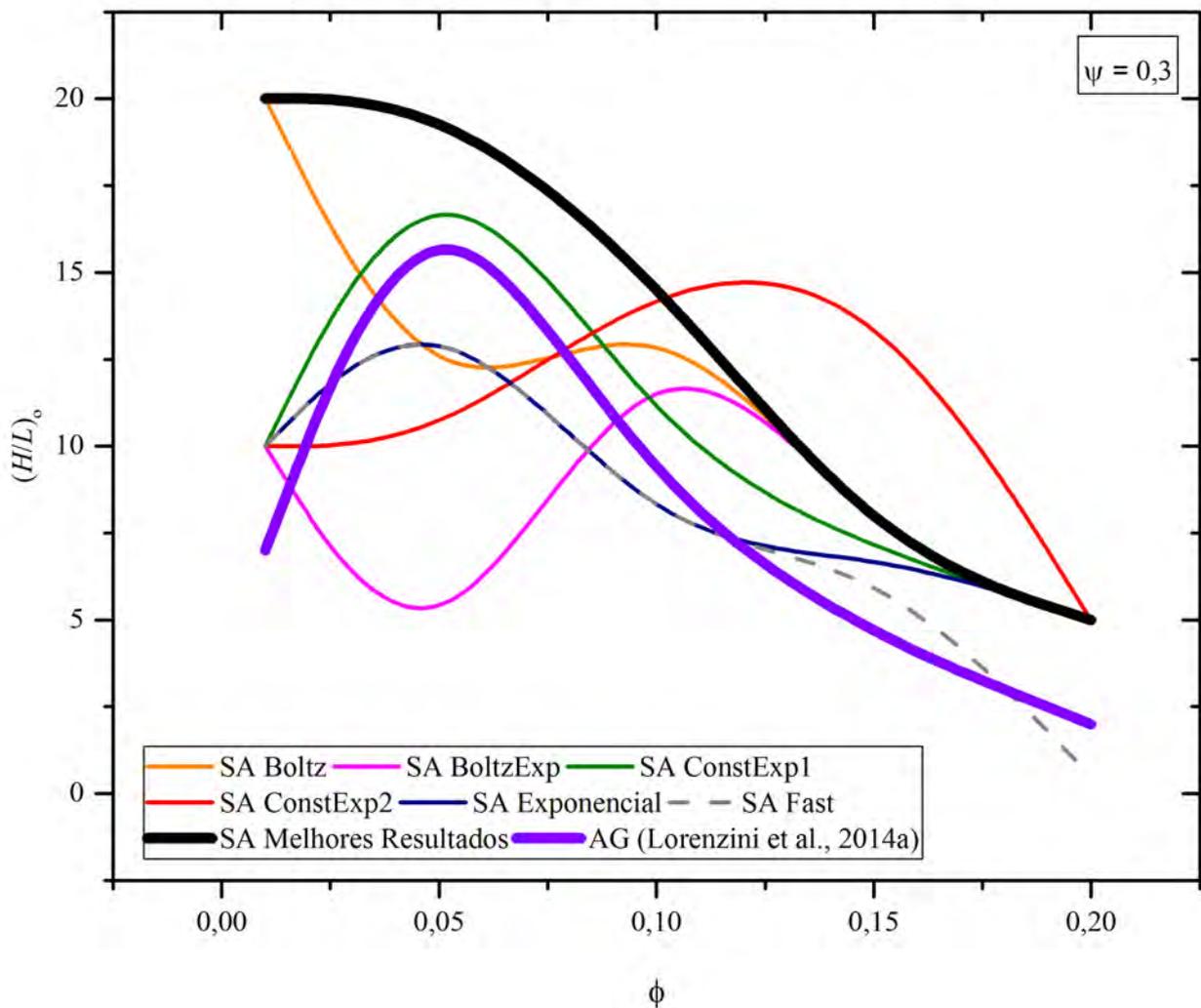


Figura 6.12. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(H/L)_o$ para $\psi = 0,3$

Na seção 6.1.3, foi possível classificar os parâmetros que apresentaram maior porcentagem em encontrar o ótimo global em um número finito de execuções. Os resultados desta primeira

análise em relação à otimização completa sob $\psi = 0,3$ são coerentes com os resultados da seção 6.1.3, à medida que se percebe que o desempenho do modelo *Fast* apresenta os piores resultados, especialmente para as maiores magnitudes de ϕ . Na Tabela 6.7 o algoritmo SA com o *cooling schedule Fast* registra apenas um valor em comum com a configuração ótima de $(H/L)_o$, isto para $\phi = 0,15$.

As Figuras 6.13(a) - (e) demonstram os campos de temperaturas obtidos com as geometrias ótimas para $\psi = 0,3$ e $\phi = 0,01; 0,05; 0,1; 0,15$ e $0,2$, respectivamente, assim como o *cooling schedule* responsável pela otimização. De uma forma geral, é possível observar que com o aumento de ϕ a geometria ótima do sólido diminui sua razão H/L , ou seja, o sólido tende a ser mais largo e baixo.

As Figuras 6.14(a) - (c) ilustram as geometrias ótimas encontradas pelo SA com o *cooling schedule Fast*, com o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o algoritmo híbrido *ConstExp1* para $\phi = 0,2$. Todos os parâmetros de *cooling schedule* investigados encontraram a geometria da Fig. 6.14(c), exceto o modelo de resfriamento *Fast*, o qual retornou a geometria da Fig. 6.14(a) como geometria ótima. O modelo híbrido *ConstExp1* foi o *cooling schedule* que executou menos iterações no processo de otimização, como é possível verificar na Tabela 6.7. A geometria da Fig. 6.14(c) possui um valor de temperatura máxima mínima, $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$, sete vezes menor que a geometria encontrada pelo SA *Fast* na Fig. 6.14(a) e duas vezes menor que o valor de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ da geometria encontrada pelo AG. Vale destacar também que o algoritmo *Fast* realizou a predição de uma geometria completamente diferente da geometria ótima obtida com o *ConstExp1*. Esse resultado ilustra a importância de avaliar os parâmetros de otimização, uma vez que a seleção inadequada dos mesmos pode conduzir a recomendações inadequadas das geometrias ótimas em problemas de transferência de calor.

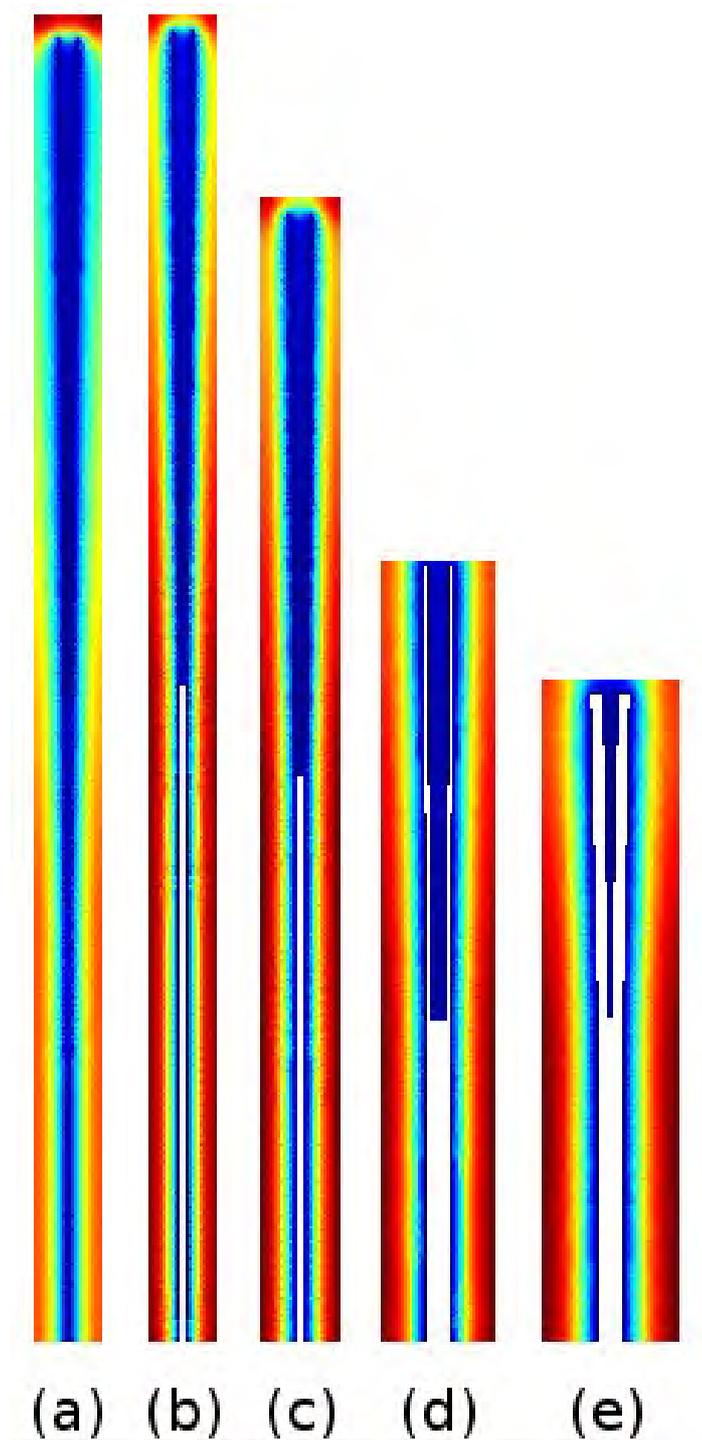


Figura 6.13. Geometrias ótimas para $\psi = 0,3$:

- (a)** $\phi = 0,01$, $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 15$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,5$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,007555$ (*Boltz*) ;
(b) $\phi = 0,05$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 18$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,005197$ (*ConstExp1*);
(c) $\phi = 0,1$; $(H/L)_o = 15$; $(t_1/t_0)_{oo} = 5$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,006138$ (*ConstExp2*);
(d) $\phi = 0,15$; $(H/L)_o = 7$; $(t_1/t_0)_{oo} = 4$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,7$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,011111$ (*BoltzExp*);
(e) $\phi = 0,2$; $(H/L)_o = 5$; $(t_1/t_0)_{oo} = 2$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,55$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,015925$ (*ConstExp1*);

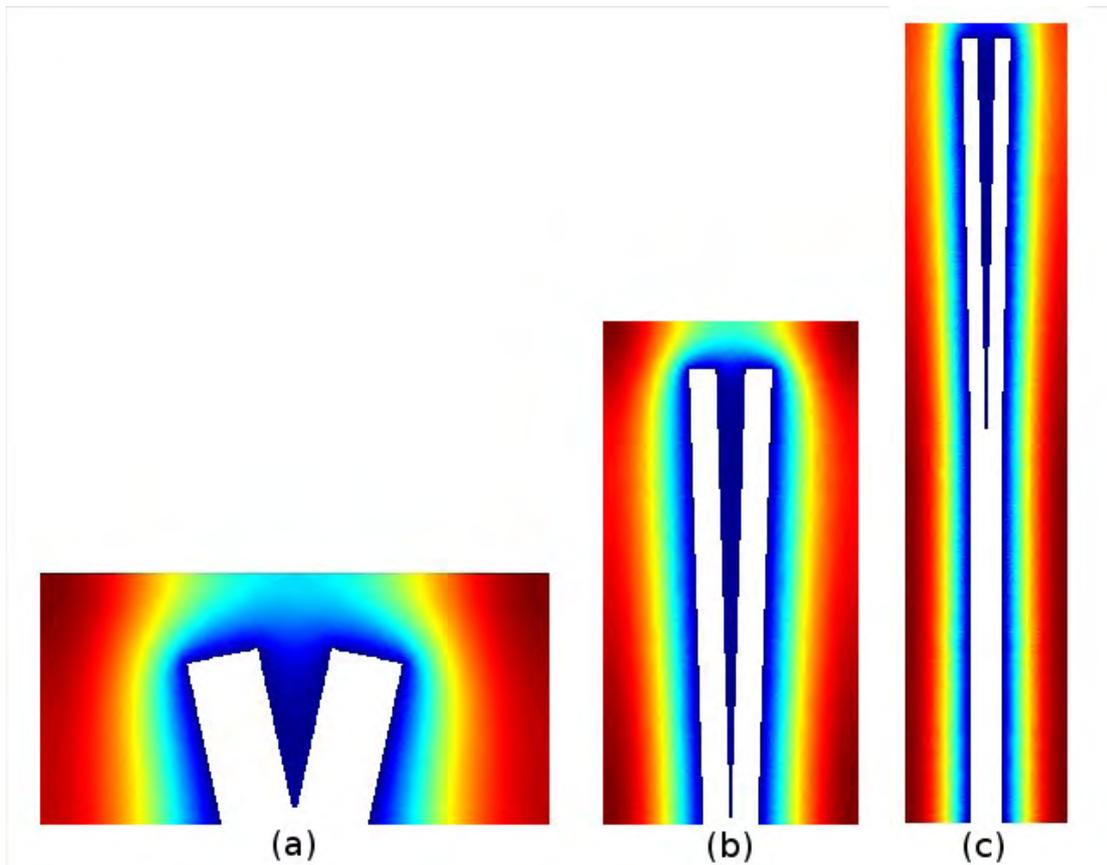


Figura 6.14. Geometrias quatro vezes otimizadas encontradas por diferentes algoritmos

para $\psi = 0,3$ e $\phi = 0,2$:

(a) *SA Fast*, $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,1165$;

(b) AG (Lorenzini et al. 2014a), $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,0364$;

(c) *SA Constexpl*, $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,0159$

Na comparação apresentada pelas Figs. 6.14(a) - (c), a solução com *Fast* conduziu à recomendação de uma geometria com uma tendência sensivelmente diferente da geometria ótima global encontrada nesse estudo. Com relação à predição realizada a partir do AG, as razões geométricas possuem uma semelhança maior com as estimadas pelo algoritmo *ConstExpl*. Contudo, a menor razão de H/L obtida para o AG faz com que o ramo simples da cavidade em Y tenha menor penetração no sólido. Consequentemente, a geometria ótima da cavidade assemelha-se a uma cavidade em “V” o que não é observado no estudo com o *ConstExpl*.

6.2 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO DA CAVIDADE EM DUPLO-T

6.2.1 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T

A otimização de dois graus de liberdade da cavidade em duplo-T foi realizada, inicialmente, com o método de Busca Exaustiva, os resultados encontrados por este método foram utilizados para validar os resultados da aplicação do algoritmo SA ao processo de otimização desta cavidade específica. Os graus de liberdade otimizados foram o S_1/H_0 , H_1/L_1 e H_2/L_2 , a otimização é considerada como dois graus de liberdade porque os valores de H_1/L_1 e H_2/L_2 foram mantidos iguais, conservando a simetria dos braços da cavidade em duplo-T. Os demais graus de liberdade da geometria da cavidade foram fixados em $H/L = 1,0$ e $H_0/L_0 = 6,0$, assim como as restrições $\phi_c = 0,1$, $\phi_1 = 0,015$ e $\phi_2 = 0,015$.

O valor de S_1/H_0 foi determinado através da variação da variável S_1 . A Fig. 6.15 demonstra o efeito da razão S_1/H_0 com dois incrementos diferentes de $\Delta S_1/H_0 = 1,0 \times 10^{-3}$ e $1,0 \times 10^{-4}$. O objetivo é testar a influência do incremento sobre os resultados da máxima temperatura em excesso adimensional uma vez minimizada, $(\theta_{\max})_m$, e da razão $(S_1/H_0)_o$ com o mecanismo de BE. A Figura 6.15 ilustra que a diferença nos resultados com os diferentes incrementos é muito pequena. Contudo, como o número de simulações requeridas para $\Delta S_1/H_0 = 1,0 \times 10^{-4}$ é 10 vezes maior do que o menor incremento, os próximos estudos com o método de BE irão usar o menor incremento, ou seja, $\Delta S_1/H_0 = 1,0 \times 10^{-3}$.

Com a precisão de $\Delta S_1/H_0 = 1,0 \times 10^{-3}$, foi realizada a otimização para os demais valores de H_1/L_1 e H_2/L_2 , tanto com o método BE como com o algoritmo SA configurado com os três *cooling schedules* híbridos. O resultado da otimização para $H_1/L_1 = H_2/L_2 = 0,4$ pode ser observado na Figura 6.16. No gráfico da Fig. 6.16, os pontos em cinza representam todas as configurações geométricas possíveis simuladas pelo método BE, ou seja, um total de 363 simulações. Enquanto que os triângulos vermelhos representam as simulações realizadas com o SA configurado com o *cooling schedule ConstExp2*. Os resultados indicam que o algoritmo SA encontrou o mesmo valor ótimo com menos da metade de simulações requeridas com BE (126 simulações).

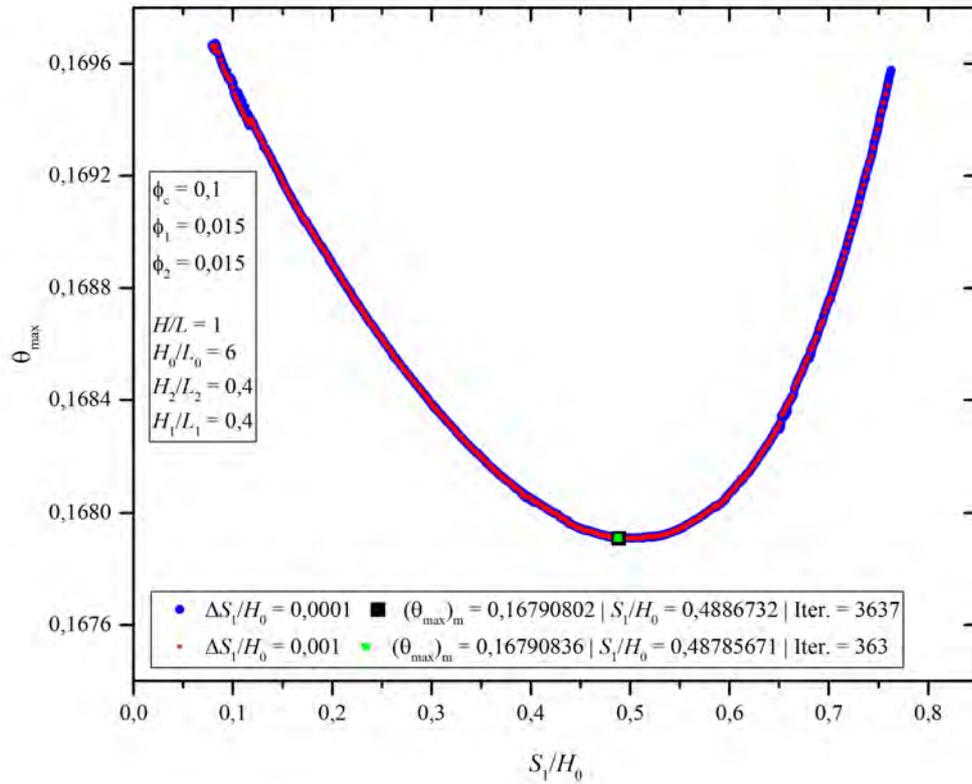


Figura 6.15. Avaliação da influência de diferentes incrementos de S_1/H_0 sobre o efeito dessa variável sobre $(\theta_{\max})_m$.

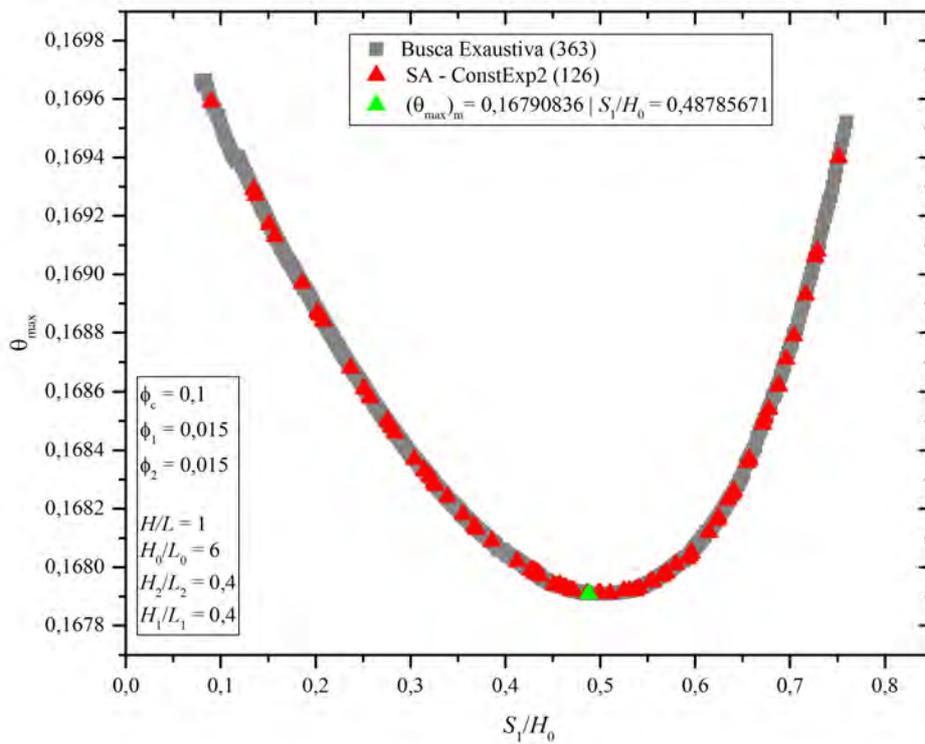


Figura 6.16. Comparação entre os resultados de BE e SA para o efeito de S_1/H_0 sobre $(\theta_{\max})_m$.

Os triângulos em vermelho na Fig. 6.16 representam os valores de S_1/H_0 simulados pelo SA *ConstExp2*. É possível observar que o algoritmo concentra a busca na região perto do ótimo global. O *cooling schedule* também influencia a maneira como o algoritmo explora o espaço de busca, pois em altas temperaturas de controle do SA, no início da execução, o algoritmo explora um espaço maior, com maior distância entre os pontos simulados. À medida que a temperatura do algoritmo diminui, o mesmo refina a busca próximo do melhor ponto. Este efeito é visualizado pela concentração de pontos simulados próximos ao ponto ótimo $(\theta_{\max})_m$, ilustrado pelo ponto em verde na Fig 6.16.

A Tabela 6.8 demonstra os demais resultados referentes às outras versões do SA configuradas com diferentes *cooling schedules*. A Tabela 6.8 também apresenta as configurações dos parâmetros de *StallIterLimit* do SA. O parâmetro de *StallIterLimit* é responsável por determinar o critério de parada, sendo o número de iterações do algoritmo sem mudança na solução ótima. Por exemplo, quando o valor de *StallIterLimit* é igual a 100, o algoritmo para ao atingir cem simulações sem mudanças na configuração ótima. O parâmetro de *Reannealing* define quando o algoritmo deve elevar a temperatura de controle para o valor inicial, neste caso ele é configurado com o valor de 50. É possível perceber que com o aumento do parâmetro *StallIterLimit* de 50 para 100, todas as versões do SA encontraram o valor ótimo de S_1/H_0 . Conseqüentemente, o aumento do valor do critério de parada, *StallIterLimit*, incrementa também o número de iterações totais do algoritmo, sendo a versão SA *BoltzExp* a que apresentou o menor número de iterações (Iter.), um total de 170 simulações.

Tabela 6.8. Resultados do método de Busca Exaustiva e das diferentes versões do SA para dois graus de liberdade em $H_2/L_2 = 0,4$.

Iter.	$(\theta_{\max})_m$	S_1/H_0	Método	Tempo(s)	
363	0,1679083	0,487	Exaustivo	~1400	StallIterLimit
126	0,1679083	0,487	SA ConstExp2	533	50
83	0,1679093	0,485	SA BoltExp	331	50
98	0,1679100	0,500	SA ConstExp1	418	50
170	0,1679083	0,487	SA BoltExp	693	100
176	0,1679083	0,487	SA ConstExp2	730	100
212	0,1679083	0,487	SA ConstExp1	901	100

A Figura 6.17 apresenta os campos de temperaturas para o extremo inferior de $S_1/H_0 = 0,08$, Fig. 6.17(a), para a razão uma vez otimizada de $(S_1/H_0)_o = 0,488$, Fig. 6.17(b), e o limite superior de

$S_1/H_0 = 0,759$, Fig. 6.17(c), estudado nesse trabalho. De uma forma geral, para os parâmetros que foram mantidos constantes ($\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = \phi_2 = 0,015$; $H/L = 1,0$; $H_0/L_0 = 6,0$ e $H_1/L_1 = H_2/L_2 = 0,4$) é possível observar que o grau de liberdade S_1/H_0 possui pequena influência sobre a magnitude da máxima temperatura em excesso adimensional. Esse comportamento ocorre, principalmente, pela variação dos ramos intermediários que surgem em uma região do domínio sólido que já está resfriada pela cavidade. Como pode ser observado, o campo de temperaturas aquecido mantém uma distribuição semelhante na região superior do domínio sólido para as três configurações mostradas na Fig. 6.17.

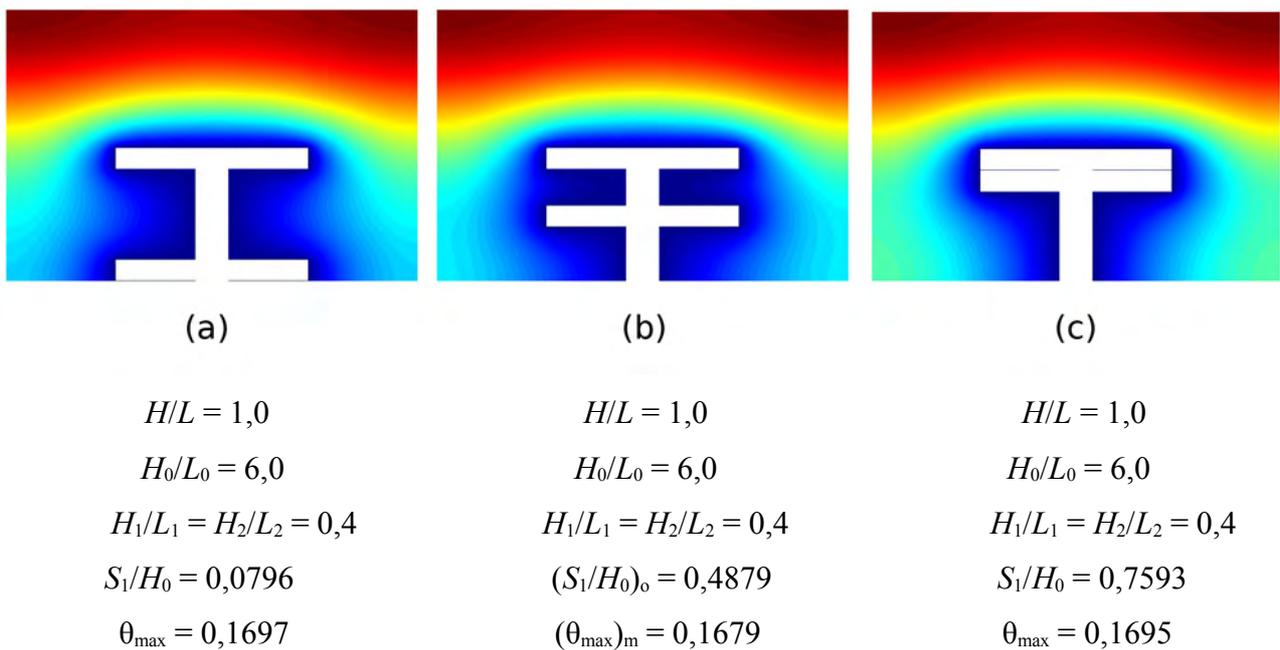


Figura 6.17. Comparação entre a geometria ótima e duas geometrias não otimizadas obtidas na Fig. 6.16.

A Tabela 6.9 apresenta os resultados da otimização para os demais valores de H_2/L_2 ($0,8 \leq H_2/L_2 \leq 2,0$). A otimização foi realizada com o método de Busca Exaustiva (BE) e com diferentes versões do SA. Na maioria dos resultados, o desempenho do SA com os *cooling schedules* híbridos foi de até metade do número de simulações requeridas pelo método BE. O tempo total de execução do algoritmo foi aproximado de acordo com o número de iterações, considerando o tempo de quatro segundos para cada simulação.

Através dos resultados apresentados na Tab. 6.9 é possível notar a grande influência da razão dos braços da cavidade em duplo-T (H_1/L_1 e H_2/L_2), para os valores de $H/L = 1,0$ e $H_0/L_0 = 6,0$,

sobre a resistência térmica do domínio sólido. Os menores valores de θ_{\max} e inclusive o menor valor de $(\theta_{\max})_m$, foram registrados para a razão de H_1/L_1 e H_2/L_2 iguais a 0,4. Esse comportamento é concordante com resultados preliminares onde o *Constructal Design* foi empregado na otimização de diversas cavidades (C, T, H, Y, cavidades complexas e múltiplas cavidades simples) (Biserni et al., 2004; Biserni et al. 2007; Xie et al., 2010; Lorenzini et al., 2011, 2012, 2013; Hajmohammadi et al., 2013). Por exemplo, no problema de cavidade em T, o melhor desempenho térmico (menor θ_{\max}) ocorria quando a cavidade tinha maior penetração no domínio sólido. No caso estudado aqui, isso ocorre para as menores razões de $H_1/L_1 = H_2/L_2$.

Tabela 6.9. Resultados da otimização de dois graus de liberdade com o método de Busca Exaustiva e diferentes versões do SA (*BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*).

Método	$(\theta_{\max})_m$	$(S_1/H_0)_o$	$H_2/L_2=H_1/L_1$	Iterações	Tempo ~(s)
Exaustivo	0,1879	0,4266	0,8	315	1260
ConstExp2	0,1879	0,4245	0,8	104	439
ConstExp1	0,1879	0,4245	0,8	107	431
BoltzExp	0,1879	0,4204	0,8	190	796
Exaustivo	0,1985	0,4000	1,2	278	1112
BoltzExp	0,1985	0,4000	1,2	100	463
ConstExp2	0,1985	0,4000	1,2	173	745
ConstExp1	0,1985	0,4000	1,2	192	838
Exaustivo	0,2054	0,3572	1,6	246	984
ConstExp1	0,2054	0,3572	1,6	123	517
BoltzExp	0,2054	0,3572	1,6	129	638
ConstExp2	0,2054	0,3572	1,6	170	696
Exaustivo	0,2103	0,3265	2,0	220	880
ConstExp2	0,2103	0,3265	2,0	106	424
ConstExp1	0,2103	0,3245	2,0	125	500
BoltzExp	0,2103	0,3265	2,0	209	1000

A Figura 6.18 apresenta os efeitos do grau de liberdade S_1/H_0 sobre a máxima temperatura em excesso adimensional, para diferentes valores de H_1/L_1 e H_2/L_2 . Pode ser notado que em todos os casos há uma geometria ótima intermediária de S_1/H_0 que conduz a $(\theta_{\max})_m$. Essa geometria ótima é influenciada pela razão $H_1/L_1 = H_2/L_2$. Também é observado que os menores valores de H_2/L_2 conduzem às menores magnitudes de θ_{\max} ao longo de toda a faixa de S_1/H_0 estudada. Assim, é possível observar que os graus de liberdade H_1/L_1 e H_2/L_2 para cavidades em duplo T simétricas possuem uma influência considerável sobre o desempenho térmico do problema.

As geometrias ótimas obtidas na Fig. 6.17 são compiladas na Fig. 6.19. Mais precisamente é avaliado o efeito de H_2/L_2 sobre a máxima temperatura em excesso adimensional uma vez minimizada, $(\theta_{\max})_m$, e suas respectivas geometrias ótimas, ou seja, $(S_1/H_0)_o$. Os resultados indicam que há um acréscimo quase linear de $(\theta_{\max})_m$ com o aumento da razão H_2/L_2 . Também é observado que o aumento de H_2/L_2 conduz a uma diminuição da razão S_1/H_0 , ou seja, quanto mais esbeltas forem as cavidades laterais, o melhor desempenho ocorre quando as cavidades intermediárias se localizarem mais próximas da base inferior do domínio sólido. A Figura 6.20 expõe a geometria ótima para a otimização de dois graus de liberdade da cavidade em duplo-T dentro do espaço de busca investigado.

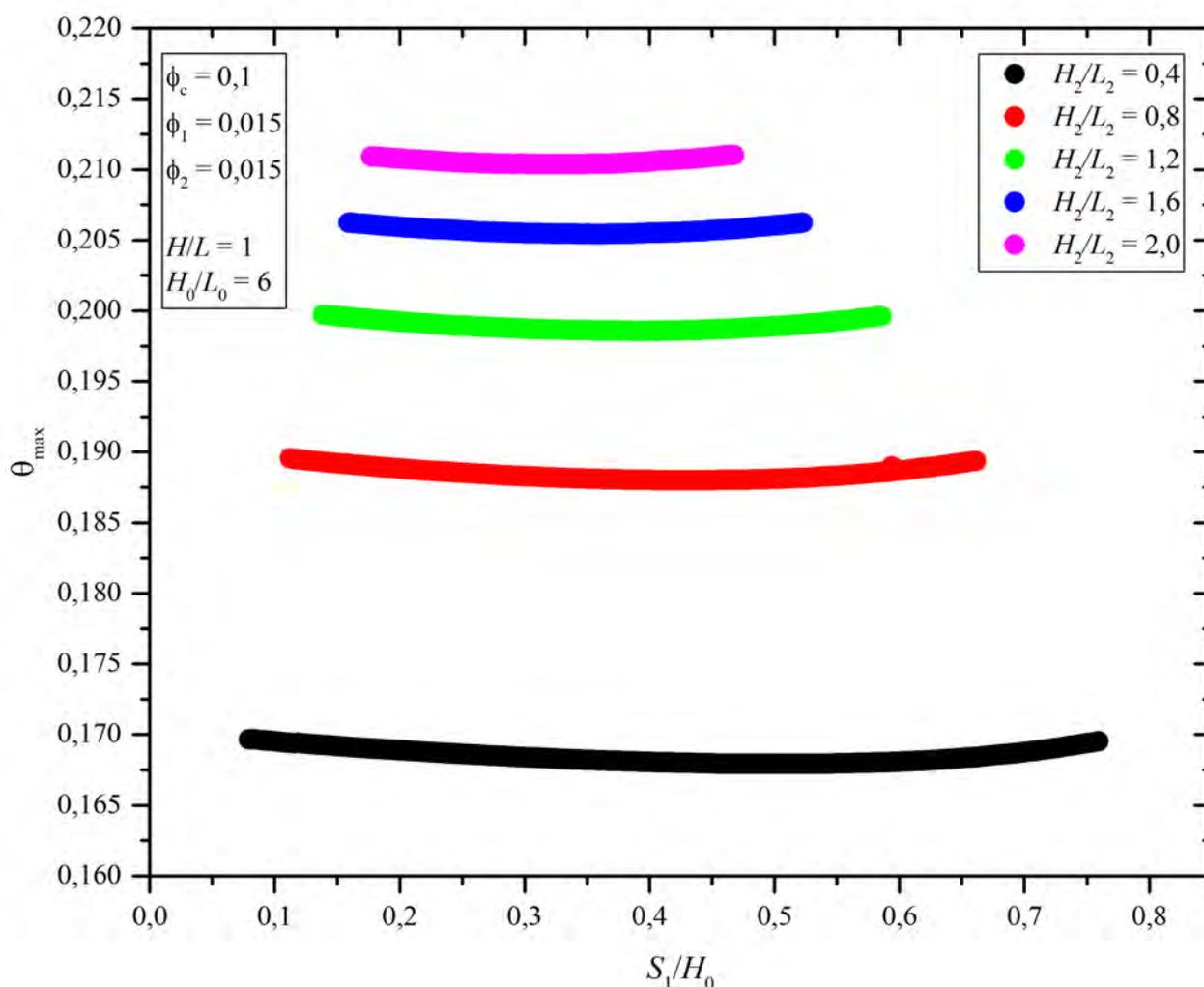


Figura 6.18. Comparação entre o efeito de $(S_1/H_0)_o$ sobre $(\theta_{\max})_m$ para diferentes valores de H_2/L_2 .

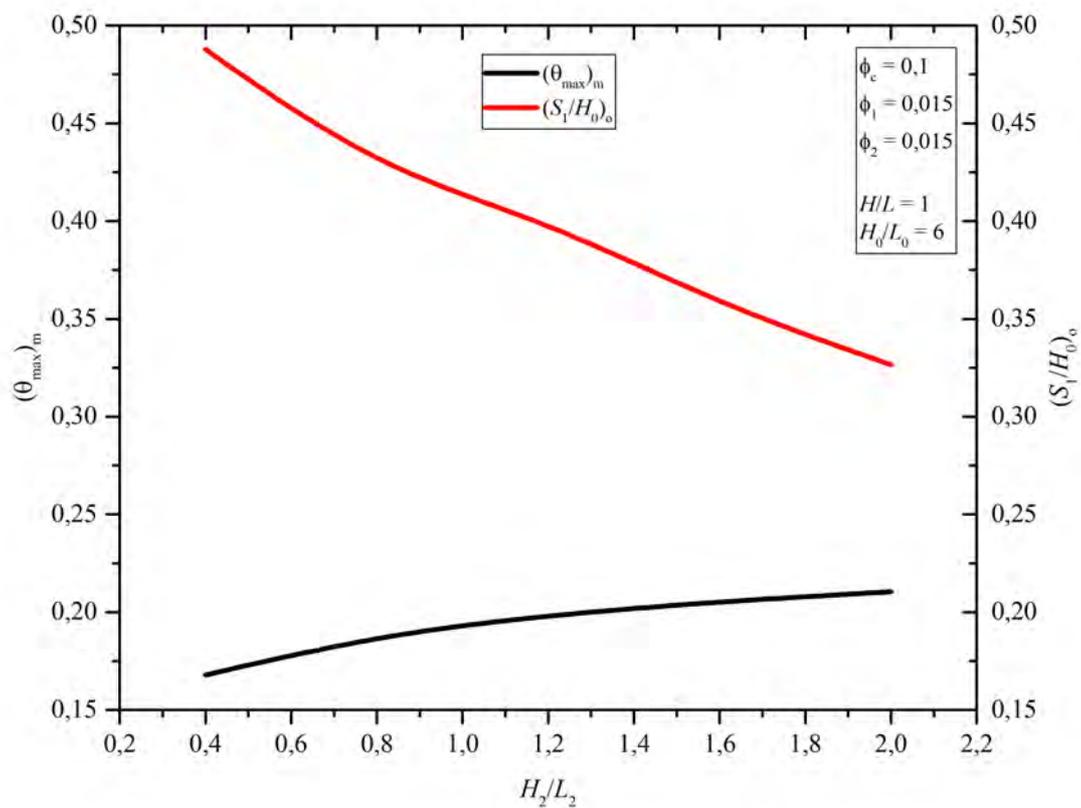
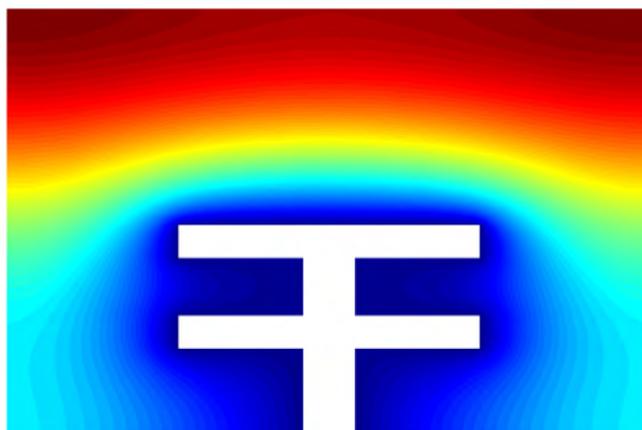


Figura 6.19. Efeito de H_2/L_2 sobre $(\theta_{\max})_m$ e $(S_1/H_0)_o$ para $H/L = 1,0$ e $H_0/L_0 = 6,0$.



$$\phi_c = 0,1; \phi_1 = 0,015; \phi_2 = 0,015$$

$$H/L = 1,0; H_0/L_0 = 6,0$$

$$(H_1/L_1)_o = 0,4; (H_2/L_2)_o = 0,4$$

$$(S_1/H_0)_{oo} = 0,4878$$

$$(\theta_{\max})_{mm} = 0,1679$$

Figura 6.20. Geometria ótima da cavidade em duplo-T para dois graus de liberdade.

6.2.2 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T

Como foi explicado na seção 5.2.3, para a otimização de três graus de liberdade da cavidade em duplo-T, não foi considerada a simetria entre os graus de liberdade H_1/L_1 e H_2/L_2 . Desta forma, variando, além do grau de liberdade S_1/H_0 , o grau de liberdade H_1/L_1 em função de diferentes valores de H_2/L_2 . O espaço de busca de H_1/L_1 e H_2/L_2 é compreendido entre as razões de 0,2 e 2,0, incluindo estes limites, com variação de 0,2. O espaço de busca de S_1/H_0 varia de acordo com a combinação dos valores de H_1/L_1 e H_2/L_2 . A razão H/L foi mantida constante em $H/L = 1,0$, assim como a razão $H_0/L_0 = 6,0$. As restrições foram também fixadas da seguinte maneira: $\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = 0,015$ e $\phi_2 = 0,015$.

Primeiramente, foi aplicado o método de Busca Exaustiva (BE) como forma de validação para os resultados do SA. A Tabela 6.10 apresenta os resultados da otimização com o método BE, mostrando o efeito de H_2/L_2 sobre a máxima temperatura em excesso adimensional duas vezes minimizada, $(\theta_{max})_{mm}$, e suas respectivas geometrias ótimas: $(H_1/L_1)_o$ e $(S_1/H_0)_{oo}$. De acordo com os resultados apresentados na Tab. 6.10, todas as geometrias ótimas foram encontradas com a razão de $(H_1/L_1)_o = 0,2$, ou seja, a menor razão distribui melhor a geometria da cavidade ao longo da área do domínio e conseqüentemente diminui a resistência térmica. Do ponto de vista geométrico, menores razões de H_1/L_1 e H_2/L_2 representam cavidades laterais mais finas e alongadas. E por esse mesmo motivo, as geometrias ótimas estão concentradas nas menores razões de H_1/L_1 e H_2/L_2 .

Tabela 6.10. Resultados da otimização de três graus de liberdade com o método de Busca Exaustiva

$(\theta_{max})_{mm}$	$(S_1/H_0)_{oo}$	$(H_1/L_1)_o$	H_2/L_2	Iterações
0,14736	0,57155	0,2	0,2	358
0,16061	0,75526	0,2	0,4	336
0,16745	0,71443	0,2	0,6	318
0,17189	0,69402	0,2	0,8	304
0,17555	0,67361	0,2	1,0	291
0,17957	0,63278	0,2	1,2	278
0,18240	0,61237	0,2	1,4	268
0,18488	0,59196	0,2	1,6	258
0,18722	0,57155	0,2	1,8	248
0,18938	0,55114	0,2	2,0	239
Total de Iterações:				2898

A Figura 6.21 apresenta as curvas do efeito de H_2/L_2 sobre a $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$ e graus de liberdade $(H_1/L_1)_o$ e $(S_1/H_0)_{oo}$. Nesta Figura pode ser visto que a razão $(H_1/L_1)_o$ é insensível à variação de H_2/L_2 . Enquanto isso, a razão $(S_1/H_0)_{oo}$ possui uma razão máxima na região intermediária de H_2/L_2 . Com relação à $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$ há um maior incremento de temperatura nas menores razões de H_2/L_2 .

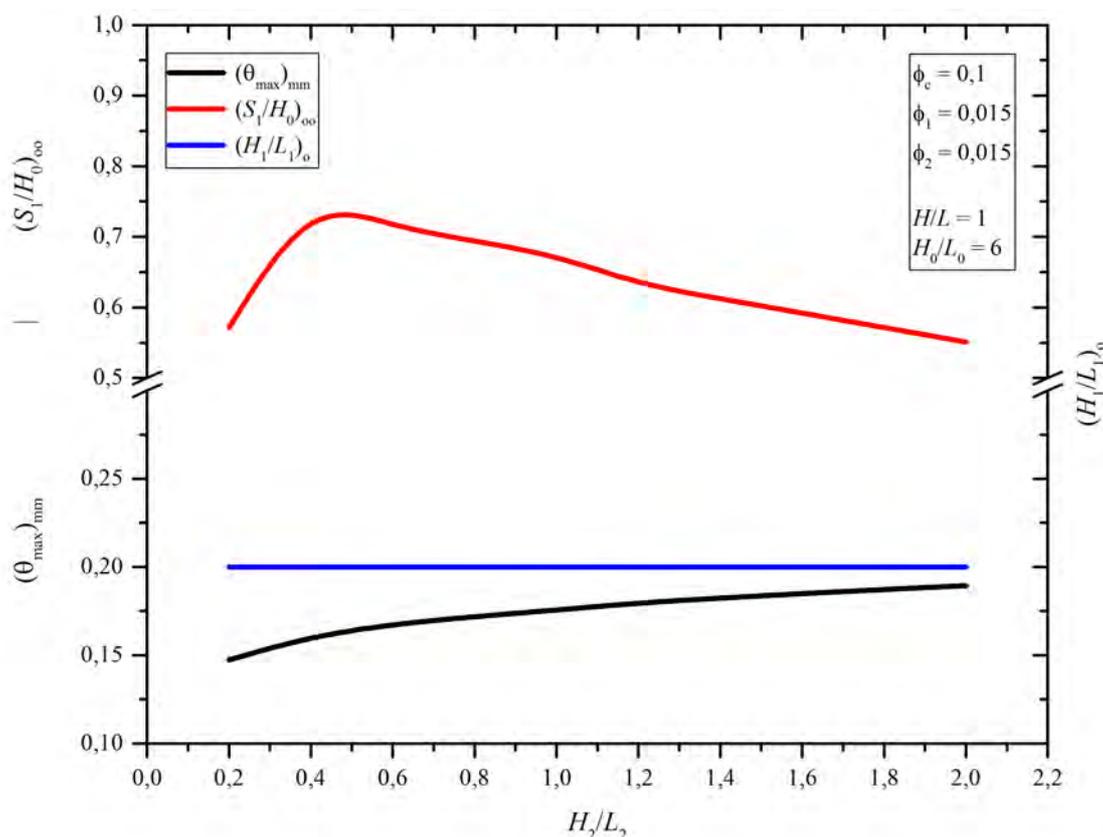


Figura 6.21. Efeito de H_2/L_2 sobre a $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$ e graus de liberdade $(H_1/L_1)_o$ e $(S_1/H_0)_{oo}$

A Figura 6.22 apresenta uma comparação entre as geometrias ótimas e a geometria três vezes otimizada, ou seja, aquela que retornou o menor valor de $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$ entre todas as geometrias ótimas para cada valor de H_2/L_2 . Em todas as geometrias é possível observar que a razão de $(H_1/L_1)_o = 0,2$ manteve-se constante para todos os valores de H_2/L_2 , inclusive para os valores de $H_2/L_2 = 1,0$ e $H_2/L_2 = 2,0$ como demonstrados nas Figs. 6.22(b) e 6.22(c). A geometria três vezes otimizada representada pela Fig. 6.22(a) conservou a simetria entre os braços do duplo-T. Vale destacar que a geometria ótima é aquela cujas cavidades laterais (horizontais) possuem maior penetração no domínio da cavidade. Neste caso específico, a menor penetração das cavidades laterais superiores, como pode ser visto nas Figs. 6.22(b) e 6.22(c), levam a picos de temperatura mais concentrados nos cantos superiores do domínio sólido, o que torna a distribuição do campo de temperaturas menos

homogênea para esses casos. Na cavidade da Fig. 6.22(a) a distribuição das maiores temperaturas é mais homogênea na linha superior do domínio sólido, i.e., o melhor desempenho ocorre de acordo com o princípio Constructal da “Ótima Distribuição das Imperfeições”.

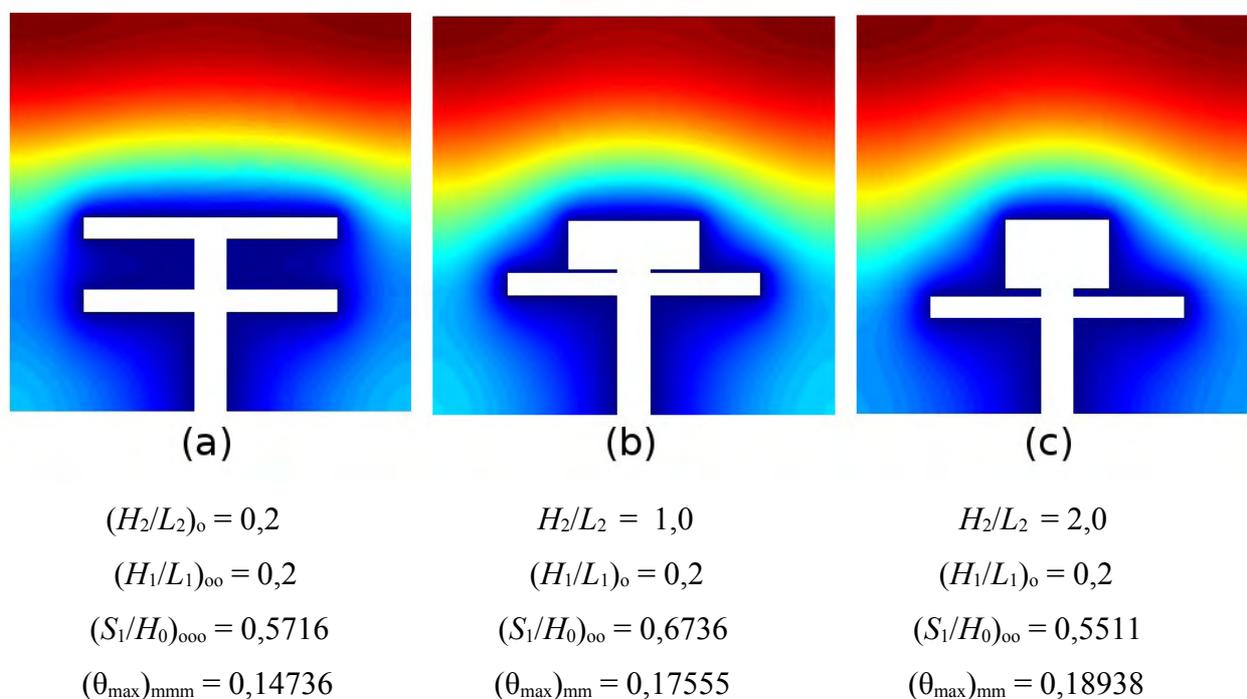


Figura 6.22. Comparação entre a geometria três vezes otimizada em relação às demais geometrias duas vezes otimizadas para as razões constantes ($\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = \phi_2 = 0,015$; $H/L = 1,0$; $H_0/L_0 = 6,0$)

Com os resultados do método de busca exaustiva foi possível analisar os resultados do SA com diferentes parâmetros de *cooling schedules* e *StallIterLimit*. O parâmetro de *Reannealing* foi mantido constante com o valor igual a 100 para todas as versões do SA. Foram investigados três valores para o parâmetro de *StallIterLimit* para cada parâmetro de *cooling schedule*, ou seja, foram observados os resultados de quinze diferentes versões do SA para a otimização de três graus de liberdade da cavidade em duplo-T.

A Tabela 6.11, resume os resultados de todas as versões do SA em comparação com o método BE, a principal comparação está no número de iterações (simulações requeridas) de cada método. A primeira coluna nomeia os diferentes métodos, o nome SA *Exp* (150), significa que o algoritmo SA foi configurado com o parâmetro de *cooling schedule Exponencial* e com o parâmetro de parada do algoritmo (*StallIterLimit*) configurado para cento e cinquenta iterações sem mudanças no valor ótimo encontrado.

Tabela 6.11. Comparação entre os resultados do método de Busca Exaustiva e diferentes versões do *Simulated Annealing* para $\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = \phi_2 = 0,015$; $H/L = 1,0$; $H_0/L_0 = 6,0$.

<i>Método</i>	<i>Iterações $H_2/L_2 = 0,2$</i>	<i>Total de Iterações</i>	<i>Erros</i>
Exaustivo	358	2898	-
SA Boltz (50)	178	1122	2
SA Boltz (100)	228	1368	3
SA Boltz (150)	278	1967	4
SA Exp (50)	104	1338	2
SA Exp (100)	154	826	4
SA Exp (150)	204	2025	3
SA BoltzExp (50)	156	886	4
SA BoltzExp (100)	206	1414	2
SA BoltzExp (150)	256	2167	3
SA ConstExp1(50)	142	965	5
SA ConstExp1(100)	192	1786	0
SA ConstExp1(150)	242	2497	0
SA ConstExp2(50)	130	858	5
SA ConstExp2(100)	180	1776	0
SA ConstExp2(150)	230	2246	0

A segunda coluna da Tabela 6.11, apresenta o número de iterações necessárias para a otimização com o valor de $H_2/L_2 = 0,2$, a coluna imediatamente ao lado expõe o total de iterações para a otimização dos graus de liberdade $(H_1/L_1)_o$ e $(S_1/H_0)_{oo}$ para todos os dez valores da razão H_2/L_2 ($0,2 \leq H_2/L_2 \leq 2,0$). Todas as versões do SA convergiram para a temperatura máxima mínima $(\theta_{\max})_{\min} = 0,1474$ na razão de $H_2/L_2 = 0,2$. Porém, para as demais razões de H_2/L_2 algumas versões do SA prenderam-se em mínimos locais, ou seja, não convergiram para a configuração geométrica ótima global relatada pelo método BE. Portanto, a coluna nomeada Erro aponta a quantidade de vezes em que foram registrados mínimos locais para os dez valores de H_2/L_2 .

De acordo com a Tabela 6.11, as versões do SA com os *cooling schedules* híbridos *ConstExp1* e *ConstExp2*, configurados com o *StallIterLimit* = 100, foram os algoritmos com o melhor desempenho, pois convergiram para as geometrias ótimas globais em todos os valores de H_2/L_2 investigados, representando adequadamente o efeito de H_2/L_2 sobre $(\theta_{\max})_{\min}$ e suas respectivas geometrias ótimas. A Figura 6.23, apresenta um gráfico comparando a curva do método BE para a $(\theta_{\max})_{\min}$ em função de H_2/L_2 com os pontos de convergência para cada versão do SA com *StallIterLimit* = 100. A Fig. 6.23 ilustra que apenas as versões SA *ConstExp1* e SA *ConstExp2*

encontraram a temperatura máxima em excesso adimensional três vezes minimizada para todas as razões de H_2/L_2 .

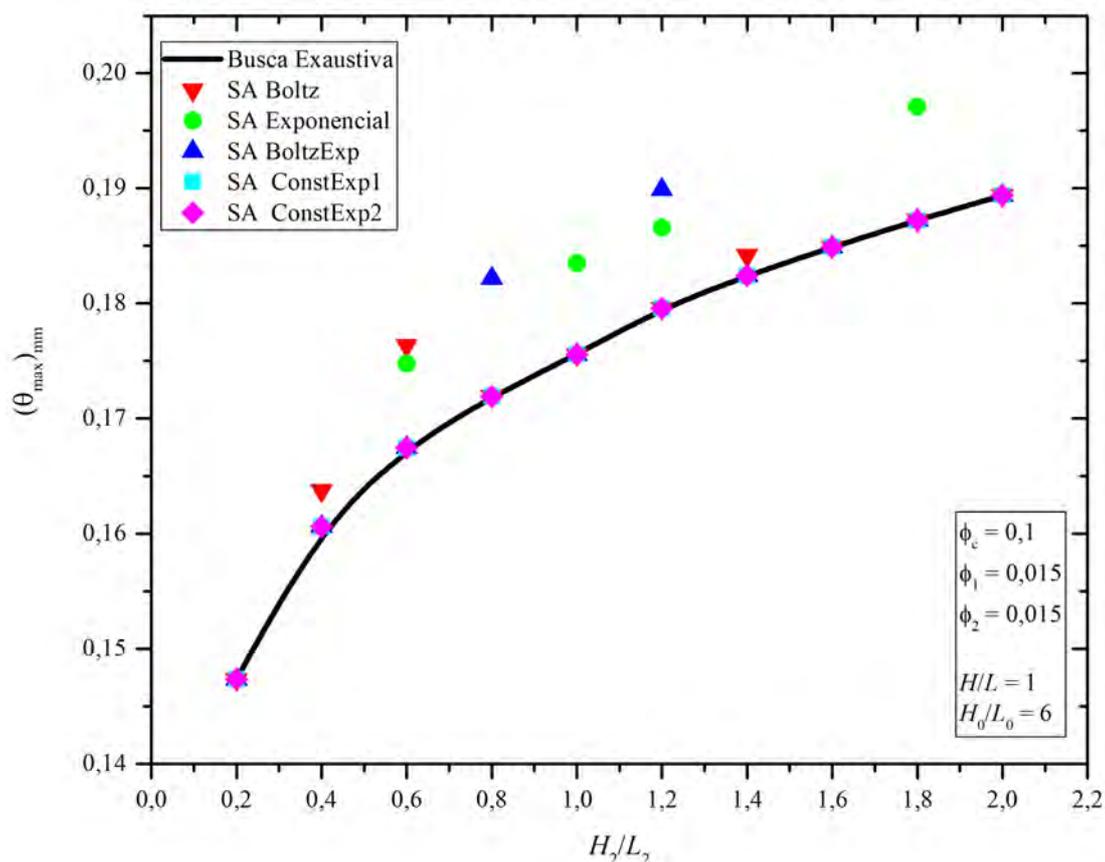


Figura 6.23. Comparação entre os resultados do método de Busca Exaustiva e diferentes versões do *Simulated Annealing*

Até o momento foram apresentados os resultados da otimização de três graus de liberdade da cavidade em duplo-T com o espaço de busca discreto criado com valores arbitrários para as razões H_1/L_1 e H_2/L_2 , em um intervalo entre 0,2 e 2,0. Porém, também foi realizada a otimização para o espaço de busca gerado de forma dinâmica, calculado de acordo com os limites da geometria e considerando a hierarquia e dependência entre todos os cinco graus de liberdade. Na seção 5.2.3 é explicada com maiores detalhes a geração do espaço de busca dinâmico.

O espaço de busca gerado dinamicamente possuiu até 1000 combinações, com dez valores diferentes para cada grau de liberdade (H_2/L_2 , H_1/L_1 e S_1/H_0). O processo de otimização contou apenas com cinco diferentes versões do SA, configuradas com os *cooling schedules* híbridos e os padrões do ambiente MATLAB (*Boltz* e *Exponencial*). É importante mencionar que neste processo

de otimização o SA buscou os três graus de liberdade simultaneamente, ou seja, diferente do processo anterior em que o algoritmo estocástico buscou apenas os valores de H_1/L_1 e S_1/H_0 sequencialmente para diferentes razões de H_2/L_2 .

A Tabela 6.12 apresenta os resultados encontrados por diferentes versões do SA para a otimização de três graus de liberdade da cavidade em duplo-T com a discretização dinâmica do espaço de busca. As versões do SA diferem apenas no parâmetro *cooling schedule*, os parâmetros *StallIterlimit* e *Reannealing* foram configurados para 100 e 50, respectivamente.

Tabela 6.12. Resultados da otimização de três graus de liberdade com diferentes versões do SA.

<i>Schedule</i>	$(H_2/L_2)_o$	$(H_1/L_1)_{oo}$	$(S_1/H_0)_{ooo}$	$(\theta_{max})_{mmm}$	Nº Iterações
<i>ConstExp1</i>	0,0727	2,0768	0,7320	0,13011472	101
<i>Boltz</i>	0,0727	0,8744	0,7953	0,13011486	101
<i>Exponencial</i>	0,0727	0,8744	0,7953	0,13011486	102
<i>ConstExp2</i>	0,0727	0,8744	0,7953	0,13011486	101
<i>BoltzExp</i>	0,0727	1,6760	0,2290	0,13011497	140

A Figura 6.24 apresenta a geometria ótima encontrada com o espaço de busca dinâmico para as Figs. 6.24(a) e 6.24(b) em comparação com a geometria ótima do espaço de busca definido arbitrariamente, representada pela Fig. 6.24(c). Também é feita uma comparação com uma geometria não otimizada porém simétrica, Fig. 6.24(a). A Fig. 6.24 (a) não é a geometria otimizada três vezes, porém se aproxima muito do valor de temperatura registrado pela geometria três vezes otimizada, Fig. 6.24(b). Também é possível notar a grande influência que o grau de liberdade H_2/L_2 exerce sobre a minimização da resistência térmica do domínio para as condições de $H/L = 1$.

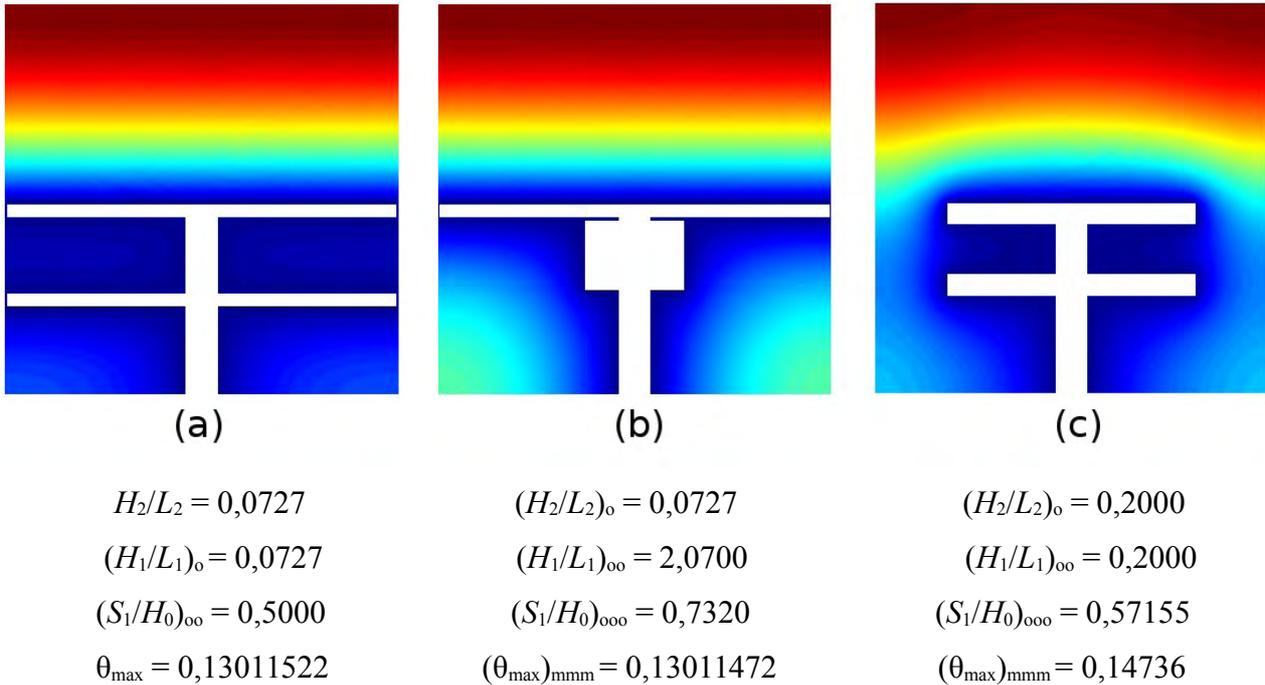


Figura 6.24. Comparação entre as geometrias simétricas e a geometria três vezes otimizada obtida com espaço de busca dinâmico para $\phi_c = 0,1$; $\phi_1 = \phi_2 = 0,015$; $H/L = 1,0$; $H_0/L_0 = 6,0$:

a) geometria simétrica não otimizada, **b)** geometria otimizada com espaço de busca dinâmico, **c)** geometria otimizada com espaço de busca discreto.

6.2.3 RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO DE QUATRO GRAUS DE LIBERDADE PARA A CAVIDADE EM DUPLO-T

A Tabela 6.13 apresenta os resultados da otimização dos quatro graus de liberdade para a cavidade em duplo-T. São apresentados os valores de $(\theta_{\max})_{mmm}$ e da geometria três vezes otimizada para cada valor de H_0/L_0 . A geometria quatro vezes otimizada é obtida para uma razão intermediária de $(H_0/L_0)_o = 16,483$, onde foi obtido um valor de $(\theta_{\max})_{mmm} = 0,0281$. Os dados foram extraídos dos resultados da otimização com o algoritmo SA configurado com o *cooling schedule BoltzExp*, pois este apresentou o maior número de iterações, ou seja, foi a versão do SA que explorou mais opções do espaço de busca. A escolha desta versão se deu apenas para reproduzir o efeito do grau de liberdade H_0/L_0 sobre a máxima temperatura em excesso três vezes otimizada $(\theta_{\max})_{mmm}$. É importante citar que todas as versões do SA (*ConstExp1*, *ConstExp2*, *Exponencial* e *Boltz*) encontraram a mesma geometria. Quanto ao número de simulações, a melhor versão foi o algoritmo configurado com o *cooling schedule Exponencial* com o total de 369 iterações, seguido por

ConstExp2 (479 iterações), *ConstExp1*(489 iterações), *Boltz* (565 iterações) e *BoltzExp* (687 iterações)

Tabela 6.13. Resultados da otimização de três graus de liberdade para cada valor de H_0/L_0 .

H_0/L_0	$(H_2/L_2)_o$	$(H_1/L_1)_{oo}$	$(S_1/H_0)_{ooo}$	$(\theta_{max})_{mmm}$
0.4444	0.1260	0.1847	0.2486	0.3756
3.1176	0.0781	0.8654	0.4083	0.2092
5.7907	0.0730	0.8448	0.7186	0.1346
8.4638	0.0707	0.0707	0.3194	0.0874
11.1370	0.0694	0.0694	0.5184	0.0553
13.8100	0.0685	0.0685	0.3226	0.0330
16.4830	0.0678	0.0678	0.3235	0.0281
19.1560	0.0673	0.0673	0.3242	0.0322
21.8290	0.0669	0.0669	0.3248	0.0359
24.5020	0.0665	0.0665	0.3253	0.0395

A Figura 6.25 apresenta o efeito do grau de liberdade H_0/L_0 sobre a resistência térmica mínima do sólido $(\theta_{max})_{mmm}$ e suas respectivas geometrias ótimas: $(H_2/L_2)_o$, $(H_1/L_1)_{oo}$ e $(S_1/H_0)_{ooo}$. Os gráficos da Fig. 6.25 foram gerados a partir dos dados da Tabela 6.13. É possível observar que a temperatura $(\theta_{max})_{mmm}$ decai de acordo com o aumento da razão de H_0/L_0 , até o valor ótimo de $(H_0/L_0)_o = 16,483$, onde inicia-se a tendência de aumento da resistência térmica entre o sólido e a cavidade em duplo-T. Outra característica interessante está relacionada ao padrão de simetria das razões dos braços do duplo-T, $(H_2/L_2)_o$ e $(H_1/L_1)_{oo}$, o qual emerge para razões de $H_0/L_0 \geq 14,0$. Vale observar que para pequenas razões de H_0/L_0 , i.e., quando o ramo principal possui menor penetração no domínio sólido, há uma grande variação dos graus de liberdade $(S_1/H_0)_{ooo}$ e $(H_1/L_1)_{oo}$ e uma pequena variação da razão $(H_2/L_2)_o$. Uma vez que o ramo bifurcado inferior está limitado ao ramo bifurcado superior e à região inferior do sólido, o grau de liberdade $(H_2/L_2)_o$ já possui naturalmente uma menor liberdade para variar. Conforme o grau de liberdade cresce de $H_0/L_0 = 0,4$ até uma razão de aproximadamente $H_0/L_0 = 5,0$, há um crescimento sensível das razões $(S_1/H_0)_{ooo}$ e de $(H_1/L_1)_{oo}$. O primeiro acompanha o crescimento do ramo principal do duplo-T enquanto a razão $(H_1/L_1)_{oo}$ cresce com o intuito de aumentar a penetração da cavidade na direção da região superior do domínio sólido, que para pequenas razões de H_0/L_0 possui as maiores temperaturas na região superior do sólido. Na faixa de $H_0/L_0 = 5,0$ até $15,0$, o ramo principal já é esbelto o suficiente para diminuir o campo de temperaturas na região superior do sólido, permitindo que as cavidades laterais superiores tornem-se mais esbeltas para diminuir o campo de temperaturas nos cantos superiores do sólido.

Para as maiores razões de H_0/L_0 ($H_0/L_0 > 16$) há um enrijecimento dos padrões geométricos. Contudo, a geometria não apresenta mais uma configuração ótima devido ao afastamento dos ramos bifurcados inferior e superior e, conseqüentemente, o crescimento da temperatura máxima entre estes ramos.

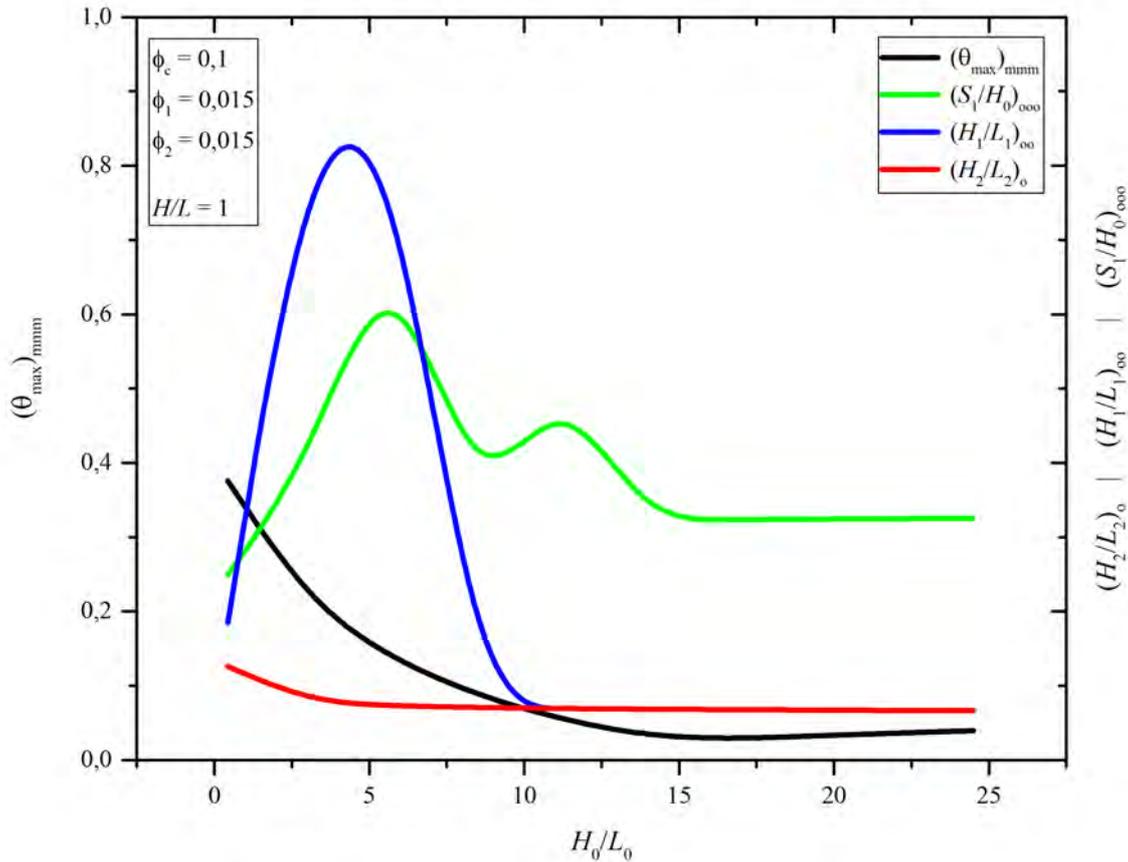


Figura 6.25. Efeito de H_0/L_0 sobre $(\theta_{\max})_{\text{mmm}}$ e graus de liberdade $(H_2/L_2)_o$, $(H_1/L_1)_{oo}$ e $(S_1/H_0)_{ooo}$

A Figura 6.26 apresenta uma comparação entre a geometria quatro vezes otimizada, $(H_0/L_0)_o = 16,4830$ dada pela Fig. 6.26(a) e outras duas geometrias três vezes otimizadas para os valores de $H_0/L_0 = 0,44$ e $H_0/L_0 = 24,5$, Figs. 6.26(b) e (c), respectivamente. Pode ser observado que para as menores razões de H_0/L_0 , Fig. 6.26(a), a cavidade fica muito restrita à região inferior do domínio sólido e tem-se uma grande concentração de calor na região superior do sólido. Conforme a razão H_0/L_0 cresce até o ponto de geometria ótima, neste caso até $(H_0/L_0)_o = 16,4830$, há uma redistribuição dos pontos de máxima temperatura. Na Figura 6.26(b) são observadas cinco regiões de máxima temperatura (entre os ramos bifurcados da cavidade em duplo-T, entre os ramos

inferiores e a superfície inferior do sólido e na linha superior do sólido). Para valores de H_0/L_0 maiores do que o obtido com a geometria ótima, a cavidade se estende para a região superior do sólido que passa a ter uma temperatura mais baixa, sendo observadas quatro regiões de elevada temperatura. A Figura 6.26 ilustra de forma satisfatória que o desempenho térmico neste problema está relacionado à melhor distribuição do campo de temperaturas, i.e., quanto mais regiões de máxima temperatura forem obtidas no domínio sólido menor a máxima temperatura em excesso adimensional.

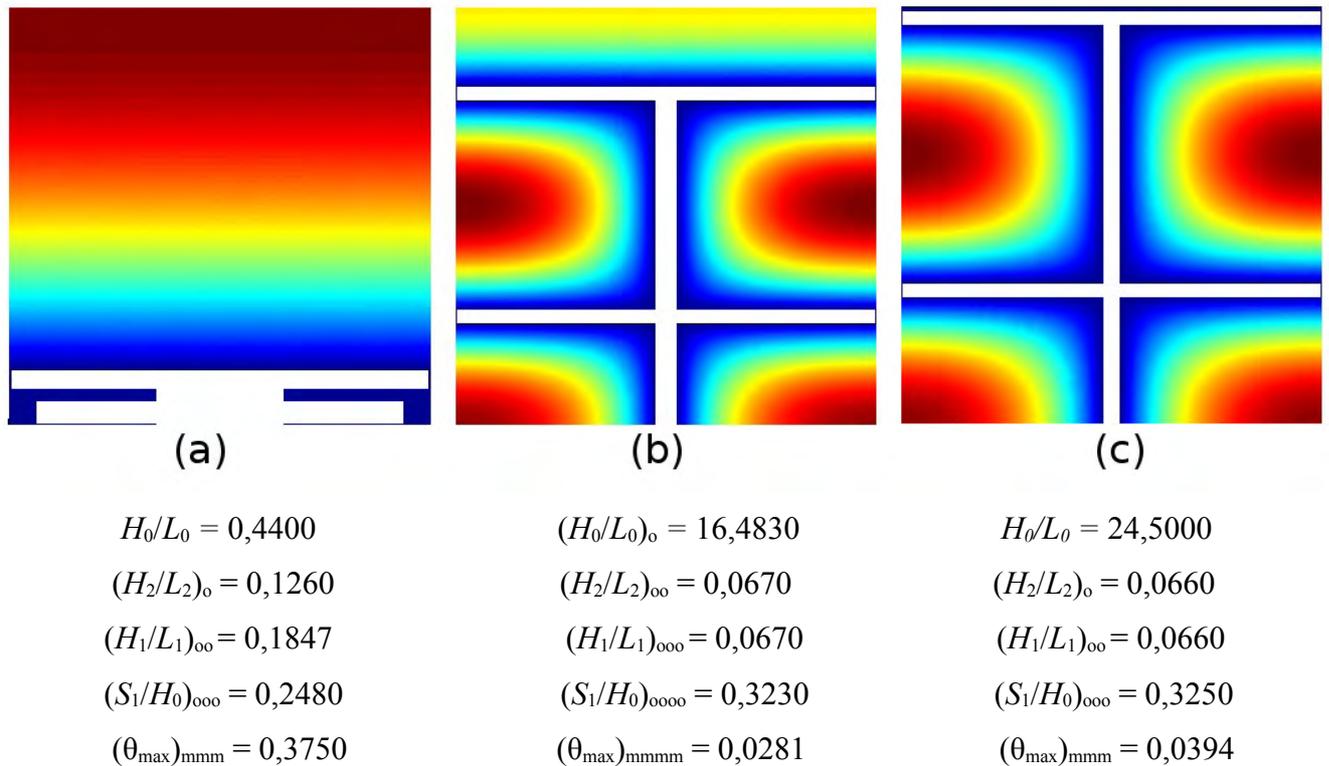


Figura 6.26. Campo de temperaturas para as geometrias ótimas obtidas na Fig. 6.25 para os parâmetros

$$\phi_c = 0,1; \phi_1 = \phi_2 = 0,015 \text{ e } H/L = 1,0.$$

A Tabela 6.14 apresenta os resultados da otimização dos quatro graus de liberdade da cavidade em duplo-T para as diferentes versões do SA estudadas. Todas as versões encontraram a mesma geometria ótima. O desempenho apenas se diferenciou no número de iterações necessárias. Foi executada apenas uma rodada do SA com cada *cooling Schedule*, e neste processo os parâmetros híbridos não obtiveram um desempenho muito melhor do que os padrões *Exponencial* e *Boltz*. O modelo *Exponencial* de resfriamento da temperatura do SA, foi o que obteve o menor número de iterações, seguido, respectivamente, pelos híbridos *ConstExp1* e *ConstExp2*.

Tabela 6.14. Resultados da otimização de quatro graus de liberdade para cada versão do SA.

<i>C. Schedule</i>	<i>Iterações</i>	$(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$	$(H_0/L_0)_o$	$(H_2/L_2)_{oo}$	$(H_1/L_1)_{ooo}$	$(S_1/H_0)_{oooo}$
<i>Exponencial</i>	369	0,028147647	16,4831	0,0678	0,0678	0,3235
<i>ConstExp2</i>	479	0,028147647	16,4831	0,0678	0,0678	0,3235
<i>ConstExp1</i>	489	0,028147647	16,4831	0,0678	0,0678	0,3235
<i>Boltz</i>	565	0,028147647	16,4831	0,0678	0,0678	0,3235
<i>BoltzExp</i>	687	0,028147647	16,4831	0,0678	0,0678	0,3235

6.2.4 RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM DUPLO-T

Para a otimização completa da cavidade em duplo-T, foram empregadas cinco versões do algoritmo SA, cada versão foi configurada com um diferente parâmetro de *cooling schedule*. Foram utilizados os *cooling schedules* padrões do ambiente MATLAB (*Boltz* e *Exponencial*), com exceção do *Fast*, e mais os três modelos híbridos propostos nesta pesquisa (*BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*). Apenas as versões configuradas com os modelos de resfriamento *BoltzExp*, *ConstExp1* e *Exponencial* relataram o menor valor de $(\theta_{\max})_{\text{mmmmm}}$. A Tabela 6.15 apresenta os resultados de cada versão do algoritmo SA.

Tabela 6.15. Resultados da otimização completa da cavidade em duplo-T relatados por diferentes versões do algoritmo SA.

<i>SA</i>	$(\theta_{\max})_{\text{mmmmm}}$	$(S_1/H_0)_{\text{oooo}}$	$(H_2/L_2)_{\text{oooo}}$	$(H_1/L_1)_{\text{ooo}}$	$(H_0/L_0)_{\text{oo}}$	$(H/L)_o$	<i>Nº. Iterações</i>
<i>BoltzExp</i>	0.003407	0.2495	494.53	494.53	747.26	30	1245
<i>ConstExp1</i>	0.003407	0.2495	494.53	494.53	747.26	30	1420
<i>Exponencial</i>	0.003407	0.2495	494.53	494.53	747.26	30	1423
<i>Boltz</i>	0.003574	0,2578	468,62	494.53	747,26	30	1630
<i>ConstExp2</i>	0.003844	0,3376	416,79	131,76	747,26	30	1498

A Tabela 6.16 apresenta os resultados da otimização de quatro graus de liberdade para cada valor do espaço de busca da razão H/L . Estes resultados foram obtidos para a restrição de área da cavidade $\phi_c = 0,1$. Para a geração da Tabela 6.16 foram utilizados todos os pontos em que o algoritmo SA com o *cooling schedule Exponencial* visitou. Estes resultados foram escolhidos em razão desta versão do SA ter visitado mais pontos (maior número de iterações) e encontrado a geometria ótima global.

Tabela 6.16. Resultados da otimização de quatro graus de liberdade para cada valor de H/L .

H/L	$(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$	$(H_0/L_0)_o$	$(H_2/L_2)_{oo}$	$(H_1/L_1)_{ooo}$	$(S_1/H_0)_{oooo}$
0,5	0,07087800	2,7331	0,03644	1,6083	0,5071
1	0,07657100	24,5020	10,7510	0,0665	0,5683
2	0,04960900	41,6520	0,1352	19,8670	0,2403
5	0,02170100	123,8800	34,3500	72,6100	0,2778
7	0,01507900	173,6800	108,0600	78,1770	0,2434
10	0,01052900	248,4200	146,3800	146,3800	0,2532
15	0,00702660	373,0700	246,1400	220,3400	0,2494
20	0,00548200	497,7700	328,8800	259,9400	0,2426
25	0,00408100	622,5000	411,6800	411,6800	0,2495
30	0,00340770	747,2600	494,5400	494,5400	0,2495

É possível observar, através dos resultados da Tabela 6.16 e das Figuras 6.27 e 6.28, que há uma forte influência da razão H/L sobre a máxima temperatura em excesso adimensional minimizada quatro vezes, $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$, assim como as respectivas geometrias ótimas. Quanto maior a razão, melhor é a distribuição da temperatura devido à facilidade da geometria da cavidade estender-se sobre a área do domínio. É possível notar que na faixa $0,5 \leq H/L \leq 1,0$ há uma ligeira redução do desempenho térmico do sistema. Posteriormente, na região entre $1,0 \leq H/L \leq 5,0$ há uma grande redução de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$, bem como as razões geométricas da cavidade sofrem grandes variações. Essas variações estão relacionadas à própria restrição imposta pelo domínio sólido que está aumentando sua altura (H) e diminuindo seu comprimento (L). Para elevadas razões de H/L percebe-se que a geometria tende a ficar enrijecida. Além disso, a razão H/L passa a não ter sensibilidade sobre $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$.

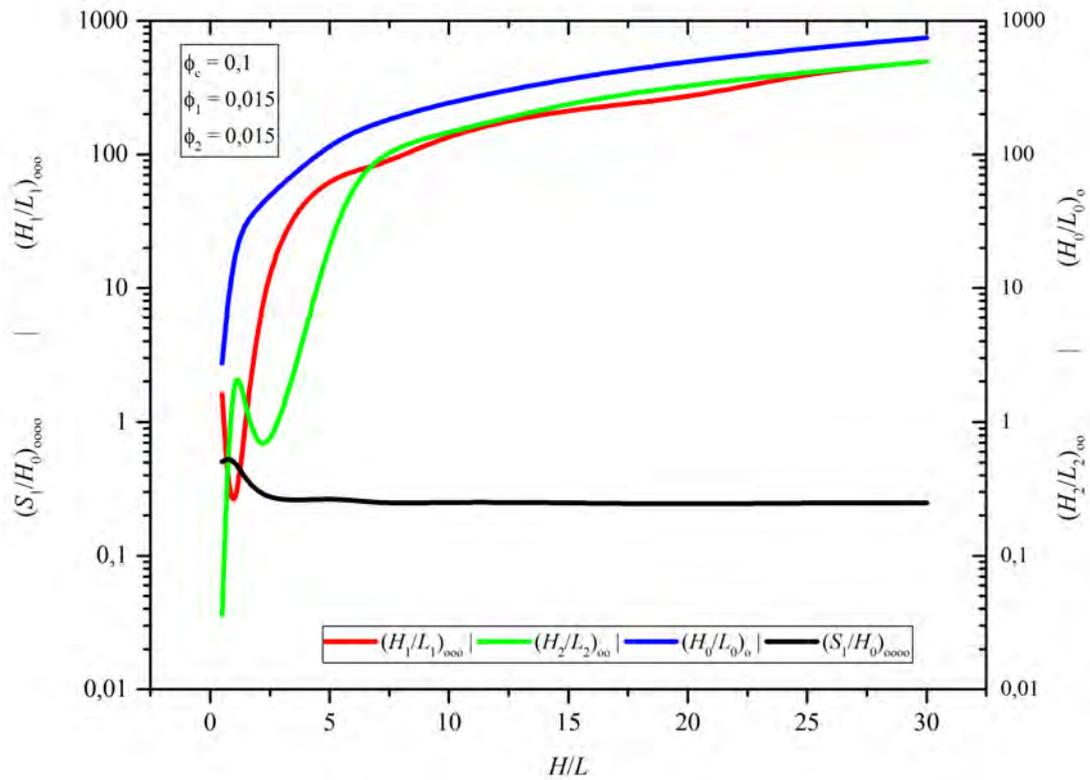


Figura 6.27. Efeito de H/L sobre os graus de liberdade $(H_0/L_0)_0$, $(H_2/L_2)_{00}$, $(H_1/L_1)_{000}$ e $(S_1/H_0)_{0000}$ para a cavidade em duplo-T.

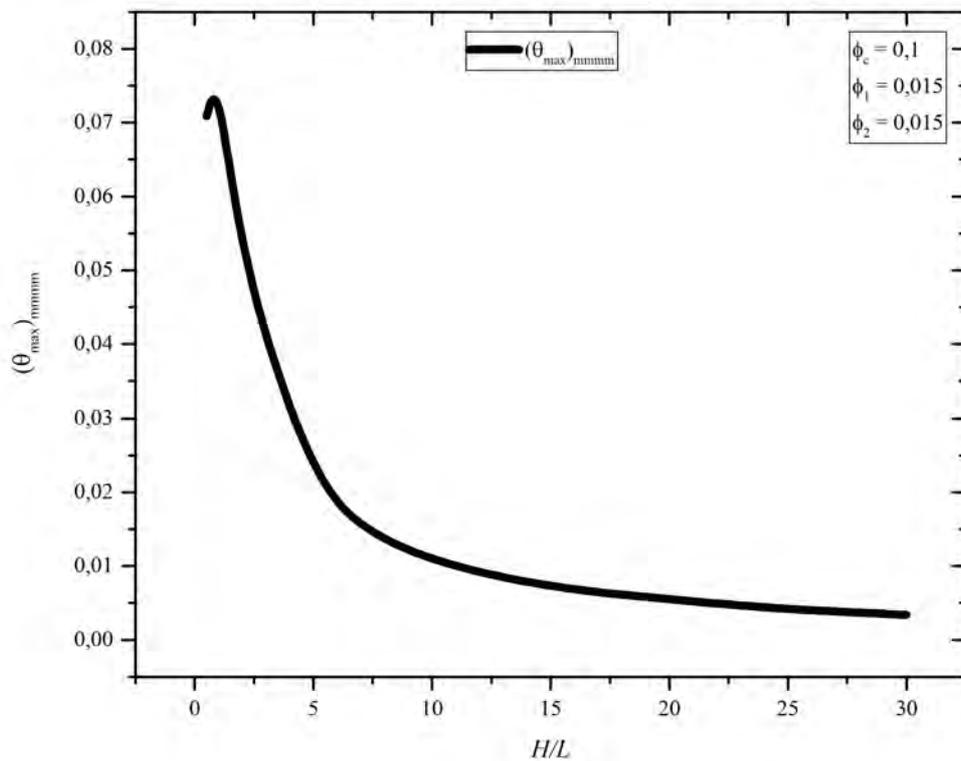


Figura 6.28. Efeito de H/L sobre $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ para a cavidade em duplo-T.

A Figura 6.29 demonstra a comparação entre as geometrias ótimas para diferentes valores de H/L . A Fig. 6.29(a), a Fig. 6.29(b) e a Fig. 6.29(c) representam, respectivamente, as geometrias ótimas para as razões de $H/L = 0,5$, $7,0$ e $30,0$. Como pode ser observado, pelos dados da Tabela 6.16, a temperatura $(\theta_{\max})_{\text{mímmmm}}$ da geometria representada pela Fig. 6.29(a) é até vinte vezes maior que a temperatura da geometria otimizada da Fig. 6.29(c). A Fig. 6.29(b) apresenta a geometria com a temperatura $(\theta_{\max})_{\text{mímmmm}}$ até quatro vezes maior que a geometria ótima da razão de $H/L = 30$. Para a menor razão de $H/L = 0,5$, percebe-se a formação do duplo-T com os ramos bifurcados inferiores menos esbeltos do que os ramos bifurcados superiores. Para as razões elevadas de H/L nota-se que a geometria ótima tende a uma cavidade em forma de “C” abordada na literatura em Rocha et al. (2007).

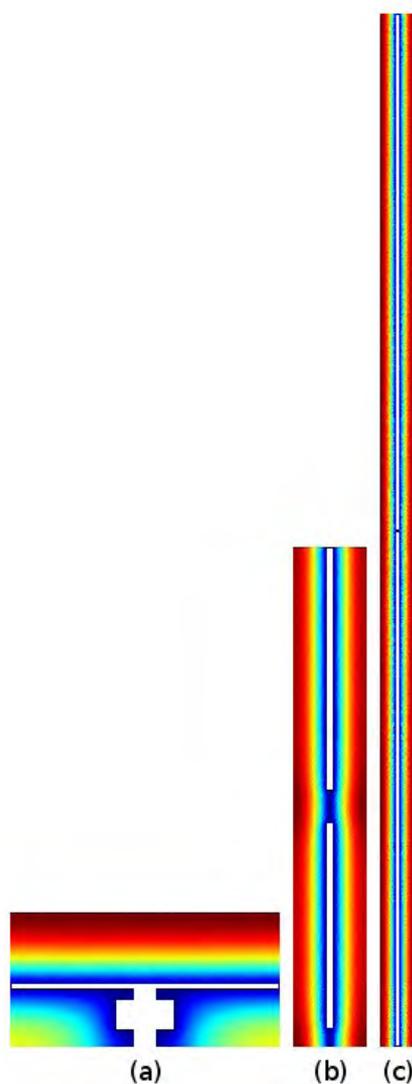


Figura 6.29. Comparação entre geometrias ótimas para diferentes valores de H/L .

A Tabela 6.17 apresenta os resultados da otimização completa da cavidade em duplo-T para diferentes valores de ϕ_c , otimizados com diferentes versões do algoritmo SA. Além do estudo da geometria ótima, os resultados apresentam o desempenho das diferentes versões do SA. Os parâmetros de *StallIterLimit* e *Reannealing* também foram ajustados, empiricamente ao longo do processo de otimização.

Tabela 6.17. Resultado da otimização completa da cavidade em duplo-T para diferentes ϕ_c e empregando diferentes versões do SA

ϕ_c	GRAUS DE LIBERDADE					$(\theta_{max})_{mmmmm}$	CONFIGURAÇÃO DO SIMULATED ANNEALING			
	$(H/L)_o$	$(H_0/L_0)_{oo}$	$(H_2/L_2)_{ooo}$	$(H_1/L_1)_{oooo}$	$(S_1/H_0)_{ooooo}$		Cooling Schedule	Iterações	StallIterLimit	Reannealing
0,01	30	5978,1	3297,0	4615,7	0,3656	0,004131	ContExp1	802	500	500
-	30	5978,1	3297,0	2637,6	0,4608	0,004132	ConstExp2	720	500	500
-	30	5978,1	3297,0	3956,4	0,3013	0,004134	BoltzExp	720	500	500
-	30	5978,1	659,5	1318,9	0,3166	0,004138	Boltz	884	500	500
-	30	5978,1	0,170	1978,3	0,5372	0,004139	Exponencial	594	500	500
-										
0,05	30	2989,1	741,8	741,8	0,2496	0,003800	ContExp1	638	500	500
-	30	2989,1	741,8	741,8	0,2496	0,003800	Exponencial	662	-	-
-	30	2989,1	741,8	741,8	0,2496	0,003800	ConstExp2	745	-	-
-	30	2989,1	741,8	741,8	0,2507	0,003800	Boltz	835	-	-
-	30	2989,1	741,8	741,8	0,2507	0,003800	BoltzExp	977	-	-
-										
0,10	30	747,3	494,5	494,5	0,2495	0,003408	BoltzExp	1245	1000	100
-	30	747,3	494,5	494,5	0,2495	0,003408	ConstExp1	1420	-	-
-	30	747,3	494,5	494,5	0,2495	0,003408	Exponencial	1423	-	-
-	30	747,3	468,6	494,5	0,2579	0,003574	Boltz	1630	-	-
-	30	747,3	416,8	131,8	0,3377	0,003844	ConstExp2	1498	-	-
-										
0,15	30	332,1	494,5	494,5	0,2502	0,003041	Exponencial	1643	1500	100
-	30	332,1	494,5	494,5	0,2502	0,003041	ConstExp2	1708	-	-
-	30	332,1	494,5	494,5	0,2496	0,003041	BoltzExp	1909	-	-
-	30	332,1	494,5	494,5	0,2496	0,003041	ConstExp1	2345	-	-
-	30	332,1	494,5	494,5	0,2502	0,003041	Boltz	2636	-	-
-										
0,20	30	373,6	247,3	247,3	0,2504	0,002696	ConstExp2	765	500	500
-	30	373,6	247,3	247,3	0,2504	0,002696	ConstExp1	805	-	-
-	30	373,6	247,3	247,3	0,2504	0,002696	BoltzExp	912	-	-
-	30	373,6	139,5	4,810	0,5276	0,003527	Boltz	880	-	-
-	30	373,6	112,6	4,810	0,2982	0,003536	Exponencial	591	-	-
-										

As Figuras 6.31 e 6.30 demonstram a influência de ϕ_c sobre $(\theta_{max})_{mmmmm}$ e sobre $(S_1/H_0)_{ooooo}$ registrada pelas diferentes versões do SA. Os resultados para a $(\theta_{max})_{mmmmm}$ apresentaram a tendência de queda proporcional ao aumento de ϕ_c para a maioria das versões do SA. Já para o grau de liberdade $(S_1/H_0)_{ooooo}$, os resultados das versões do SA apresentaram grandes divergências em relação à curva das melhores geometrias. Com o aumento da razão de área da cavidade sobre a área total (ϕ_c), a temperatura máxima adimensional cinco vezes minimizada $(\theta_{max})_{mmmmm}$ é reduzida em média de 9,75% para cada valor de ϕ_c investigado.

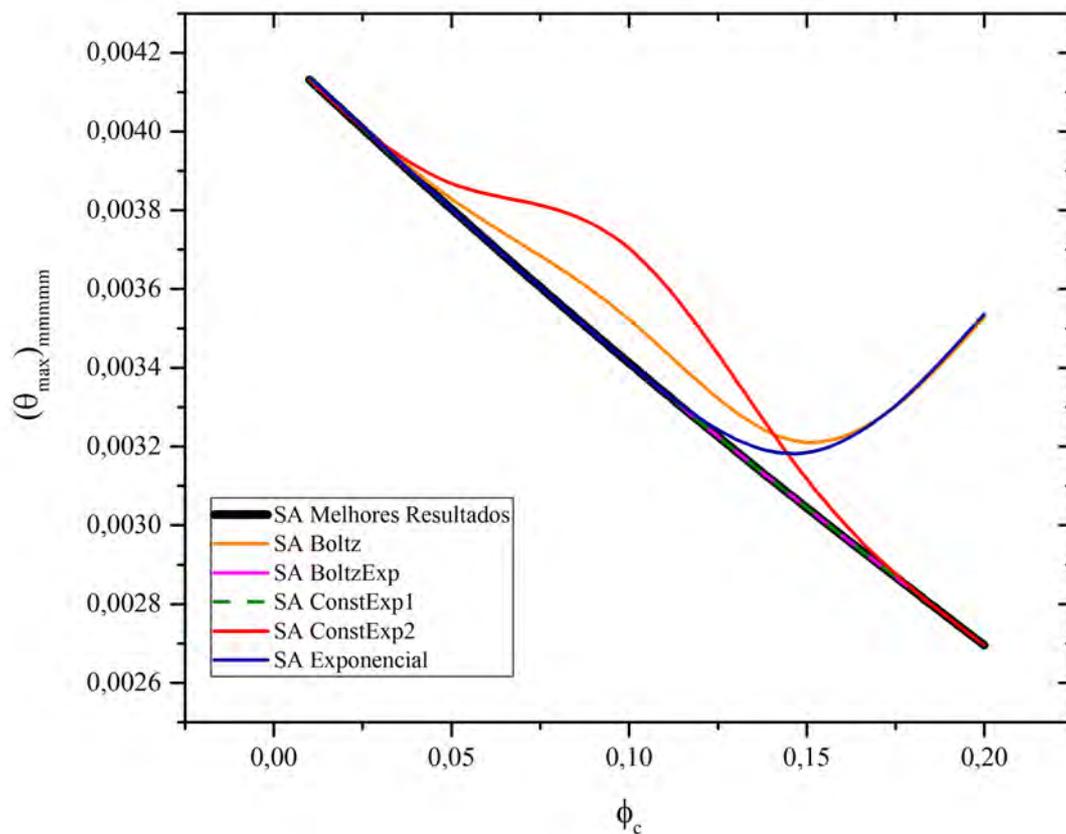


Figura 6.30. Comparação do efeito de ϕ_c sobre $(\theta_{max})_{mmmm}$ para diferentes versões do SA

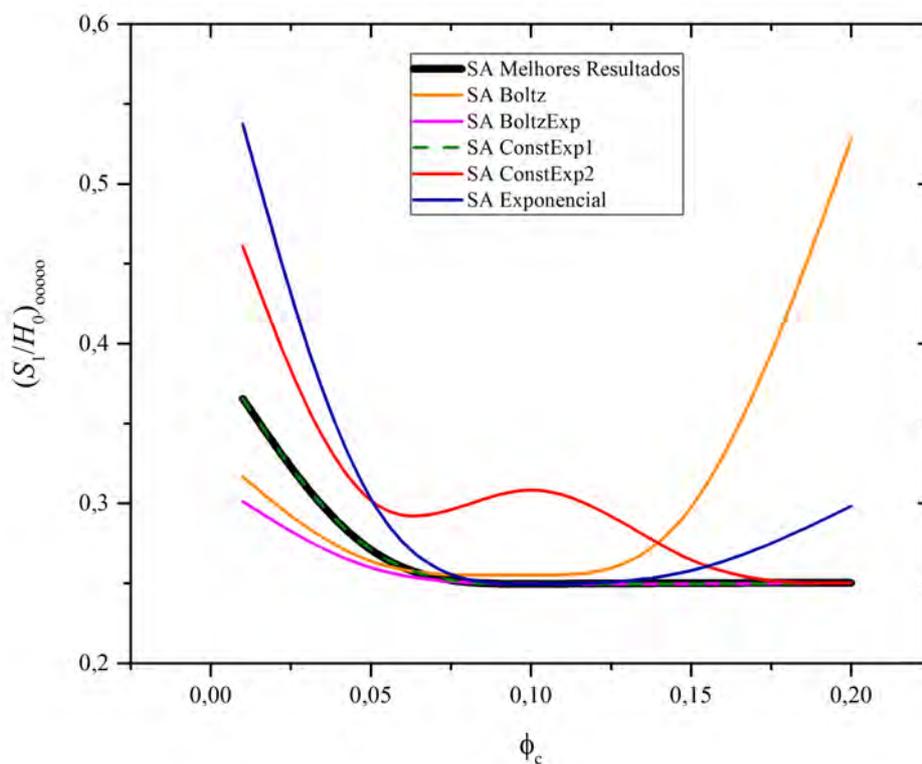


Figura 6.31. Comparação do efeito de ϕ_c sobre $(S_1/H_0)_{oooo}$ para diferentes versões do SA

Ainda sobre a Fig. 6.31 os modelos híbridos *BoltzExp* e *ContExp1* foram os únicos que se aproximaram dos melhores resultados em todos os valores de ϕ_c . A influência de ϕ_c sobre $(S_1/H_0)_{\text{óptimo}}$ só é observada para valores de ϕ_c menor que 0.05, a partir deste ponto, a razão ótima de $(S_1/H_0)_{\text{óptimo}}$ sofre pouca influência e apresenta valores semelhantes que representam a altura média entre os braços da cavidade em duplo-T.

Comparando os gráficos das duas figuras, Fig. 6.31 e Fig. 6.30, é possível notar que a divergência dos valores da razão ótima de $(S_1/H_0)_{\text{óptimo}}$ para $\phi_c = 0,01$ não é significativamente influente no resultado da minimização da resistência térmica. A própria Tabela 6.17 apresenta o quanto próximos são os valores de $(\theta_{\text{max}})_{\text{mínimo}}$. Essa característica indica que para $\phi_c = 0,01$ a geometria do grau de liberdade $(S_1/H_0)_{\text{óptimo}}$ exerce pouquíssima influência na temperatura máxima mínima. Porém para $\phi_c = 0,01, 0,1$ e $0,2$, a divergência de valores ótimos para $(S_1/H_0)_{\text{óptimo}}$ reflete igualmente na divergência de temperaturas $(\theta_{\text{max}})_{\text{mínimo}}$. Como exemplo, observa-se os resultados apresentados nos gráficos das versões do SA *Boltz* e SA *Exponencial* da Fig. 6.30 para $\phi_c = 0,2$, e da versão SA *ConstExp2* para $\phi_c = 0,1$.

A Figura 6.32 apresenta o efeito de ϕ_c sobre $(H_1/L_1)_{\text{óptimo}}$ obtido com diferentes versões do SA. Assim como nos gráficos anteriores, a curva SA Melhores Resultados, reúne as razões otimizadas que compõem a configuração geométrica ótima, ou seja, aquela que apresenta o menor valor de $(\theta_{\text{max}})_{\text{mínimo}}$. A versão SA *ContExp1* foi a única que registrou a razão ótima de $(H_1/L_1)_{\text{óptimo}}$. Conforme pode ser comparado pela Tabela 6.17, os modelos híbridos *BoltzExp* e *ConstExp2* também encontram valores próximos ao melhor $(H_1/L_1)_{\text{óptimo}}$ e valores de temperatura $(\theta_{\text{max}})_{\text{mínimo}}$ também muito próximos. Por outro lado, os *cooling schedules* padrões do MATLAB registraram as maiores temperaturas, de acordo com a Fig. 6.30, e valores de H_1/L_1 distantes dos valores ótimos, Fig. 6.32.

O gráfico da Figura 6.33 compara o efeito de ϕ_c sobre $(H_2/L_2)_{\text{óptimo}}$ para as diferentes versões do SA assim como traça uma curva dos melhores resultados. As únicas versões que não convergiram para esta curva em $\phi_c = 0,01$ foram os *cooling schedules Boltz* e *Exponencial*. Vale destacar também que o método *ContExp1* atingiu em todos os casos de ϕ_c a geometria ótima. Assim como o grau de liberdade $(H_2/L_2)_{\text{óptimo}}$ a razão ótima de $(H_1/L_1)_{\text{óptimo}}$ teve o seu valor diminuído em relação ao aumento de ϕ_c . A semelhança na influência de ϕ_c aponta para a simetria da geometria dos braços da cavidade em duplo-T como uma característica importante na diminuição da resistência térmica entre o sólido e a cavidade.

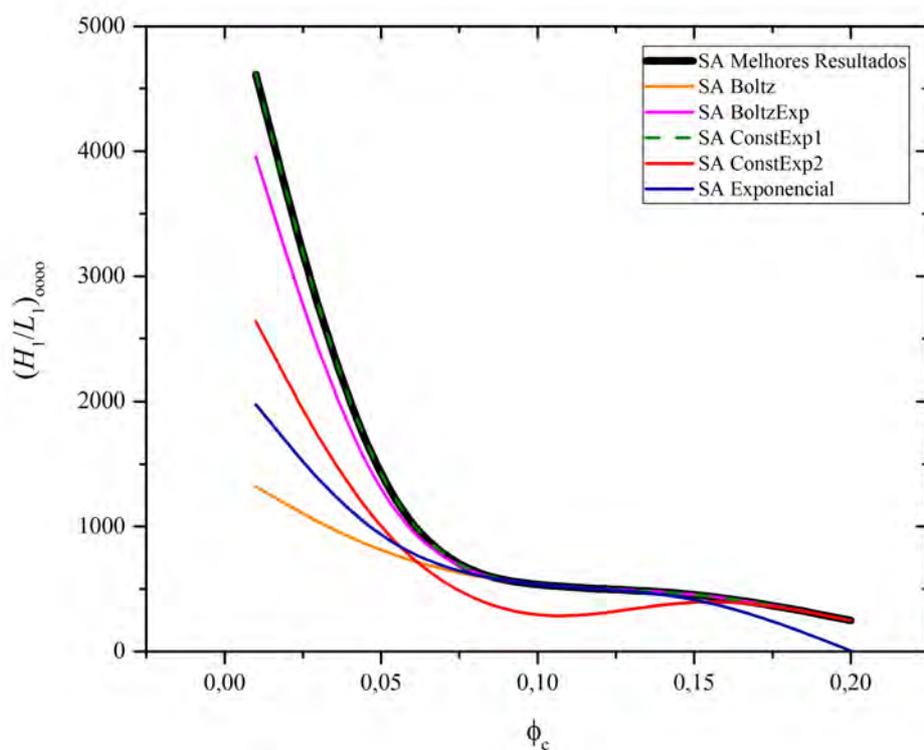


Figura 6.32. Comparação do efeito de ϕ_c sobre $(H_1/L_1)_{0000}$ para diferentes versões do SA.

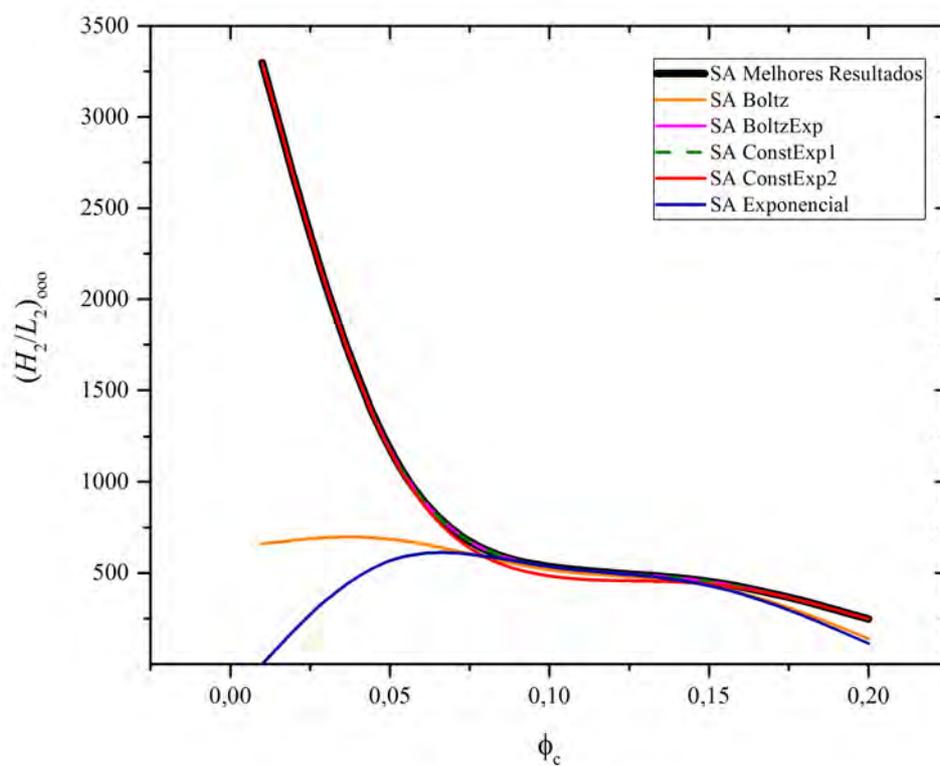


Figura 6.33. Comparação do efeito de ϕ_c sobre $(H_2/L_2)_{000}$ para diferentes versões do SA

O valor da razão $(H/L)_o$ manteve-se constante para todas as geometrias ótimas encontradas, inclusive para geometrias ótimas locais e para todos os valores de ϕ_c analisados, ou seja, há uma grande probabilidade da razão ótima ser $(H/L)_o = 30$. Para o grau de liberdade $(H_0/L_0)_{oo}$, todas as versões do SA convergiram para as mesmas razões, porém este sofre influência direta da restrição ϕ_c . A Figura 6.34 apresenta o decremento da razão $(H_0/L_0)_{oo}$ em relação ao aumento de ϕ_c .

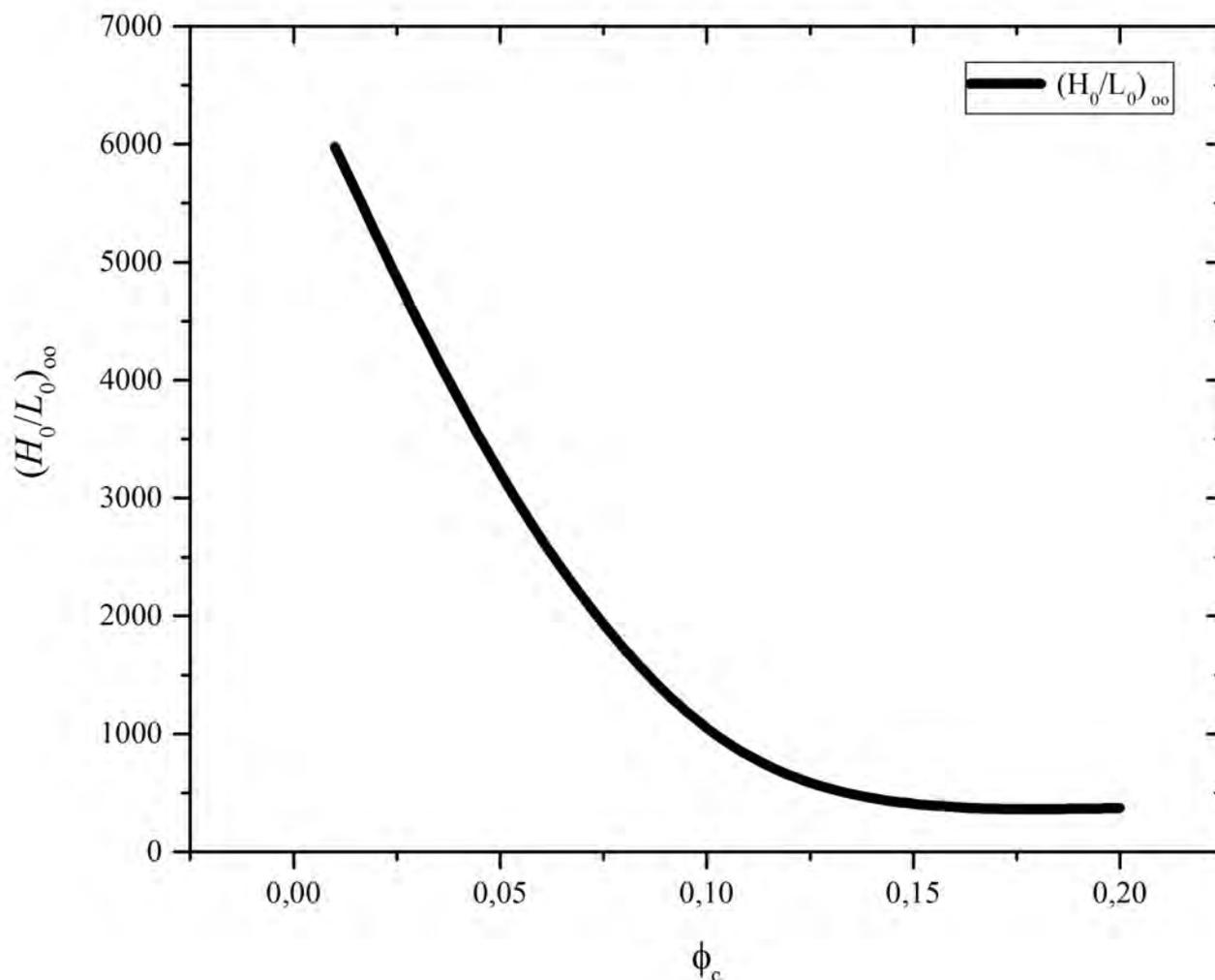
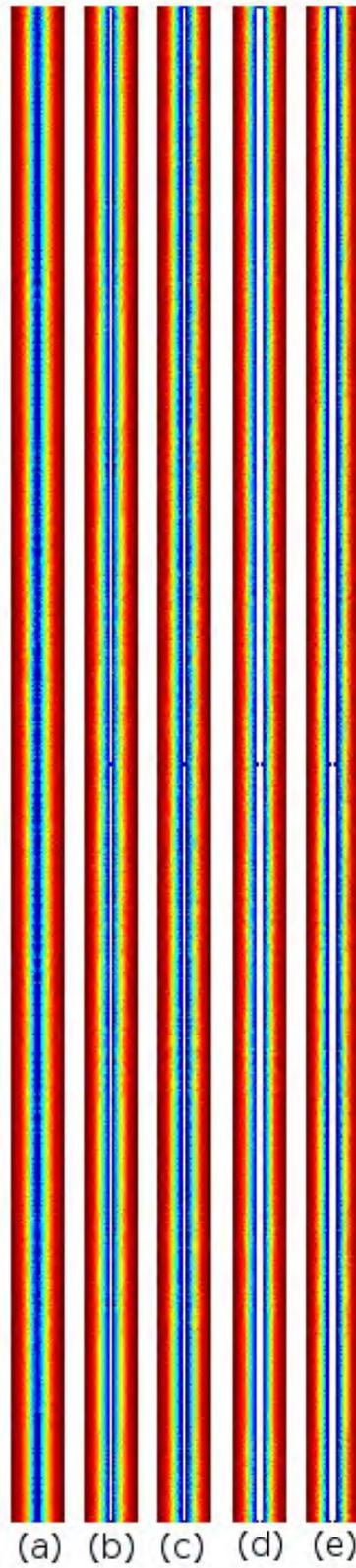


Figura 6.34. Efeito de ϕ_c sobre $(H_0/L_0)_{oo}$ para diferentes versões do SA.

A Figura 6.35 apresenta as geometrias ótimas encontradas pelas diferentes versões do SA para cada valor de ϕ_c . A Fig. 6.35(a) apresenta a geometria ótima para $\phi_c = 0,01$, encontrada pelo algoritmo SA *ConstExp1*, as demais versões também encontraram geometrias e $(\theta_{max})_{mmmmmm}$ muito próximas, com diferenças na ordem de 10^{-6} . A geometria ótima para $\phi_c = 0,05$ é representada pela Fig. 6.35(b), registrada por todas as versões do SA. A geometria da Fig. 6.35(b) foi encontrada com

maior eficiência pela versão do SA com o *cooling schedule ConstExp1*, com 638 iterações. Com o valor de $\phi_c = 0,1$, a geometria ótima foi encontrada em 1245 iterações do algoritmo SA *BoltzExp* e está representada pela Fig. 6.35(c). A Fig. 6.35(d) representa a geometria ótima para $\phi_c = 0,15$, encontrada pela versão SA *Exponencial* com o menor número de iterações. Para $\phi_c = 0,2$ a geometria ótima com menor número de simulações requeridas foi registrada pela versão SA *ConstExp2*, porém as versões híbridas *ConstExp1* e *BoltzExp* também encontraram a mesma geometria ótima. As versões híbridas do SA foram as que mais vezes encontraram as geometrias ótimas, porém os modelos tradicionais (*Boltz* e *Exponencial*) quando não encontraram registraram valores muito próximos.

O mais importante nessa avaliação foi que o uso dos algoritmos de otimização permitiu obter novas recomendações geométricas satisfatórias para cavidades resfriadoras complexas inseridas em sólidos com geração de calor em associação com o *Constructal Design*. Os métodos meta-heurísticos analisados também consumiram um esforço computacional sensivelmente inferior ao requerido com o método de Busca Exaustiva, que seria inviável nas seções de avaliação do efeito da fração de área da cavidade nas máximas temperaturas em excesso adimensional e suas respectivas geometrias ótimas.



(a) $\phi_c = 0,01$ (b) $\phi_c = 0,05$ (c) $\phi_c = 0,1$ (d) $\phi_c = 0,15$ (e) $\phi_c = 0,2$
Figura 6.35. Geometrias ótimas para diversos valores de ϕ_c

6.3 COMPARAÇÃO ENTRE A CAVIDADE EM Y E A CAVIDADE EM DUPLO-T

A partir dos resultados apresentados pela otimização da cavidade em duplo-T e através dos resultados da otimização da cavidade em Y é possível comparar a performance térmica das duas geometrias. Primeiramente as geometrias ótimas foram comparadas mantendo-se fixa a razão de H/L , e logo foram comparados os resultados para a otimização completa de ambas cavidades para várias restrições da área da cavidade em relação a área total ($\phi_c = 0,01; 0,05; 0,1; 0,15$ e $0,2$).

A cavidade em Y possui a restrição de área auxiliar ψ , que não existe para a cavidade em duplo-T. Desta forma, para a comparação entre as cavidades, a restrição de área auxiliar ψ foi configurada com o valor 0,99. Portanto, a geometria da cavidade em Y pode se distribuir livremente dentro da área do domínio sólido durante o processo de otimização. O espaço de busca utilizado foi o mesmo empregado na otimização de dois graus de liberdade (L_1/L_0 e α). Para o grau de liberdade t_1/t_0 , o espaço de busca foi discretizado com os seguintes valores:

$$t_1/t_0 = [3 \quad 7 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 14 \quad 18] \quad (6.12)$$

A Figura 6.36 demonstra a comparação entre as geometrias ótimas encontradas para a cavidade em Y e para a cavidade em duplo-T quando a razão H/L é igual a 1. As duas geometrias possuem a mesma restrição da fração da área da cavidade sobre a área total do domínio sólido ($\phi_c = 0,1$). Neste caso, a cavidade em forma de duplo-T apresentou uma performance térmica duas vezes melhor do que a cavidade em Y. O aumento da complexidade da cavidade retornou um ganho significativo no desempenho térmico do domínio. O principal motivo para a melhor performance da cavidade em duplo-T, é a vantagem que a mesma apresenta em poder adentrar o domínio sólido e distribuir de forma mais eficaz o calor gerado. O domínio com a geometria ótima da cavidade em duplo-T apresenta uma área a mais de calor do que a cavidade em Y. Desta forma, o ponto de temperatura máxima em excesso no domínio com a cavidade em duplo-T é conseqüentemente menor do que o domínio arrefecido pela cavidade em Y. O resultado é coerente com o conceito constructal da “Ótima Distribuição das Imperfeições”, visto que a cavidade em duplo-T apresenta uma distribuição mais homogênea do campo de temperaturas.

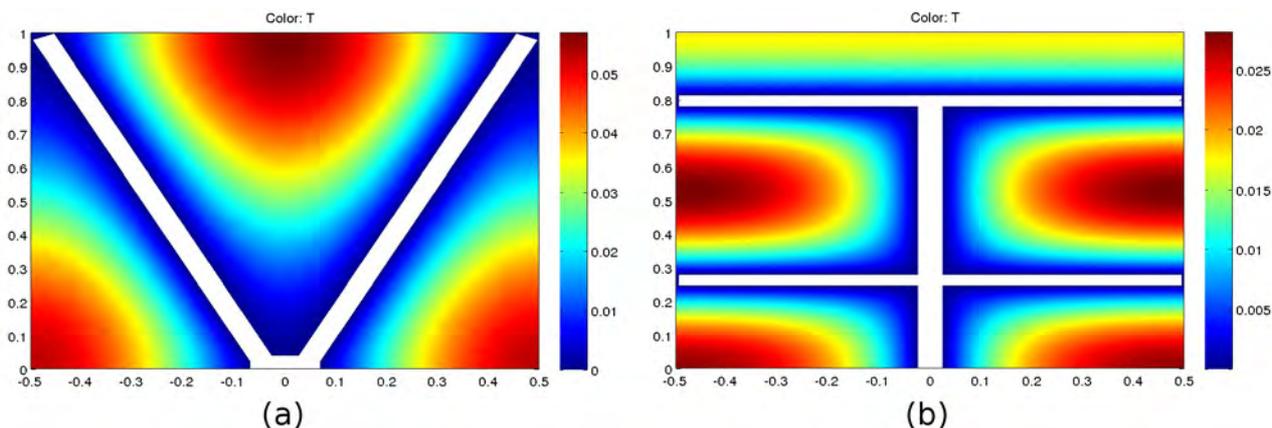


Figura 6.36. Comparação entre geometrias ótimas das cavidades em forma de Y e duplo-T

(a) Cavidade em Y: $(\theta_{\max})_{\text{mmm}} = 0,056887$

(b) Cavidade em duplo-T: $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,028147$

A próxima comparação entre os dois diferentes formatos da cavidade se deu através da otimização completa, ou seja, a otimização de todos os graus de liberdade, inclusive a razão H/L . A Fig. 6.37 demonstra a comparação entre a otimização completa para os dois formatos de cavidade. Através dos resultados apresentados na seção 6.1.4 para a otimização completa da cavidade em Y, é possível observar que mesmo com o $\psi = 0,6$, o desempenho térmico é melhor do que os resultados da otimização completa da cavidade em duplo-T. Para razões diferentes de $H/L = 1$, a geometria da cavidade em forma de Y consegue adentrar melhor o domínio computacional e portanto diminuir a resistência térmica através da melhor distribuição do campo de temperaturas.

Neste processo de comparação, são utilizados os dados da otimização completa da cavidade em duplo-T com o mesmo espaço de busca da cavidade em Y para o grau de liberdade H/L . A cavidade em forma de duplo-T obteve um desempenho levemente inferior, pois sua forma não consegue se distribuir da mesma maneira que o formato em Y. Na maioria das geometrias ótimas encontradas, nos diferentes valores de ϕ_c , todas as geometrias em forma de Y foram superiores à forma duplo-T. A cavidade em duplo-T tende a assumir a forma geométrica simples de C, não conseguindo distribuir a temperatura da mesma forma que a cavidade em Y. Desta forma, a cavidade em Y apresenta uma performance térmica com a temperatura adimensional máxima mínima em média 1,5 vezes menor do que os valores registrados pela cavidade em duplo-T.

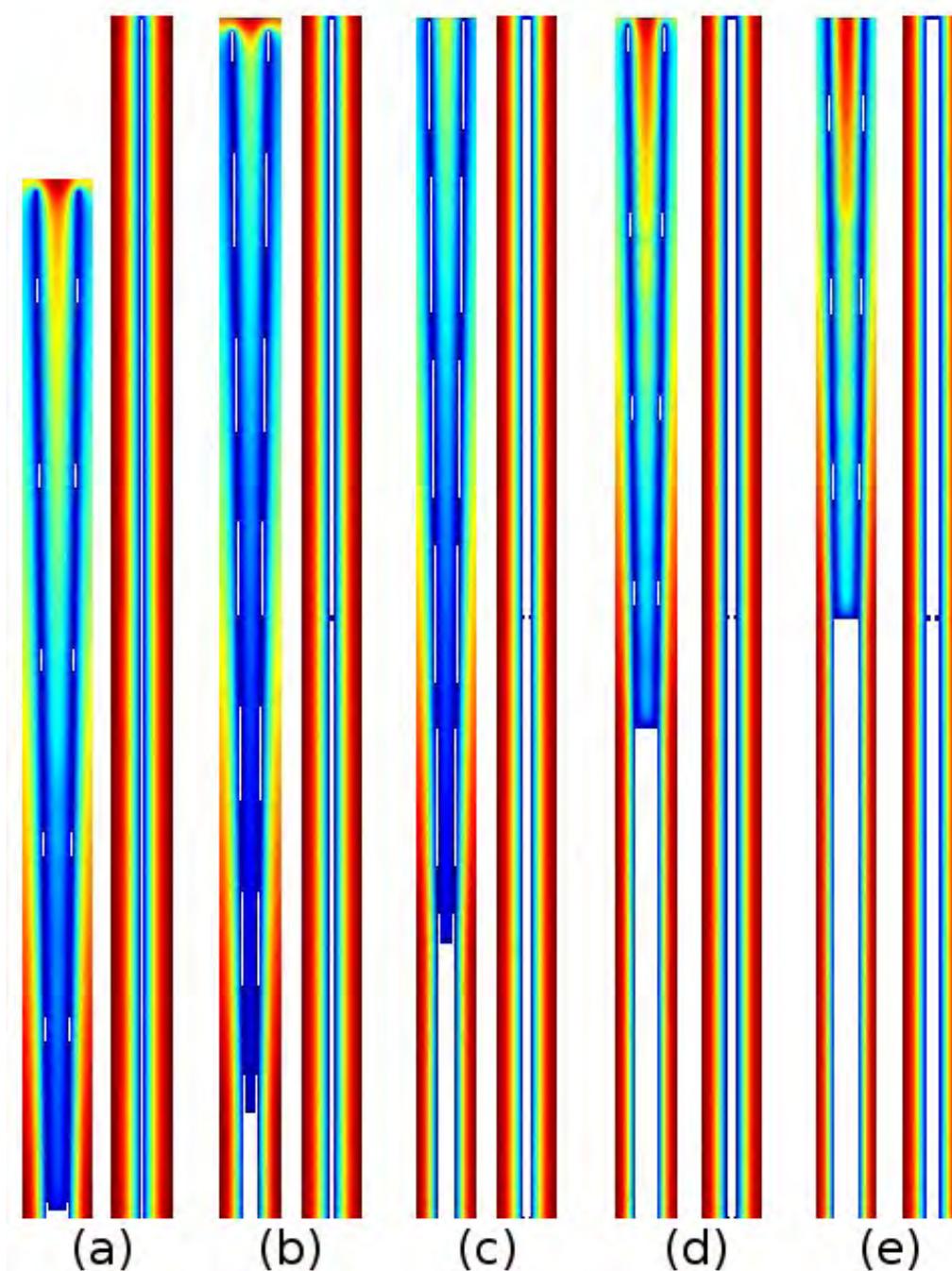


Figura 6.37. Comparação entre a otimização completa da cavidade em Y e da cavidade em duplo-T para diferentes valores de ϕ_c .

(a) $\phi_c = 0,01$; Cavidade Y : $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00414842$; Cavidade duplo-T: $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00617613$

(b) $\phi_c = 0,05$; Cavidade Y : $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00382405$; Cavidade duplo-T: $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00567604$

(c) $\phi_c = 0,1$; Cavidade Y : $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00334155$; Cavidade duplo-T: $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00509166$

(d) $\phi_c = 0,15$; Cavidade Y : $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00266439$; Cavidade duplo-T: $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00454283$

(e) $\phi_c = 0,2$; Cavidade Y : $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00239417$; Cavidade duplo-T: $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}} = 0,00402549$

7 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi realizado um estudo aplicando o algoritmo *Simulated Annealing* (SA) e avaliando diversos *cooling schedules* combinado com o *Constructal Design* para a otimização geométrica de cavidades resfriadoras inseridas em sólidos retangulares com geração interna de calor. Os principais objetivos são minimizar a máxima temperatura em excesso adimensional, (θ_{\max}), em duas cavidades: cavidade em forma de Y e cavidade em forma de duplo-T. Assim como, avaliar o principal parâmetro do SA para a otimização geométrica deste tipo de problema. A geometria da cavidade em Y foi estudada previamente nos estudos de Estrada et al. (2012) e Lorenzini et al. (2014a), enquanto a cavidade em duplo-T é uma nova geometria proposta cujas recomendações geométricas e sua influência sobre o desempenho térmico não foram estudadas anteriormente, ao conhecimento do autor.

Com os resultados gerados no presente trabalho foi possível notar que o algoritmo de otimização *Simulated Annealing* (SA) é adequado na otimização de problemas envolvendo o *Constructal Design*. Da mesma forma que o Algoritmo Genético (AG), executado nos estudos de Estrada et al. (2012), Lorenzini et al. (2014a) e Lorenzini et al. (2014b), o SA conduziu a temperaturas mínimas e geometrias ótimas semelhantes ao encontrado com o método de Busca Exaustiva (BE). Contudo, foi requerido um esforço computacional significativamente menor. Para o caso avaliado na seção 5.1.2, para a otimização de dois graus de liberdade da cavidade em Y, o mecanismo de BE requereu 2,31 vezes mais simulações do que o SA para a obtenção da mesma geometria ótima. Os resultados desta pesquisa foram publicados nos trabalhos de Gonzales et al. (2014a) e Gonzales et al. (2014b).

Com relação ao estudo dos parâmetros do algoritmo SA, esta pesquisa dedicou-se a investigar os parâmetros denominados *cooling schedules*, tidos na literatura como o parâmetro mais influente e definido de forma empírica para diferentes tipos de problemas de otimização. Desta forma, foi proposto um estudo da robustez de diferentes parâmetros de *cooling schedules* em encontrar as geometrias ótimas. Seis parâmetros foram investigados, três deles tradicionais (*Boltz*, *Exponencial* e *Fast*) e mais três híbridos (*BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*) propostos no presente trabalho.

A avaliação consistiu em realizar várias execuções de cada versão do algoritmo SA com diferentes parâmetros e, estatisticamente, analisou os resultados que concluíram que, para a otimização geométrica de dois graus de liberdade da cavidade em Y os modelos híbridos

apresentaram uma maior média percentual de alcançar as geometrias ótimas globais. Além disso, uma análise estatística (com classificação realizada pelo teste de *Tukey*) indicou que os modelos híbridos possuem maior confiabilidade em atingir as geometrias ótimas globais, sendo o *cooling schedule Fast* classificado como o modelo menos recomendado para o problema de transferência de calor estudado neste trabalho.

Os resultados da otimização completa da cavidade em Y foram coerentes com os resultados do estudo estatístico, onde a versão do SA com o modelo *Fast*, foi a que apresentou piores resultados com valores de temperaturas máximas mínimas superiores aos demais resultados na maioria dos casos. Os parâmetros híbridos de *cooling schedule* encontraram as geometrias ótimas em várias situações, porém os modelos padrões, *Exponencial* e em especial o modelo *Boltz*, também apresentaram bom desempenho durante a otimização completa. Os resultados da otimização completa para diferentes valores da restrição de área auxiliar e área da cavidade do problema investigado foram coerentes com os resultados apresentados na literatura (Lorenzini et al., 2014a). Em vários casos os resultados da otimização completa da cavidade em Y, contando com os melhores resultados de cada versão do algoritmo SA empregada, encontraram magnitudes de θ_{\max} ainda mais baixas que as temperaturas relatadas pelo AG (Lorenzini et al., 2014a).

A execução de diferentes versões do SA, com diferentes parâmetros de *cooling schedule*, tanto com os modelos híbridos ou tradicionais, tornou a otimização mais precisa, pois a geometria ótima para cada caso foi encontrada muitas vezes por diferentes versões do SA. Não houve uma versão unânime, mas os resultados dos melhores parâmetros, excluindo o *Fast*, garantiram bons resultados. Mesmo aplicando os seis algoritmos do SA, ao mesmo espaço de busca, o total de iterações (simulações requeridas) pra a otimização completa da cavidade em Y, incluindo o estudo das restrições ψ e ϕ , demandou cerca de 4,0 % das simulações requeridas com o método de Busca Exaustiva (BE), mais precisamente uma redução de $5,47 \times 10^6$ simulações para $2,08 \times 10^5$ simulações. Com o tempo médio de 6 segundos por simulação, o método BE levaria aproximadamente 456 horas ou 19 dias para completar a simulação que levou apenas 18 horas com todas as seis versões do SA. Consequentemente, a aplicação de uma combinação de diversos algoritmos SA (ou até mesmo com AG) é uma proposta satisfatória para otimização neste tipo de problema.

Os modelos híbridos de resfriamento do SA apresentaram um ótimo desempenho, mas não significa que os modelos tradicionais sejam desconsiderados, com exceção do *Fast*, que neste estudo apresentou um desempenho bastante aquém em comparação com os demais métodos. Desta

forma, para a otimização da cavidade em duplo-T, a nova geometria complexa proposta neste estudo, a aplicação do *cooling schedule Fast* foi descartada.

Para a otimização de dois e três graus de liberdade da cavidade em duplo-T o método de BE foi utilizado como forma de validar os resultados do SA. Para dois graus de liberdade todas as versões do SA encontraram a geometria ótima, validando o uso dos modelos híbridos para a cavidade em duplo-T. Além disso, o número de iterações também foi semelhante. Algumas vezes uma versão ou outra apresentou um número menor ou muito maior de simulações requeridas, sendo uma característica da natureza não determinística do algoritmo estocástico SA. Para a otimização de três graus de liberdade da cavidade em duplo-T os modelos híbridos, *ConstExp1* e *ConstExp2*, configurados com o parâmetro *StallIterLimite* igual a 100, foram os que apresentaram o menor registro de mínimos locais, convergindo para as geometrias relatadas através do método de BE. Para os quatro graus de liberdade todas as versões do SA foram unânimes em atingir a mesma geometria ótima. Neste caso não foi aplicado o método de BE em razão do esforço computacional necessário. Desta forma, considera-se os resultados como os mais próximos à geometria ótima global.

Para a otimização completa da cavidade em duplo-T observou-se que a compilação dos melhores resultados de cada versão assegurou uma otimização mais precisa. Portanto, não se evidenciou durante a otimização completa da cavidade em duplo-T um *cooling schedule* que conduza de forma universal ao melhor desempenho para os diferentes valores estudados de restrição de área da cavidade. Esse comportamento era esperado em função do comportamento não determinístico do algoritmo *Simulated Annealing*. Vale destacar que, para a otimização completa da cavidade em duplo-T (considerando diferentes ϕ_c e cinco graus de liberdade) seriam requeridas com o método de BE um total de $5,0 \times 10^5$ simulações. Enquanto isso, a combinação de todas as cinco diferentes versões do SA conduziu a um número de simulações requeridas de $2,9 \times 10^4$, i.e., aproximadamente 6,0 % do total requerido com o método de BE.

Com relação à aplicação da associação *Simulated Annealing* e *Constructal Design* foi possível observar o efeito das restrições sobre a otimização completa das duas cavidades: cavidade em Y e duplo-T, o que não seria possível com o emprego do método BE. No estudo da cavidade em duplo-T, a aplicação da metodologia proposta no presente trabalho conduziu a resultados concordantes com os obtidos com BE para sólidos com $H/L = 1,0$. Também foi observado para este caso que a inserção de um novo ramo intermediário (razão H_1/L_1) conduz a uma menor penetração do ramo principal (razão H_0/L_0) no interior do domínio sólido em comparação com as geometrias ótimas de uma cavidade em T (Lorenzini et al., 2013).

Para razões de H/L diferentes de 1,0, observou-se que a razão H/L possui grande influência sobre o comportamento térmico da cavidade em duplo-T, principalmente para razões de $H/L \leq 10,0$. Após essa magnitude, a geometria tende a uma forma enrijecida e o ganho térmico é bastante suavizado. Para completar esse estudo, foi proposta a análise da restrição ϕ_c (fração de área da cavidade) sobre a otimização completa da cavidade em duplo-T, sendo verificado que a máxima temperatura em excesso adimensional cinco vezes minimizada, $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$, diminuiu com o aumento de ϕ_c , conforme esperado. A geometria ótima da cavidade para os diversos valores de ϕ_c estudados foi obtida para cavidades esbeltas, semelhante a uma forma de cavidade em “C” (Rocha et al., 2007).

Finalmente com os resultados da otimização da cavidade em duplo-T, foi possível comparar o desempenho térmico desta nova geometria em relação à cavidade em forma de Y. O que se observou foi uma sensível superioridade da forma em duplo-T em domínios computacionais com a razão $H/L = 1,0$. Neste caso, a cavidade em Y apresentou a máxima temperatura em excesso adimensional duas vezes maior do que a cavidade em duplo-T. Porém, para as razões de $H/L > 1,0$ estudadas, a cavidade em Y conseguiu distribuir de forma mais eficiente o campo de temperaturas, apresentando mais regiões com maior concentração de calor e, conseqüentemente, com o ponto de temperatura em excesso menor do que o resultado apresentado pela cavidade em duplo-T.

8 PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

Pretende-se dar continuidade na avaliação de metodologias de otimização, como algoritmos estocásticos ou evolutivos para a aplicação em problemas de engenharia em conjunto com o método *Constructal Design*.

Portanto, ficam como sugestões para trabalhos futuros:

- investigar parâmetros do AG, que melhore o seu desempenho, usando como validação os melhores resultados encontrados pelo SA para a otimização completa da cavidade em Y, e investigar por que em alguns casos o AG aplicado em (Lorenzini et al., 2014a) se prendeu em mínimos locais. Os operadores de cruzamento ou métodos de seleção do AG seriam exemplos de parâmetros a serem investigados;
- desenvolver um algoritmo SA paralelo, em que as diferentes versões estudadas nesta pesquisa, compartilhem, durante o processo de otimização, a melhor configuração encontrada. Seria um paralelismo de tarefas, onde o espaço de busca se mantém o mesmo (Dados), porém explorado por diferentes versões do algoritmo SA (Tarefa);
- comparar os resultados da otimização da cavidade em duplo-T com outras cavidades, mantendo as restrições iguais, e desta forma verificar o desempenho da cavidade em duplo-T em relação às demais presentes na literatura;
- estudar a aplicação híbrida de diferentes métodos de otimização junto ao método *Constructal Design*, como por exemplo um algoritmo híbrido entre AG e SA.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bejan, A., 1996, “Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume”, **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 40, n. 4, pp. 799–816.

Bejan, A. , 2000, “**Shape and Structure, from Engineering to Nature**”, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Bejan, A., 2003. “Optimal internal structure of volumes cooled by single-phase forced and natural convection, **Journal of Electronic Packaging**, vol. 125, pp. 200 – 207.

Bejan, A., 2004. “**Convection Heat Transfer**”, John Wiley, Durham, USA.

Bejan, A. and Merks, G.W., 2007, **Constructal Design of Social Dynamics**, Eds., New York: Springer.

Bejan, A, Lorente, S. 2008, **Design With Constructal Theory**, Wiley, Hoboken, NJ.

Bejan, A., Zane, J. P., 2012, “**Design in Nature**”, Doubleday, New York, 1st Ed.

Bertsimas, D., Tsitsiklis, J., 1993, “Simulated Annealing”, **Statistical Science**, v. 8,n.1, pp 10-15;

Biserni, C., Rocha, L. A. O., Bejan, A., 2004, “Inverted Fins: Geometric Optimization of the Intrusion Into a Conducting Wall” **Int. J. Heat Mass Transfer**, 47, pp. 2577–2586.

Biserni, C., Rocha, L. A. O., Stanescu, G., Lorenzini, E., 2007. “Constructal H-shaped cavities according to Bejan's theory”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 50, pp. 2132 – 2138.

Brusco M. J.,2014, “A comparison of simulated annealing algorithms for variable selection in principal component analysis and discriminant analysis”, **Computational Statistics and Data**

Analysis, v. 77, pp. 38–53.

Çengel, Y. A., Ghajar A. J., 2012, **Transferência de calor e massa: uma abordagem prática**. Cap. 2, 4 ed. Porto Alegre, AMGH.

Clough, R.W., Sept. 1960, “The finite element in plane stress analysis”. **Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation**. Pittsburgh, Pa.

Donnelly, R. A., 1987, “Geometry optimization by simulated annealing”, **Chemical Physics Letters**, Volume 136, Issues 3–4,, Pages 274–278

Dos Santos. E. D., 2007, “**Análise De Escoamentos Não-Isotérmicos, Incompressíveis, Utilizando Simulação De Grandes Escalas E O Método De Elementos Finitos**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.

Eglese, R. W., 1990, “Simulated Annealing: A tool for Operational Research”, **European Journal of Operational Research**, p.271-281.

El-Bouri A., Azizi N., Zolfaghari S., 2007, “A comparative study of a new heuristic based on adaptive memory programming and simulated annealing: The case of job shop scheduling”, **European Journal of Operational Research**, v. 177, pp. 1894–1910.

Estrada, E. ; Dos Santos, E. D. ; Isoldi, L. A. ; Rocha, L. A. O., 2012, “Genetic Algorithm and Constructal Design for Geometric Optimization of Y-Shaped”. In: **V MCSUL - Conferência Sul de Modelagem Computacional**, Rio Grande – RS, v. 1. p. 45-50.

Fox, J., 2005, “The R Commander: A basic-statistics graphical user interface to R.” **Journal of Statistical Software**. 14, n. 9.

Garcia, F. L., 2011, “**Otimização Geométrica de Cavidades Complexas Empregando Construtal Design**”, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Dissertação de

Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande, (FURG), Rio Grande, Brasil.

Gonzales, G. V. ; Emmendorfer, L. R. ; Santos, E. D. ; Rocha, L. A. O. ; Isoldi, L. A. ; Estrada, E. S. D., 2014b, “Constructal Design and Simulated Annealing Employed for Geometric Optimization of a Y-Shaped Cavity Intruded into Conductive Wall”. In: **VI MCSUL - Conferência Sul em Modelagem Computacional**, Rio Grande, v. 1, p. 280-290.

Gonzales, G. V. ; Santos, E. D. ; Rocha, L. A. O. ; Estrada, E. S. D. ; Emmendorfer, L. R. ; Isoldi, L. A., 2014a, “A Comparative Study of Simulated Annealing with different Cooling Schedules for Geometric Optimization of a Heat Transfer Problem According to Constructal Design”. In: **VI MCSUL - Conferência Sul em Modelagem Computacional**, Rio Grande -RS, v. 1, p. 426-435.

Gosselin L., Tye-Gingras M., Mathieu-Potvin F., 2009, “Review of utilization of genetic algorithms in heat transfer problems”. **Int. J. Heat. Mass. Transfer**;52:2169-2188

Hahn, D. W.; Ozisik, N. M., 2012, “**Heat Conduction**”, John Wiley Professional, 1st Edition.

Hajek B., 1988, “Cooling Schedules for Optimal Annealing”, **Mathematics of Operations Research**, v. 13,n. 2,p. 311-129.

Hajmohammadi, M. R., Poozesh, S., Campo, A., and Nourazar, S. S., 2013, “Valuable Reconsideration in the Constructal Design of Cavities” **Energy Convers. Manage.**, 66, pp. 33–40.

Hines. W. W; Montgomery, D. C., Goldsman, D. M, Borrer, C. M., ,2006. Tradução: V. R. Lima, **Probabilidade e Estatística na Engenharia**. Cap.12 , Rio de Janeiro, LTC.

Ingber L.,1989,“Very Fast Simulated Re-annealing”, **Math. Comput. Modelling**, v. 12,n. 8, pp.967-973.

Ingber L., 1993, “Simulated Annealing: Practice versus Theory”, **Mathl. Comput. Modeling**

Vol. 18 ,No 11,pp-29-57.

Incropera, F. P.. Tradução: E. M. Queiroz e P. P. Fernando Luiz. “**Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**”. Cap.2, Rio de Janeiro, LTC.

James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R., 2013,“**A Introduction to Statistical Learning: With Applications in R**”, Springer Texts in Statistics, New York, Springer, ISBN 978-1-4614-7138-7.

Kastanya D., 2013, “Evaluating the effects of cooling schedule on the performance of ADORE”, **Annals of Nuclear Energy**, v. 62, pp. 483–486.

Kirkpatrick, S.,Gelatt, C. D.,Vecchi, M., P.,1983, “Optimization by Simulated Annealing”, **Science**, New Series, Vol 220, No 4598, pp 671-680.

Lorenzini, G. ; Rocha L., 2009, “Geometric optimization of T-Y-shaped cavity according to constructal design”. **Int J Heat Mass Transfer**;52:4675-4683.

Lorenzini, G., Biserni, C., Isoldi, L. A., Dos Santos, E. D., Rocha, L. A. O., 2011 “Constructal Design Applied to the Geometric Optimization of Y-shaped Cavities Embedded in a Conducting Medium”, **J. Electronic Packaging**, vol. 133, pp. 041008-1 – 041008-8.

Lorenzini, G. ; Garcia, F.L. ; dos Santos, E.D. ; Biserni, C. ; Rocha, L.A.O. 2012 “Constructal design applied to the optimization of complex geometries: T-Y-shaped cavities with two additional lateral intrusions cooled by convection”. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 55, p. 1505-1512.

Lorenzini, G., Biserni, C., Link, F. B., Isoldi, L. A., dos Santos, E. D., and Rocha, L. A. O., 2013, “Constructal Design of T-Shaped Cavity for Several Convective Fluxes Imposed at the Cavity Surfaces” **J. Eng. Thermophys.**, 22, pp. 309–321.

Lorenzini, G. ; Biserni, C. ; Estrada, E. da S. D. ; Dos Santos, E. D. ; Isoldi, L. A. ; Rocha, L. A. O., 2014a, “Genetic Algorithm Applied to Geometric Optimization of Isothermal Y-Shaped Cavities”. **Journal of Electronic Packaging**, v. 136, p. 031011-1-031011-9 .

Lorenzini, G. ; Biserni, C. ; Estrada, E. D. ; Isoldi, L. A. ; Dos Santos, E. D. ; Rocha, L. A. O., 2014b, “Constructal Design of Convective Y-Shaped Cavities by Means of Genetic Algorithm.” **Journal of Heat Transfer**, v. 136, p. 071702-071702-10.

MATLAB User’s Guide, 2000, Version 6.0.088, Release 12, The Mathworks Inc., Natick, MA.

Metropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth MN, Teller AH., 1953, “Equation of State Calculations by Fast Computing Machines”,**The Journal Of Chemical Physics**, v 21, p 1088-1092.

Miguel, A.F., 2013, “The Emergence of Design in Pedestrian Dynamics: Locomotion, Self-Organization, Walking Paths and Constructal Law”, **Phys Life Rev.**

Norouzi, E., Mehrgoo, M., Amidpour, M., 2012 “Geometric and Thermodynamic Optimization of a Heat Recovery Steam Generator: A Constructal Design”, **Journal Of Heat Transfer-Transactions Of The ASME**, vol. 134, Ed. 11,DOI: 10.1115/1.4007070.

Nourani Y., Andresen B., 1998, “A comparison of simulated annealing cooling strategies”,**J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 31,pp. 8373–8385.

Rayleigh, L. (J.W. Strutt), 1870. “On the theory of resonance”. **Trans. Roy. Soc. (London)**, A161, 77±118.

Reddy, J. N., 1984, “**An Introduction to the Finite-Element Method**”, McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS : Mathematics and Statistics Series, McGraw-Hill, Singapore.

Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994, “**The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**”, CRC, Boca Raton, Florida,USA.

Richardson, L.F., 1910 “The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems”. **Trans. Roy. Soc. (London)**, A210, 307±57.

Rocha, L.A.O., Lorente, S., Bejan, A., 2002, “Constructal design for cooling a disc-shaped area by conduction”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol 45, pp 1643-1652.

Rocha L. A. O, Montanari G. C. , Dos Santos E. D., Rocha A. D., 2007, **Constructal design applied to the study of cavities**. Engenharia Térmica (Brasil);6:34-41.

Rocha, L.A.O., Lorente, S., and Bejan, A., 2013, **Constructal Law and the Unifying Principle of Design**, Eds., Springer-Verlag.

Schneider J. J., Puchta M., 2010, “Investigation of acceptance simulated annealing — A simplified approach to adaptive cooling schedules”, **Physica A**, v. 389, pp. 5822–5831.

Siegel, R., Howell, J. R., 2002, “**Thermal Radiation Heat Transfer**” Taylor & Francis, 4th edition, New York.

Snedecor G. W., Cochran W. G., 1980, “**Statistical Methods**”, Iowa State University Press, 7th edition, Iowa.

Song D., Zengyuan G.,2011, “Robustness in the volume-to-point heat conduction optimization problem”, **Int. J. Heat. Mass. Transfer**, 54, 4531-4539.

Szu H., Hartley R.,1987, “Fast Simulated Annealing”, **Physics Letters A**, v. 122, p. 157-162.

Team R. D. C., 2014, “**The R Manuals**”, Acessado em 01/2015. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>.

Triki E., Collette Y., Siarry P., 2004, “A theoretical study on the behavior of simulated annealing leading to a new cooling schedule”,**European Journal of Operational Research**, v. 166,pp 77-92.

Wenjun, W., Lingen C., Fengrui. , 2007, “Heat-conduction optimization based on constructal theory”, **Applied Energy**, vol 84.

Xianghua, X., Xingang, L., Jianxun, R., 2007, “Optimization of heat conduction using combinatorial optimization algorithms”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 50,pp 1675–1682.

Xie, Z., Chen, L., Sun, F., 2010, “Geometry Optimization of T-Shaped Cavities According to Constructal Theory” **Math. Comput. Model.**, 52, pp. 1538–1546.

Zienkiewicz , O. C. ; Taylor, R. L. 2000, **The finite element method: The Basis**. Volume 1, Butterworth-Heinemann, Oxford, Ed 5.

ANEXO I – RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO COMPLETA DA CAVIDADE EM Y PARA DIFERENTES VALORES DE ψ E ϕ

A otimização completa da cavidade em Y para a fração de área auxiliar $\psi = 0,4$ gerou os resultados apresentados na Tabela A.1. Assim como foi realizado anteriormente na Tabela 6.7 para $\psi = 0,3$, a Tabela A.1 apresenta as configurações ótimas e ordena as diferentes versões do SA em relação aos menores valores de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ e número de iterações requeridas. Neste processo de otimização, a Tabela A.1 evidencia, através dos resultados apresentados, a performance superior dos métodos híbridos de otimização (*BoltzExp* e *ConstExp1*). Sendo estes métodos aqueles que encontram não somente o menor valor de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ com maior frequência, mas também com o menor número de iterações do SA.

Tabela A.1. Resultados da otimização completa da cavidade em Y aplicando o SA com vários *Cooling Schedules* para $\psi = 0,4$

$\psi = 0,4 \setminus$ RESTRIÇÕES	GRAUS DE LIBERDADE				$(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$	SIMULATED ANNEALING	
	$(H/L)_0$	$(t_1/t_0)_{00}$	$(L_1/L_0)_{000}$	$(\omega)_{0000}$		Cooling Schedule	Iterações
0,01	20	100	0,007	1,57	0,00249062	Boltz	1892
-	15	70	0,070	1,56	0,00660674	ConstExp1	2820
-	10	90	0,030	1,56	0,00799055	Fast	2649
-	10	13	0,100	1,55	0,01144940	BoltzExp	1128
-	10	13	0,100	1,55	0,01144940	Exponencial	2179
-	10	17	1,000	1,53	0,01214670	ConstExp2	1609
0,05	20	15	0,500	1,56	0,00489762	BoltzExp	2044
-	20	17	0,200	1,57	0,00523828	Boltz	3159
-	15	5	1,000	1,56	0,00660378	ConstExp1	1309
-	15	60	1,000	1,55	0,00683241	Exponencial	1530
-	15	60	1,000	1,55	0,00683241	ConstExp2	2039
-	2	220	0,500	1,45	0,04278510	Fast	1539
0,10	20	40	1,000	1,56	0,00410225	BoltzExp	1265
-	20	150	1,000	1,56	0,00548622	Exponencial	2502
-	10	60	0,300	1,57	0,00597282	Boltz	1427
-	10	9	0,050	1,57	0,00645683	ConstExp1	1253
-	7	11	0,100	1,57	0,00661233	ConstExp2	1749,
-	1	110	0,700	1,36	0,06075150	Fast	1523
0,15	15	4	0,700	1,56	0,00515746	ConstExp1	1345
-	15	4	0,700	1,56	0,00515746	Exponencial	1610
-	7	18	0,700	1,56	0,00832875	Boltz	1344
-	5	4	0,001	1,56	0,01169930	ConstExp2	1275
-	2	160	0,700	1,55	0,02433570	BoltzExp	1266
-	1	220	1,000	1,43	0,05336370	Fast	1106
0,20	15	210	1,000	1,57	0,00308556	ConstExp1	1807
-	10	2	1,000	1,55	0,00795840	Fast	1957
-	7	9	1,000	1,56	0,00801308	ConstExp2	1842
-	7	9	1,000	1,56	0,00801308	Exponencial	2258
-	5	13	1,000	1,56	0,01071690	Boltz	2248
-	2	40	1,000	1,56	0,02381350	BoltzExp	1237

Novamente, os resultados apresentados na otimização completa seguem a tendência de classificação apresentada na seção 6.1.3, onde a análise estatística apontou os modelos híbridos com maior probabilidade de convergência à geometria ótima. Também foi observado que, de uma forma geral, o *cooling schedule Fast* apresenta a menor probabilidade de encontrar o ótimo, o que é coerente com os resultados da otimização completa apresentados até o momento.

A Figura A.1 apresenta o efeito de ϕ sobre $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ para os vários *cooling schedules* estudados. É possível verificar que o modelo *ConstExp1* apresenta um comportamento mais semelhante ao combinado de melhores resultados, enquanto o método *Fast* apresenta grandes desvios na predição de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ para todos os valores de ϕ estudados. Um exemplo da dificuldade do algoritmo *Fast* em obter as geometrias ótimas está no caso $\phi = 0,1$, onde o SA *Fast* registrou um valor quatorze vezes superior ao obtido com a geometria ótima encontrada pelo SA com o *cooling schedule* híbrido *BoltzExp*.

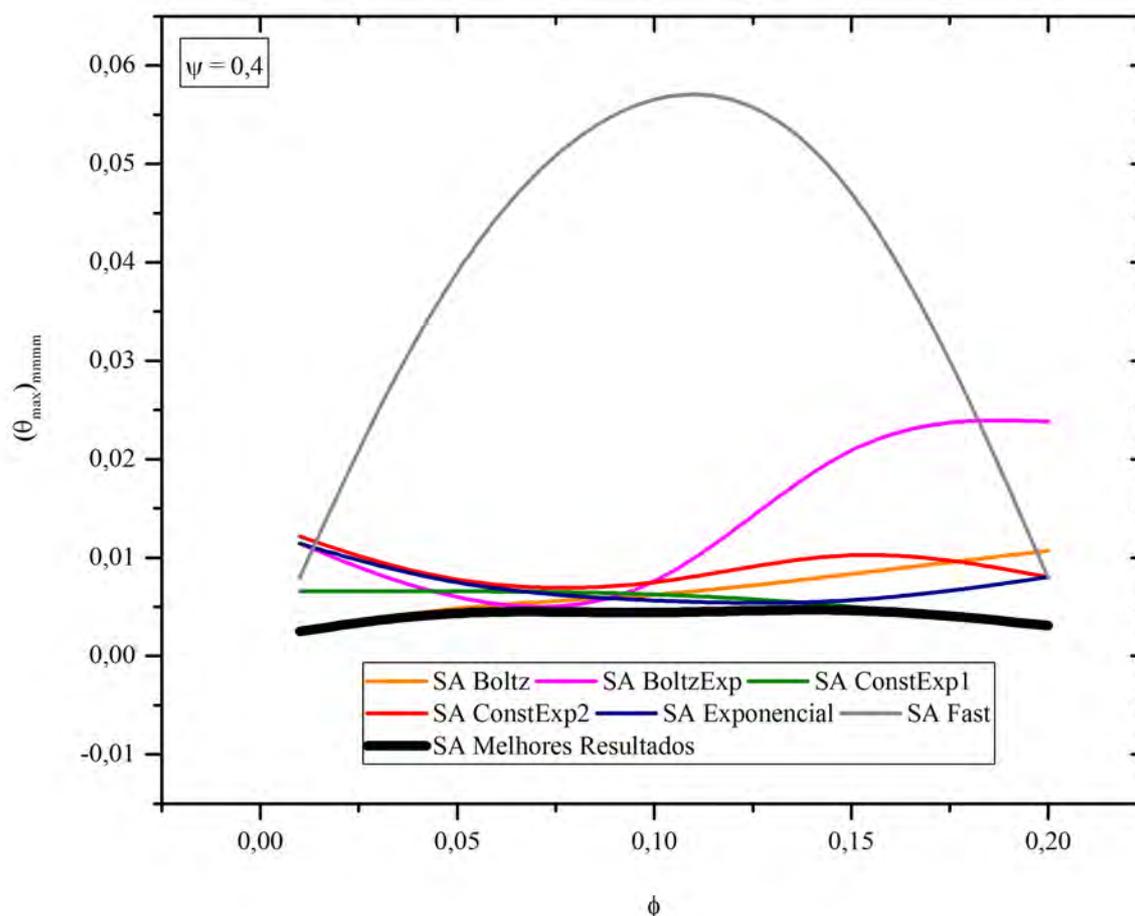


Figura A.1. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ para $\psi = 0,4$

O gráfico da Figura A.2 demonstra uma tendência de convergência para $(\alpha)_{0000}$ no intervalo de 1,55 a 1,57 entre os vários valores de ϕ estudados. Este intervalo também é observado nos gráficos da Fig. 6.9, o que pode indicar uma zona de valores ótimos para $(\alpha)_{0000}$, assim como os valores ótimos de $(H/L)_0$, que apresentam valores entre 10 e 20, para $\psi = 0,3$ e $\psi = 0,4$. Na Figura A.2 também é possível notar a grande divergência de valores registrados pelo SA com o *cooling schedule Fast*, apenas para os valores de $\phi = 0,01$ e $\phi = 0,2$ são registrados ângulos mais próximos da curva com melhores configurações (SA Melhores Resultados). Os resultados do SA *Fast* apresentaram dificuldade em convergir para os valores ótimos, principalmente em $\phi = 0,1$, onde se observa o ângulo de $(\alpha)_{0000}$ muito distante da região ótima de 1,55 a 1,57.

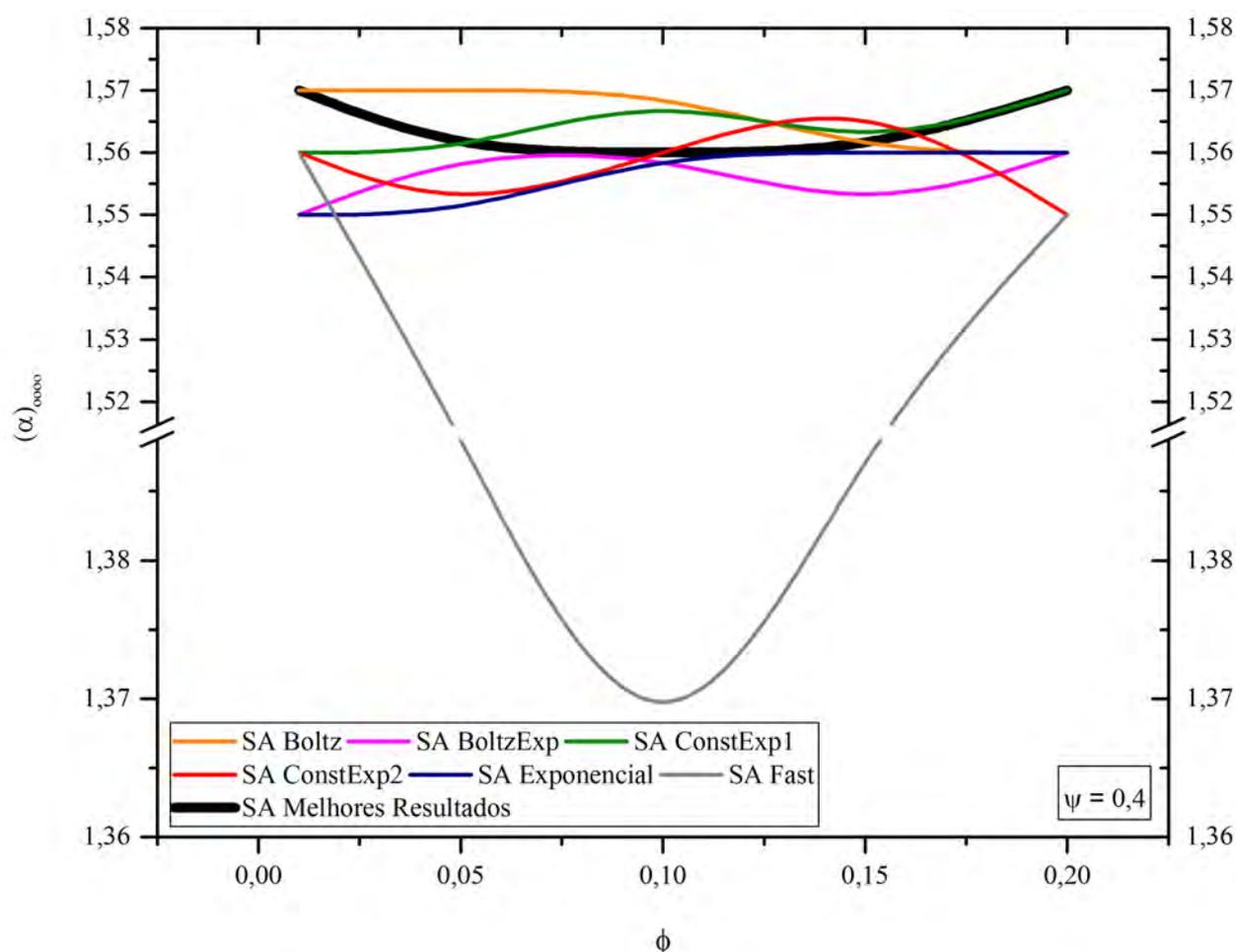


Figura A.2. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\alpha)_{0000}$ para $\psi = 0,4$

A Figura A.3 apresenta o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{000}$. De acordo com o gráfico apresentado, os valores ótimos crescem até a razão $(L_1/L_0)_{000} = 1,0$ com o aumento de ϕ para

o intervalo de $\phi = 0,01$ e $0,1$. Após esse intervalo, a razão (L_1/L_0) decresce para $(L_1/L_0)_{\text{ooo}} = 0,7$ em $\phi = 0,15$ e volta ao valor de $(L_1/L_0)_{\text{ooo}} = 1$ para $\phi = 0,2$. Através da Fig. A.3 também é possível observar que há uma divergência entre os valores individuais de cada versão do SA, sendo o parâmetro híbrido *ConstExp2* o modelo que mais diverge, com apenas um valor em comum com a curva das melhores configurações para $(L_1/L_0)_{\text{ooo}}$. O *cooling schedule BoltzExp* foi o parâmetro que melhor se aproximou da compilação de melhores resultados. Mesmo para o caso $\phi = 0,01$, onde o *BoltzExp* não conduziu à geometria ótima, a diferença entre as razões propostas com *BoltzExp* e *Boltz* (que nesse caso conduziu à geometria aproximadamente ótima entre os casos comparados) é muito pequena e a mesma tendência é observada. Também é interessante notar que, para $\phi = 0,2$, todas as versões do SA registraram o mesmo valor de $(L_1/L_0)_{\text{ooo}}$.

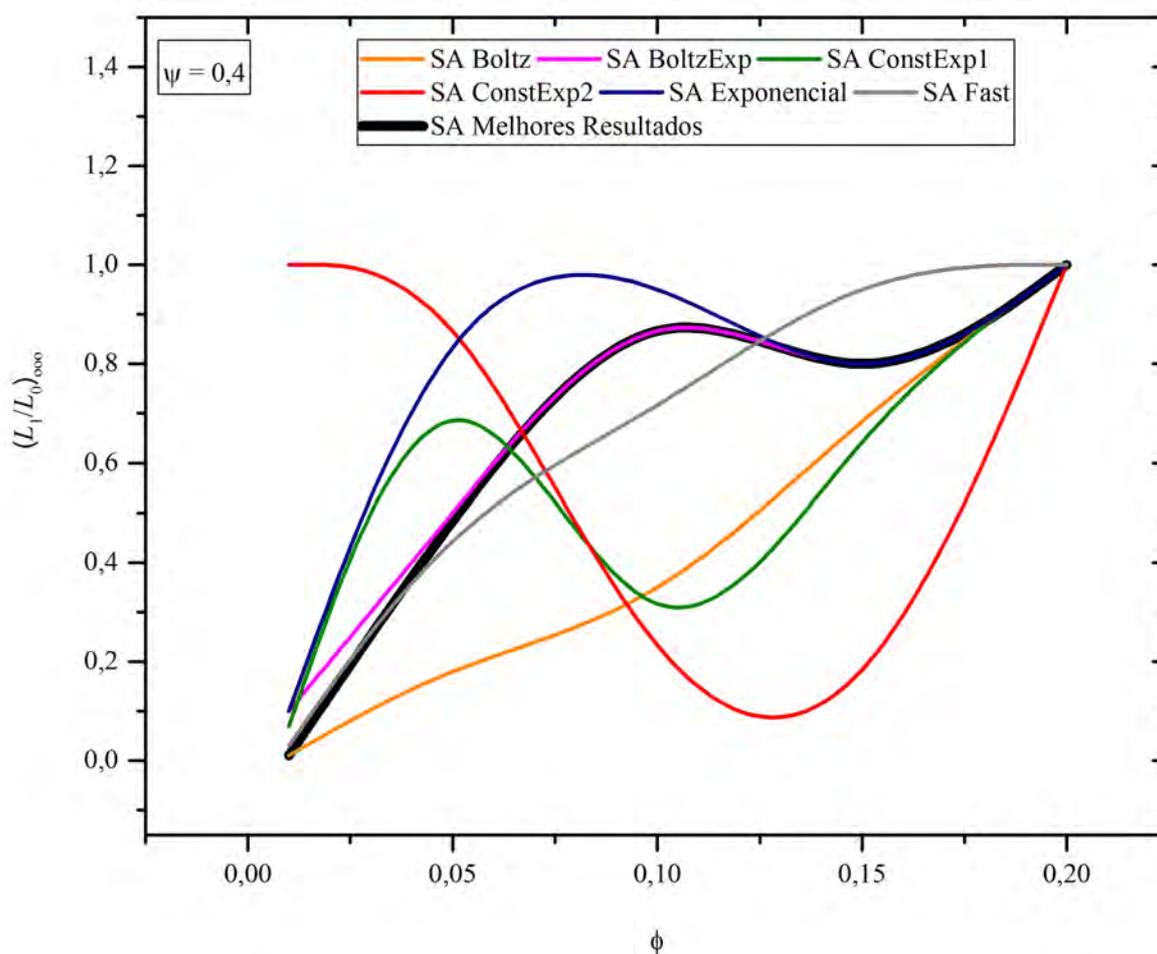


Figura A.3. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{\text{ooo}}$ para $\psi = 0,4$

É importante citar que a convergência para os valores ótimos de cada grau de liberdade, isoladamente nos mesmos valores da geometria ótima completa não significa a garantia da melhor

configuração. Por exemplo, o modelo *BoltzExp* pode ter apresentado valores iguais aos que compreendem a configuração ótima para $(L_1/L_0)_{ooo}$. Porém, a obtenção de outros graus de liberdade distintos do obtido para a geometria ótima global podem conduzir a desempenhos térmicos significativamente inferiores. Neste caso, o mais importante é reproduzir adequadamente os graus de liberdade que possuam maior sensibilidade (ou influência) no desempenho térmico do problema. Até o momento, com os resultados analisados neste pesquisa, os graus de liberdade $(t_1/t_0)_{oo}$ e $(L_1/L_0)_{ooo}$ foram os que apresentaram as maiores distorções entre os resultados de cada versão do SA.

Quanto ao grau de liberdade t_1/t_0 , o incremento dos valores de ϕ fazem com que este DOF oscile entre 4 e 210. A razão de $(t_1/t_0)_{oo}$ que pertence à geometria com menores valores de $(\theta_{max})_{mmmm}$ está representada na Fig. A.4 pela curva na cor preta (SA Melhores Resultados). Entre os diferentes modelos de resfriamento, o efeito de ϕ sobre $(t_1/t_0)_{oo}$ dos modelos *ConstExp1* e *Boltz* apresentam uma tendência similar à compilação dos melhores resultados, exceto para $\phi = 0,1$ e $0,2$. Para $\phi = 0,1$ o modelo *ConstExp1* subestima consideravelmente a razão $(t_1/t_0)_{oo}$, enquanto que para $\phi = 0,2$ a razão de $(t_1/t_0)_{oo}$ é muito pequena na predição com o modelo *Boltz*. Os modelos *Fast* e *Exponencial* apresentaram resultados bastante discordantes em relação aos demais modelos de resfriamento.

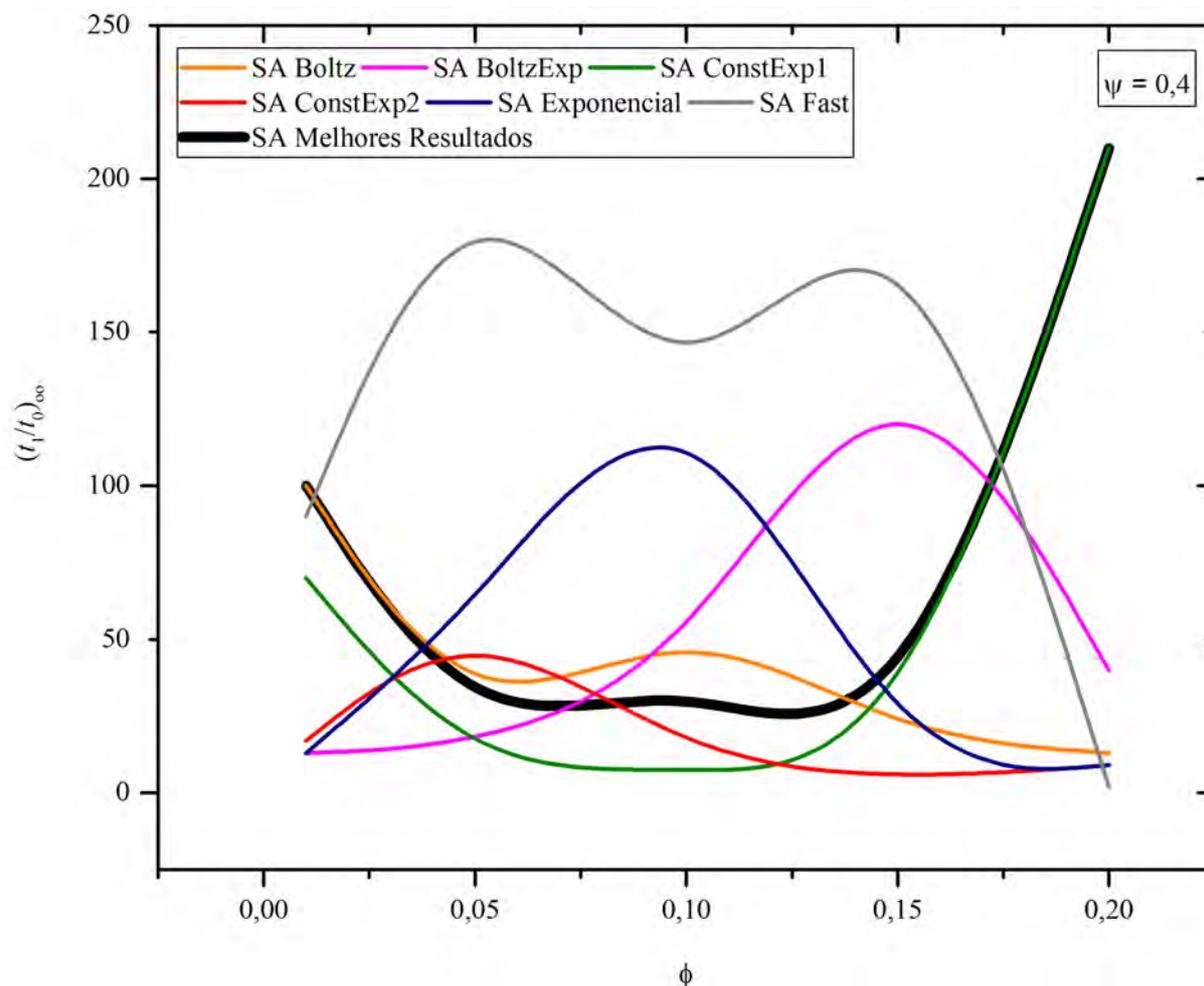


Figura A.4. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{\infty}$ para $\psi = 0,4$

A Figura A.5 apresenta as curvas formadas pelo efeito de ϕ ao grau de liberdade $(H/L)_o$ para cada versão do SA e uma curva na cor preta que reúne as melhores configurações deste DOF registradas por diferentes *cooling schedules*. Inicialmente, para $\phi = 0,01$, o SA com o modelo *Boltz* (SA *Boltz*) encontrou isoladamente a melhor configuração em $(H/L)_o = 20$. Porém, com o incremento de ϕ , são os modelos híbridos (*BoltzExp* e *ConstExp1*) que registram as razões geométricas mais próximas da geometria ótima. O *cooling schedule ConstExp1* é o que apresenta uma distorção menor em relação à curva dos melhores valores ("SA Melhores Resultados"), sendo também o único, em $\phi = 0,2$, o qual aponta o valor de $(H/L)_o$ que compõe a configuração ótima. Também é possível observar a dificuldade dos algoritmos em reproduzirem o efeito de ϕ sobre $(H/L)_o$ individualmente. Os algoritmos com modelos de *cooling schedules* híbridos reproduzem

melhor a tendência de $(H/L)_o$ em comparação aos demais.

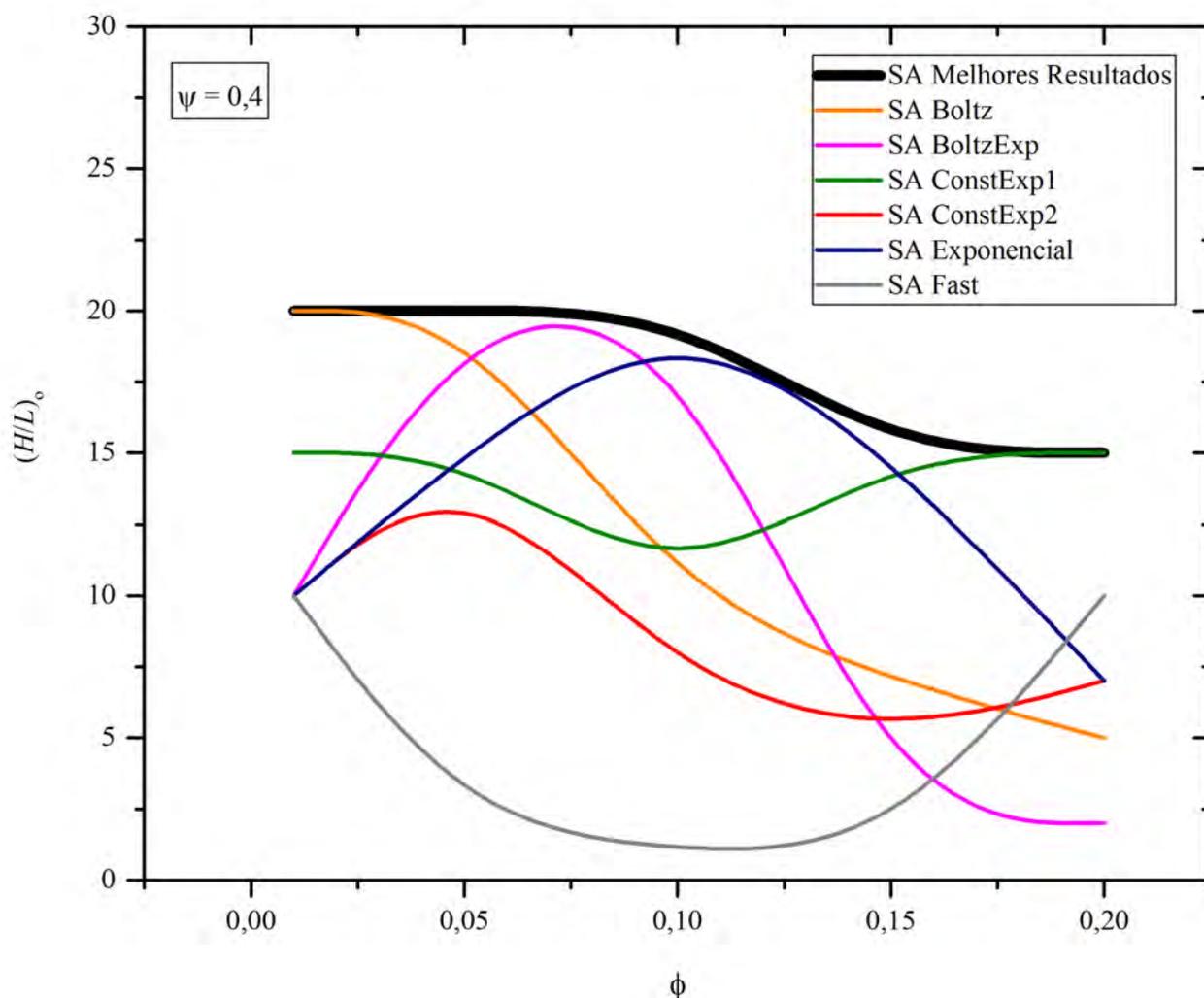


Figura A.5. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(H/L)_o$ para $\psi = 0,4$

No gráfico da Figura A.5 é possível observar que o SA com o *cooling schedule Fast* apresentou a maior distorção dos valores de $(H/L)_o$ em relação à curva que reproduz uma combinação dos melhores resultados (“SA Melhores Resultados”). Apresentando razões de $(H/L)_o$ distantes da curva dos melhores resultados, os valores de $(H/L)_o$ relatados pelo SA *Fast* não refletem as configurações geométricas que levam ao menor valor de $(\theta_{\max})_{\text{mmmmm}}$. De uma forma geral, o efeito de ϕ sobre $(H/L)_o$ é apenas parcialmente previsto pelos métodos individualmente. O algoritmo *Boltz* se destacou para os menores valores de ϕ , enquanto o método *ConstExp1* teve um melhor

comportamento para as maiores magnitudes de ϕ . Consequentemente, os resultados indicam que uma combinação de diferentes métodos conduz a estimativas mais adequadas.

Até o momento, pelos gráficos analisados através das Figuras 6.9 e 6.12, A.2 e A.5, é possível constatar que existe um intervalo de valores ótimos para os graus de liberdade H/L e α , assim como uma maior facilidade de convergência pelos algoritmos empregados, visto que apresentam menores distorções entre os resultados individuais. Diferentemente dos graus de liberdade H/L e α , os valores ótimos de t_1/t_0 e L_1/L_0 não apresentam um intervalo definido.

Quanto à influência de ϕ sobre o grau de liberdade $(H/L)_o$, percebe-se pelo gráfico apresentado na Figura A.5, que para ϕ maiores que 0,1, o valor de $(H/L)_o$ tende a cair do valor máximo 20 até estabilizar na razão igual a 15. Para $\psi = 0,3$ a razão ótima de H/L também apresentou uma tendência de queda com o aumento de ϕ . Porém, a temperatura máxima mínima $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ também aumentou consideravelmente. Para o caso $\psi = 0,4$, a leve queda em $(H/L)_o$ reflete apenas em um pequeno aumento de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ para $\phi = 0,15$. A Figura A.6 apresenta as geometrias ótimas encontradas através dos melhores resultados de cada versão do SA.

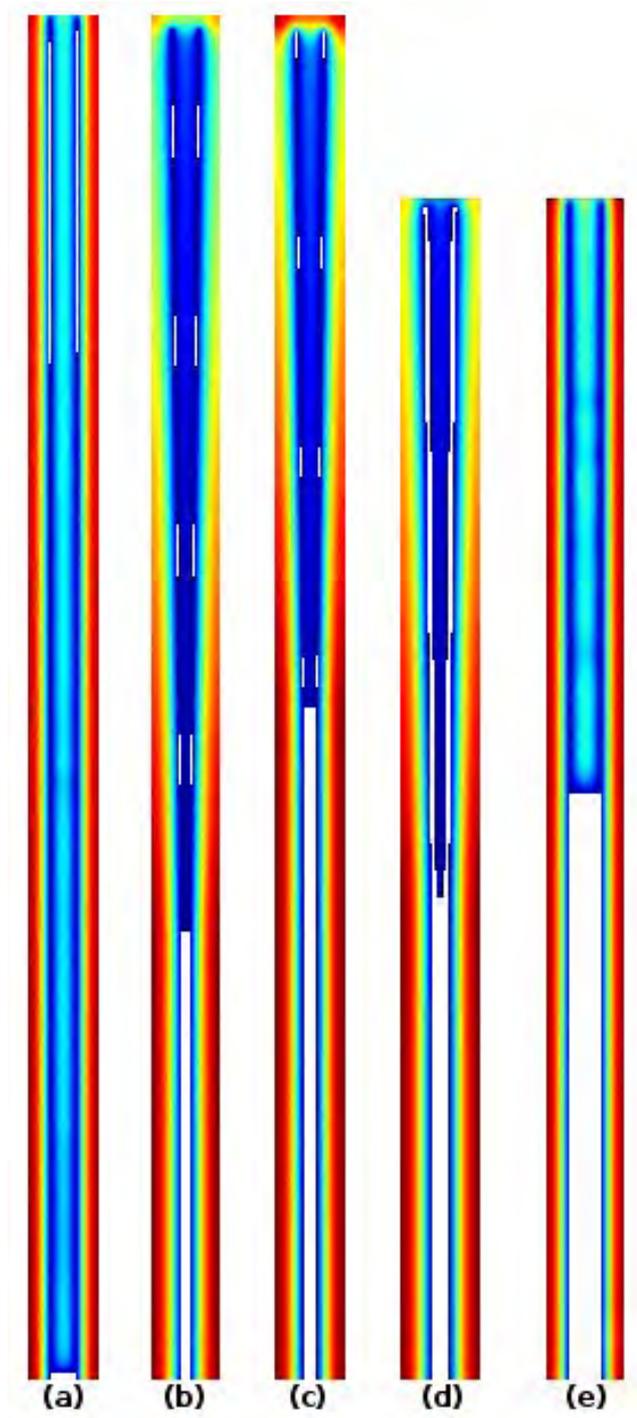


Figura A.6. Geometrias ótimas para $\psi = 0,4$:

- (a) $\phi = 0,01$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 100$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,007$; $(\alpha)_{oooo} = 1,57$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00249$ (*Boltz*);
- (b) $\phi = 0,05$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 15$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,5$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00489$ (*BoltzExp*);
- (c) $\phi = 0,1$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 40$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00410$ (*BoltzExp*);
- (d) $\phi = 0,15$; $(H/L)_o = 15$; $(t_1/t_0)_{oo} = 4$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,7$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00515$ (*ConstExp1*);
- (e) $\phi = 0,2$; $(H/L)_o = 15$; $(t_1/t_0)_{oo} = 210$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,57$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00308$ (*ConstExp1*).

Através das geometrias apresentadas nas Figs. A.6 (a) - (e) é possível notar a maior influência dos graus de liberdade H/L e α , como um intervalo de valores ótimos entre 20 e 15 para $(H/L)_o$ e 1,56 a 1,57 para $(\alpha)_{oooo}$. Os *cooling schedule* híbridos *BoltzExp* e *ConstExp1* foram os modelos que mais vezes registraram geometrias ótimas com temperaturas menores que os demais modelos de resfriamento do SA. A Figura A.7 apresenta a comparação entre a geometria ótima encontrada pelo SA com o *cooling schedule Fast* e a geometria encontrada pelo modelo híbrido *BoltzExp*, com $(\theta_{max})_{mmmm}$ quatorze vezes menor que o registrado pelo primeiro algoritmo.

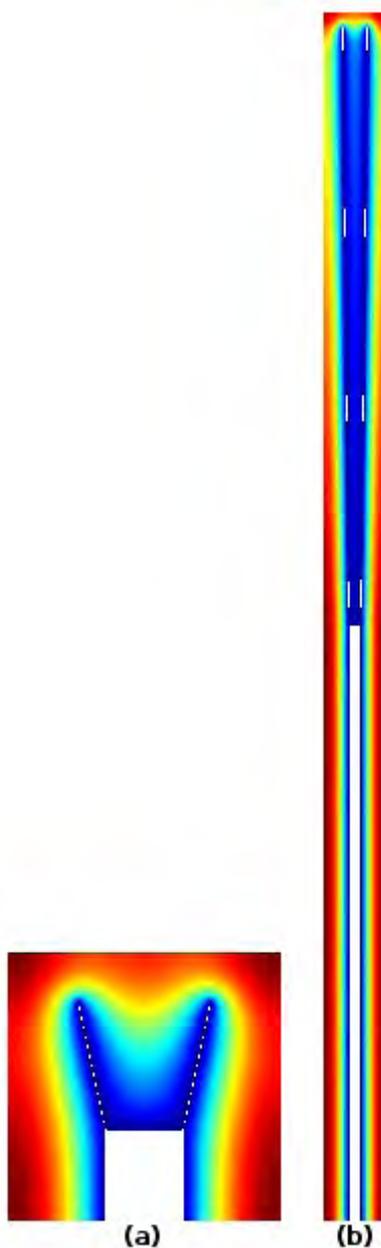


Figura A.7. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,4$ e $\phi = 0,1$:

(a) SA *Fast*, $(\theta_{max})_{mmmm} = 0,6075$; **(b)** SA *BoltzExp*, $(\theta_{max})_{mmmm} = 0,00410$.

A Tabela A.2 revela os resultados da otimização completa da cavidade em Y, com a restrição referente à fração da área auxiliar $\psi = 0,5$. Aqui também são apresentados os resultados das diferentes versões do SA para cada valor da restrição ϕ investigado. Através da Tabela A.2 nota-se que o *cooling schedule Boltz* foi eficaz em vários valores de ϕ ($\phi = 0,01$; $0,05$ e $0,1$). Para o caso com $\phi = 0,05$, apesar do método *Boltz* ter requerido mais iterações (2269) do que os demais *cooling schedules*, foi alcançada a geometria ótima. Além disso, para $\phi = 0,15$ o algoritmo *Boltz* também conduziu a estimativa da geometria ótima, requerendo mais iterações que o método *BoltzExp*. Os modelos híbridos também tiveram um comportamento regular e satisfatório, visto que para quase todos os valores de ϕ alguns dos métodos propostos encontrou o mínimo $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$. O modelo *Boltz*, mesmo encontrando os pontos ótimos em três dos cinco casos analisados, não apresenta tanta regularidade, pois em $\phi = 0,2$, apresenta o pior resultado em comparação aos demais. Também é interessante notar neste experimento, que o modelo *Fast* segue a tendência de convergir para configurações muito distantes das regiões ótimas, apresentando configurações que o classificam como o pior resultado em quatro das cinco situações possíveis. O modelo *Exponencial* também apresentou dificuldades na obtenção de geometrias ótimas.

Tabela A.2. Resultados da otimização completa da cavidade em Y aplicando o SA com vários *Cooling Schedules* para $\psi = 0,5$

$\psi = 0,5 \setminus$ RESTRIÇÕES	GRAUS DE LIBERDADE				$(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$	SIMULATED ANNEALING	
	$(H/L)_0$	$(t_1/t_0)_{00}$	$(L_1/L_0)_{000}$	$(\alpha)_{0000}$		Cooling Schedule	Iterações
0,01	20	60	0,070	1,56	0,00502408	Boltz	1846
-	20	60	0,070	1,56	0,00502408	ConstExp1	2021
-	20	60	0,070	1,56	0,00502408	ConstExp2	2335
-	20	50	0,070	1,56	0,00510463	BoltzExp	2299
-	15	18	0,300	1,55	0,00785320	Fast	1204
-	10	80	0,007	1,56	0,02960420	Exponencial	1236
0,05	20	30	0,300	1,56	0,00421848	Boltz	2269
-	20	5	0,100	1,56	0,00496121	ConstExp1	1296
-	20	50	1,000	1,55	0,00512482	ConstExp2	1315
-	20	50	1,000	1,55	0,00512482	Exponencial	1736
-	10	70	0,300	1,55	0,00797556	BoltzExp	1248
-	0,2	170	0,100	1,50	0,09610595	Fast	1001
0,10	20	11	0,500	1,56	0,00379777	Boltz	1550
-	20	11	0,500	1,56	0,00379777	ConstExp1	2813
-	15	180	0,500	1,56	0,00415612	BoltzExp	2181
-	15	110	1,000	1,55	0,00541578	Exponencial	1078
-	15	4	0,700	1,55	0,00614530	ConstExp2	1761
-	10	15	0,500	1,55	0,00719556	Fast	2387
0,15	20	60	1,000	1,56	0,00314659	BoltzExp	1420
-	20	60	1,000	1,56	0,00314659	Boltz	1682
-	20	60	1,000	1,56	0,00314659	ConstExp1	2020
-	15	18	0,700	1,56	0,00388176	ConstExp2	1386
-	15	4	1,000	1,55	0,00533656	Exponencial	1397
-	7	10	0,300	1,56	0,00703382	Fast	1971
0,20	20	5	1,000	1,56	0,00320041	ConstExp2	1273
-	20	5	1,000	1,56	0,00320041	BoltzExp	2409
-	10	10	0,700	1,56	0,00487528	Exponencial	1203
-	5	5	0,010	1,57	0,00779293	ConstExp1	1508
-	5	4	0,002	1,56	0,00850385	Fast	1357
-	2	180	0,700	1,56	0,01643860	Boltz	1239

A Figura A.8 apresenta a influência de ϕ sobre o valor de temperatura máxima quatro vezes minimizado $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$. Nesta figura é possível observar com mais precisão o desempenho de cada algoritmo estudado assim como a comparação com o AG (Lorenzini et al. 2014a). O *cooling schedule Boltz* obteve o melhor desempenho nas menores razões de ϕ , visto que encontrou as geometrias ótimas globais com o menor número de iterações. Para $\phi = 0,05$, o modelo de resfriamento *Boltz* encontrou isoladamente a geometria ótima com o menor valor de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$. Porém, para $\phi = 0,2$ os resultados obtidos com o *Boltz* foram os mais divergentes. Neste caso os *cooling schedules* híbridos *BoltzExp* e *ConstExp2*, encontraram a menor magnitude de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$. O modelo *Fast*, sendo a pior versão do SA, registrou valores de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ mais altas que as temperaturas dos melhores resultados do SA e dos resultados do AG (Lorenzini et al. 2014a). Para $\phi = 0,05$, os resultados obtidos com o método *Fast* foram muito discrepantes. Com relação ao efeito

de ϕ sobre $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$, é possível observar que há uma tendência de decréscimo de $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ com o aumento de ϕ o que é intuitivamente esperado, visto que a área da cavidade em Y está aumentando. Nenhum dos modelos testados obteve em todos os valores de ϕ investigados a geometria ótima e o efeito de ϕ sobre $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ é reproduzido apenas parcialmente pelos modelos individualmente em determinadas regiões de ϕ . Dessa forma, os resultados indicam que o uso de combinações de algoritmos de busca parece ser a solução mais indicada para recomendações geométricas em problemas de cavidades avaliadas geometricamente com o *Constructal Design*. Vale destacar que um dos propósitos do *Constructal Design* é avaliar o efeito das geometrias sobre o desempenho dos sistemas de fluxo. Dessa forma é recomendado que o algoritmo de otimização (ou combinação de algoritmos) seja capaz não somente de obter geometrias ótimas, mas de estimar o efeito das geometrias sobre a função objetivo.

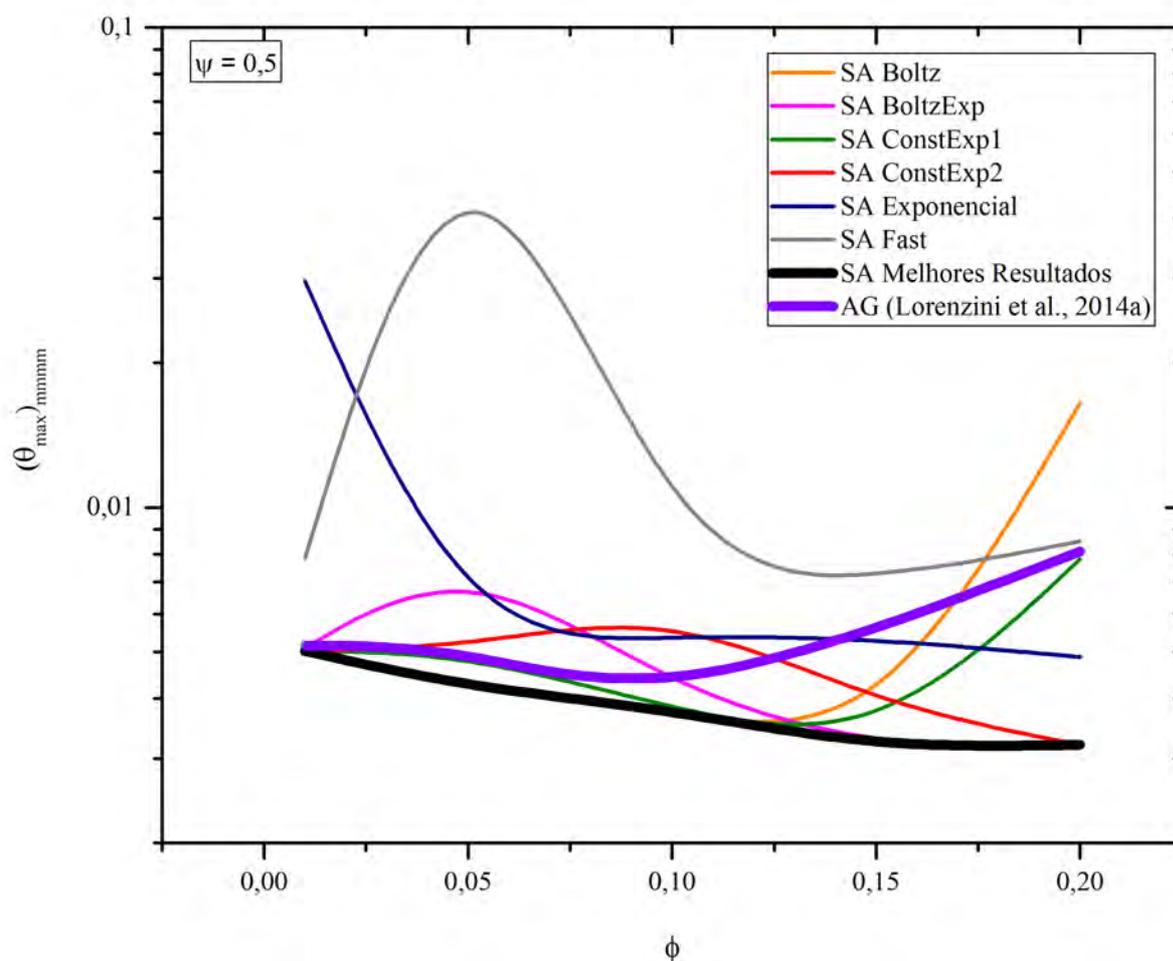


Figura A.8. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ para $\psi = 0,5$

A Figura A.9 apresenta a otimização do grau de liberdade $(\alpha)_{\text{oooo}}$ para os diferentes valores de

ϕ estudados. O gráfico da Fig. A.9 deixa claro que $(\alpha)_{\text{oooo}}$ é insensível ao aumento da restrição de área da cavidade ϕ . Para todos os valores de ϕ a geometria ótima global foi obtida para $(\alpha)_{\text{oooo}} = 1,56$. Algumas variações apareceram para diferentes versões do SA, ou seja, o algoritmo SA configurado com diferentes *cooling schedules*, porém ainda no intervalo ou na região ótima de 1,55 a 1,57. O parâmetro de resfriamento do SA *Boltz*, neste caso, se sobressaiu aos demais pois foi o único que registrou o mesmo valor de $(\alpha)_{\text{oooo}}$ para todos os casos analisados. Os resultados obtidos com modelo de resfriamento *Boltz* não significam que este encontrou a geometria ótima para todos os valores de ϕ , mas apenas que ele conseguiu convergir para o valor α que faz parte dos graus de liberdade que compõem a geometria ótima. No gráfico anterior, Figura A.8, é possível notar que para $\phi = 0,2$ o *cooling schedule Boltz* não encontra a geometria ótima, ao contrário, ele apresenta a geometria com a maior temperatura para $(\theta_{\text{max}})_{\text{mmmm}}$ entre todos os algoritmos estudados.

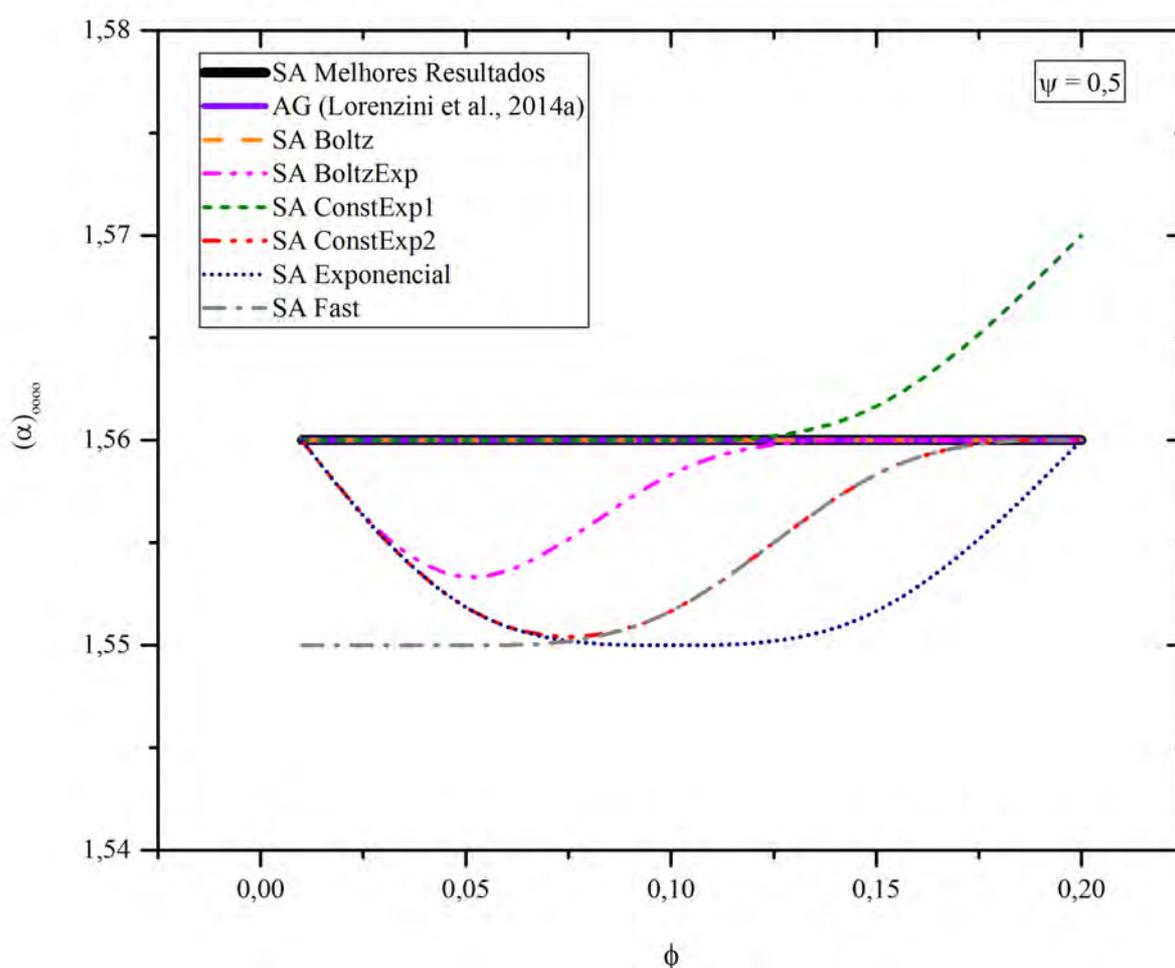


Figura A.9. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\alpha)_{\text{oooo}}$ para $\psi = 0,5$

A Figura A.10 apresenta os resultados das diferentes versões do SA e do AG (Lorenzini et al., 2014a) em relação à influência da variação de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{000}$. De acordo com os resultados da Fig. A.10 a razão de $(L_1/L_0)_{000}$ cresce proporcionalmente ao incremento de ϕ para os melhores resultados entre as diferentes versões do SA. O AG apresenta resultados concordantes com a curva de combinação dos melhores resultados, com exceção para $\phi = 0,05$ onde os valores de $(L_1/L_0)_{000}$ encontrados foram discordantes. A Fig. A.10 apresenta diferenças entre os resultados individuais de cada variação do SA. O *cooling schedule* híbrido *ConstExp2* apresenta uma grande semelhança aos resultados do AG, enquanto os modelos *ConstExp1* e *Fast* divergem de forma acentuada em $\phi = 0,2$. As versões do SA com os modelos de resfriamento *Boltz* e *BoltzExp* alcançam em todos os valores de ϕ analisados as configurações de $(L_1/L_0)_{000}$ que apontam para as geometrias ótimas com o menor excesso de temperatura $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$, acompanhando o gráfico dos melhores resultados entre as diferentes versões do SA (“SA Melhores Resultados”).

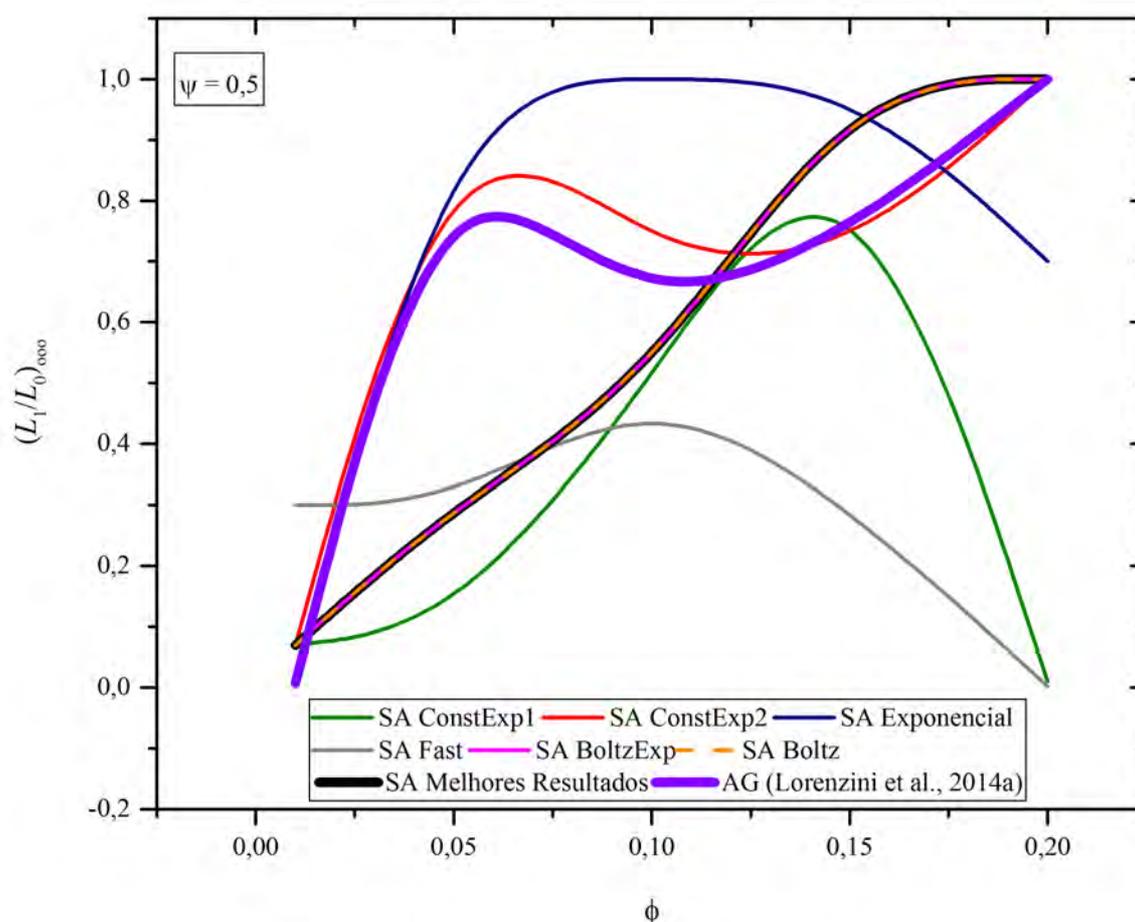


Figura A.10. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{000}$ para $\psi = 0,5$

A Figura A.11 apresenta o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade duas vezes otimizado $(t_1/t_0)_{oo}$, assim como a comparação dos resultados entre o SA e os resultados do AG obtidos por Lorenzini et al. (2014a). O gráfico dos melhores resultados entre as diferentes variações do SA e o gráfico dos resultados do AG, apresentam valores próximos, principalmente para $\phi \geq 0,05$. Com relação aos resultados individuais de cada versão do SA, os algoritmos *BoltzExp* e *Exponencial* apresentam comportamentos sensivelmente discrepantes. Os modelos híbridos *ConstExp1* e *ConstExp2*, assim como o *Fast*, possuem alguma semelhança ou com os resultados do AG ou com os melhores pontos do SA. Por outro lado, o modelo *Boltz* determinou os melhores resultados até $\phi = 0,1$. Porém, a partir desse valor, seu resultado foi bem divergente em relação os demais. Curiosamente, quase todos os algoritmos de busca atingiram razões ótimas de $(t_1/t_0)_{oo}$ para $\phi = 0,2$ com exceção do *Boltz*, que era o melhor para menores razões de ϕ . De uma forma geral, há uma tendência na diminuição de $(t_1/t_0)_{oo}$ com o aumento de ϕ , ou seja, a diferença de espessura entre o ramo simples e os ramos bifurcados é diminuída com o aumento da fração de área ocupada pela cavidade.

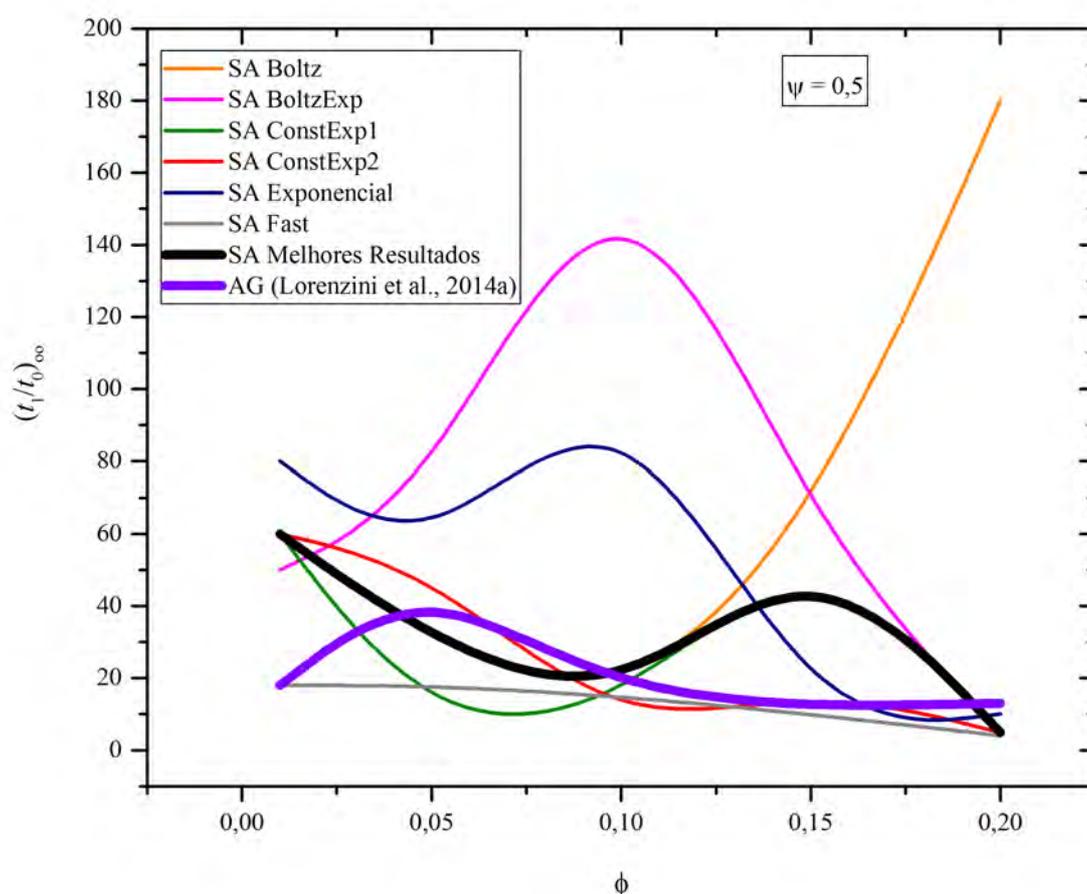


Figura A.11. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{oo}$ para $\psi = 0,5$

A Figura A.12 demonstra a comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com diferentes parâmetros de *cooling schedule* para os efeitos de ϕ sobre o grau de liberdade ótimo $(H/L)_o$. As melhores geometrias encontradas pelas diferentes versões do SA possuem uma razão ótima constante de $(H/L)_o = 20$, representada pela curva em preto (“SA Melhores Resultados”) na Fig. A.12. Verifica-se novamente aqui que as geometrias ótimas da cavidade em Y possuem razões de $(H/L)_o \geq 15$. Assim, acredita-se que essa tendência se repita para $\psi = 0,6$.

O *cooling schedule Fast* foi o único a não registrar algum ponto pertencente aos melhores resultados relatados na Fig. A.12. Os resultados apresentados até o momento descartam o uso do algoritmo *Fast* para a otimização geométrica de cavidades inseridas em sólidos com geração de calor. Quanto aos demais modelos de resfriamento, nenhum apresentou algum padrão regularmente próximo aos melhores resultados. Apenas os *cooling schedules BoltzExp* e *ConstExp1* foram os que mais registraram razões ótimas de $(H/L)_o = 20$. Porém em $\phi = 0,2$, a versão SA *ConstExp1* apresenta resultados muito diferentes da região ótima de $15 \leq (H/L)_o \leq 20$. Nesta figura não é possível concluir qual versão do SA foi mais eficaz, porém o conjunto dos melhores resultados traz a constatação de que o $(H/L)_o$ é insensível a variação de ϕ .

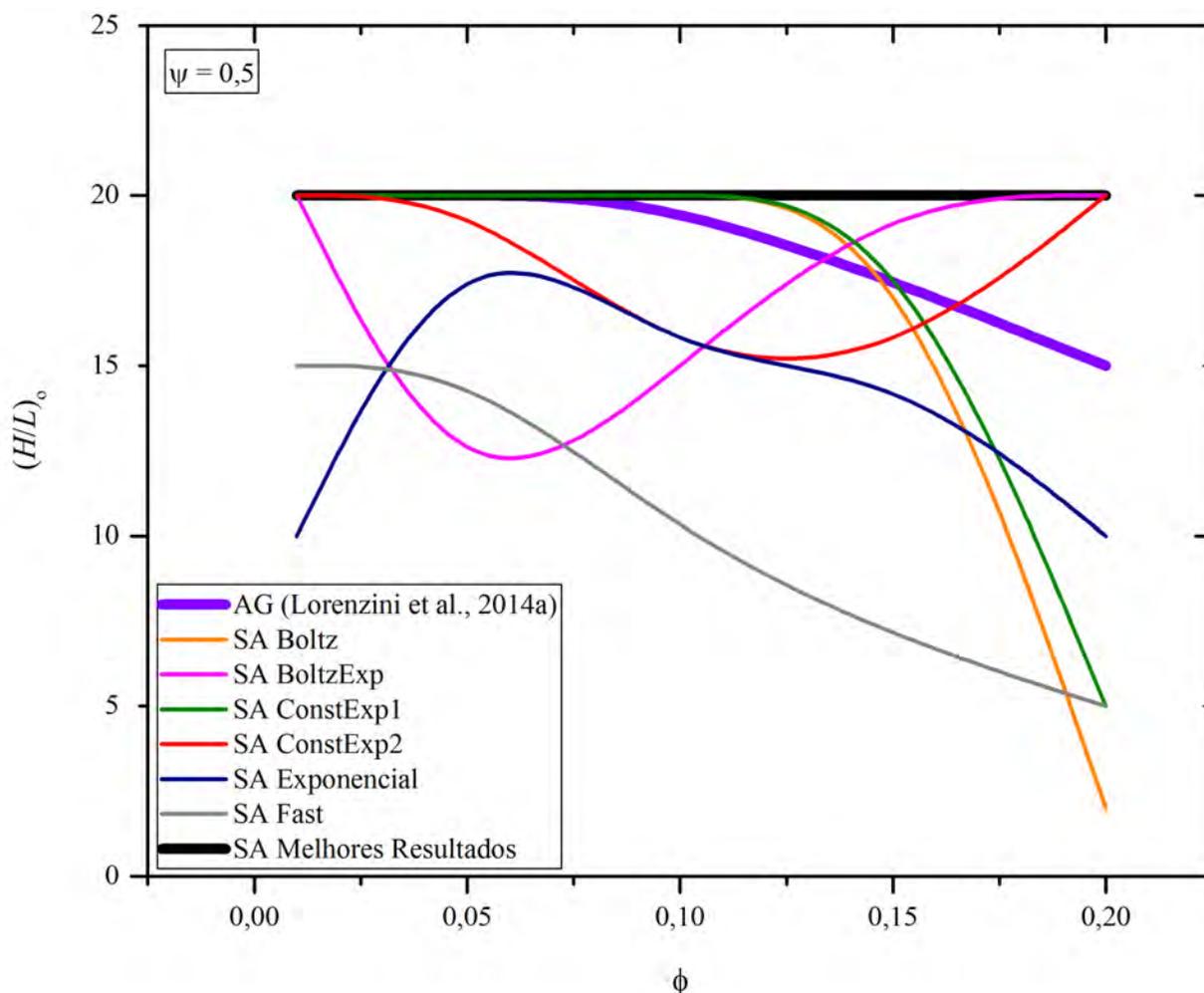


Figura A.12. Comparação entre o AG (Lorenzini et al., 2014a) e o SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(H/L)_0$ para $\psi = 0,5$

Ainda sobre a Figura A.12, os resultados do AG (Lorenzini et al., 2014a), são iguais aos melhores resultados das variações do SA, exceto no caso em que ϕ é igual a 0,2. Contudo, cabe destacar que o efeito de ϕ sobre $(H/L)_0$ foi representado de forma mais aproximada pelo algoritmo AG do que pelos algoritmos SA individualmente.

As geometrias apresentadas pela Fig. A.13 apresentam dois graus de liberdade com razões comuns entre todos os diferentes valores de ϕ estudados. Esta característica foi apresentada previamente nas Figs. A.9 e A.12, ou seja, para $\psi = 0,5$ a variação de ϕ é insensível na determinação das razões $(H/L)_0$ e $(\alpha)_{000}$. Os graus de liberdade diretamente influenciados pela variação de ϕ são $(t_1/t_0)_{00}$ (que decai com o aumento de ϕ) e $(L_1/L_0)_{000}$ (que aumenta de acordo com o incremento de ϕ). A Figura A.14 ilustra para $\psi = 0,5$ e $\phi = 0,05$ como a influência do tipo de

algoritmo de otimização e de razões geométricas específicas podem afetar a geometria ótima proposta. Na Figura A.14(a), por exemplo, é apresentada uma geometria ótima local obtida com o algoritmo *Fast*, enquanto a Fig. A.14(b) ilustra uma geometria ótima local obtida com o algoritmo *BoltzExp* e a Fig. A.14(c) apresenta a geometria ótima obtida com o método *Boltz*. É possível verificar que mesmo com variações pequenas de $(L_1/L_0)_{ooo}$ e $(\alpha)_{ooo}$ entre o algoritmo *Fast* e os demais, o desvio encontrado em $(H/L)_o$ e $(t_1/t_0)_{oo}$ conduziu a geometrias muito discrepantes. Consequentemente, a predição inadequada de um grau de liberdade apenas pode conduzir a recomendações inadequadas para as geometrias.

A Figura A.15 compara as geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,5$ e $\phi = 0,2$. Mesmo apresentando a melhor geometria para os três primeiros valores de ϕ estudados, o SA *Boltz* registrou o pior valor de $(\theta_{max})_{mmmm}$ para $\phi = 0,2$, como pode ser observado na Fig. A.15(a). A Fig. A.15(b) mostra o campo de temperatura mínimo obtido com o AG (Lorenzini et al., 2014). Este campo aparenta possuir um domínio com menor temperatura do que o apresentado na Fig. A.15(c) (*ConstExp2*). Porém, o ponto de temperatura máxima quatro vezes minimizada encontrada pelo AG (Fig. A.15(b)), é mais de duas vezes maior do que o ponto com excesso de temperatura relatado pelo algoritmo SA com o *cooling schedule ConstExp2* (Fig. A.15(c)). De acordo com o princípio Constructal da “Ótima Distribuição das Imperfeições” isso ocorre pois a cavidade da Fig. A.15(c) distribui os pontos de máxima temperatura ao longo de uma região maior do domínio sólido, enquanto na Fig. A.15(b) há uma concentração calor na região superior do sólido.

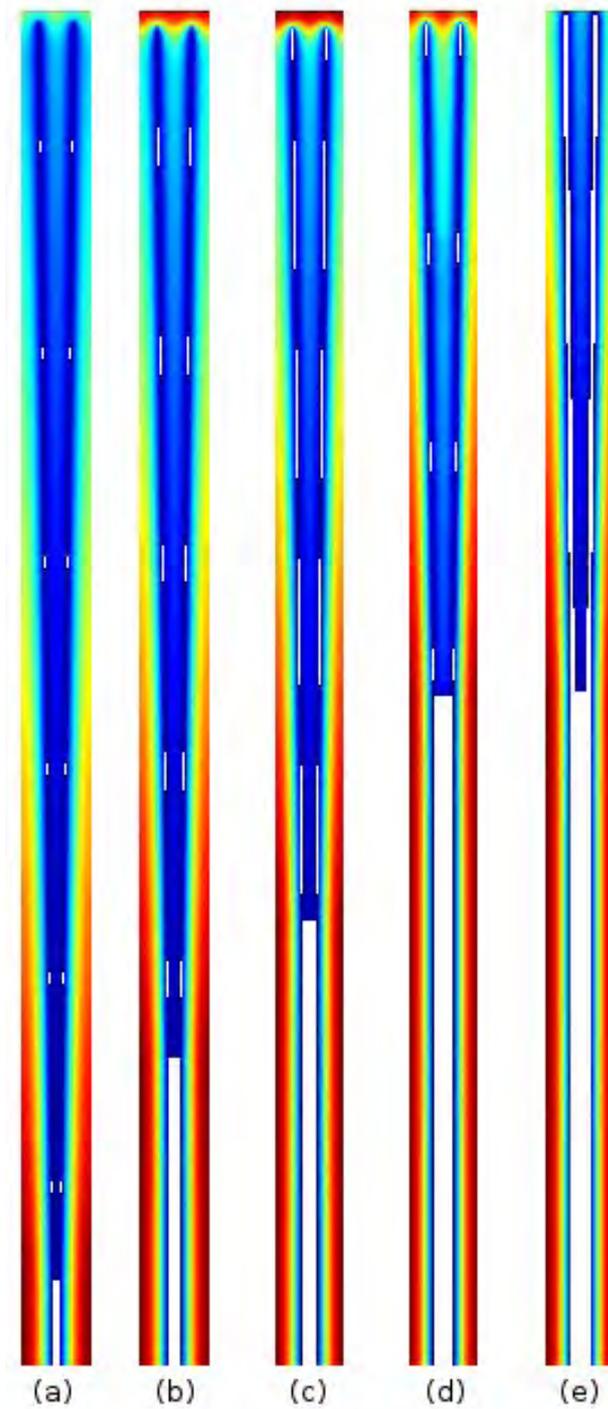


Figura A.13. Geometrias ótimas para $\psi = 0.5$:

- (a) $\phi = 0,01$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 60$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,07$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{m\text{m}\text{m}\text{m}} = 0,00502$ (*Boltz*);
- (b) $\phi = 0,05$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 30$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,3$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{m\text{m}\text{m}\text{m}} = 0,00421$ (*Boltz*);
- (c) $\phi = 0,1$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 11$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,5$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{m\text{m}\text{m}\text{m}} = 0,00379$ (*Boltz*);
- (d) $\phi = 0,15$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 60$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{m\text{m}\text{m}\text{m}} = 0,00314$ (*BoltzExp*);
- (e) $\phi = 0,2$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 5$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{m\text{m}\text{m}\text{m}} = 0,0032$ (*ConstExp2*).

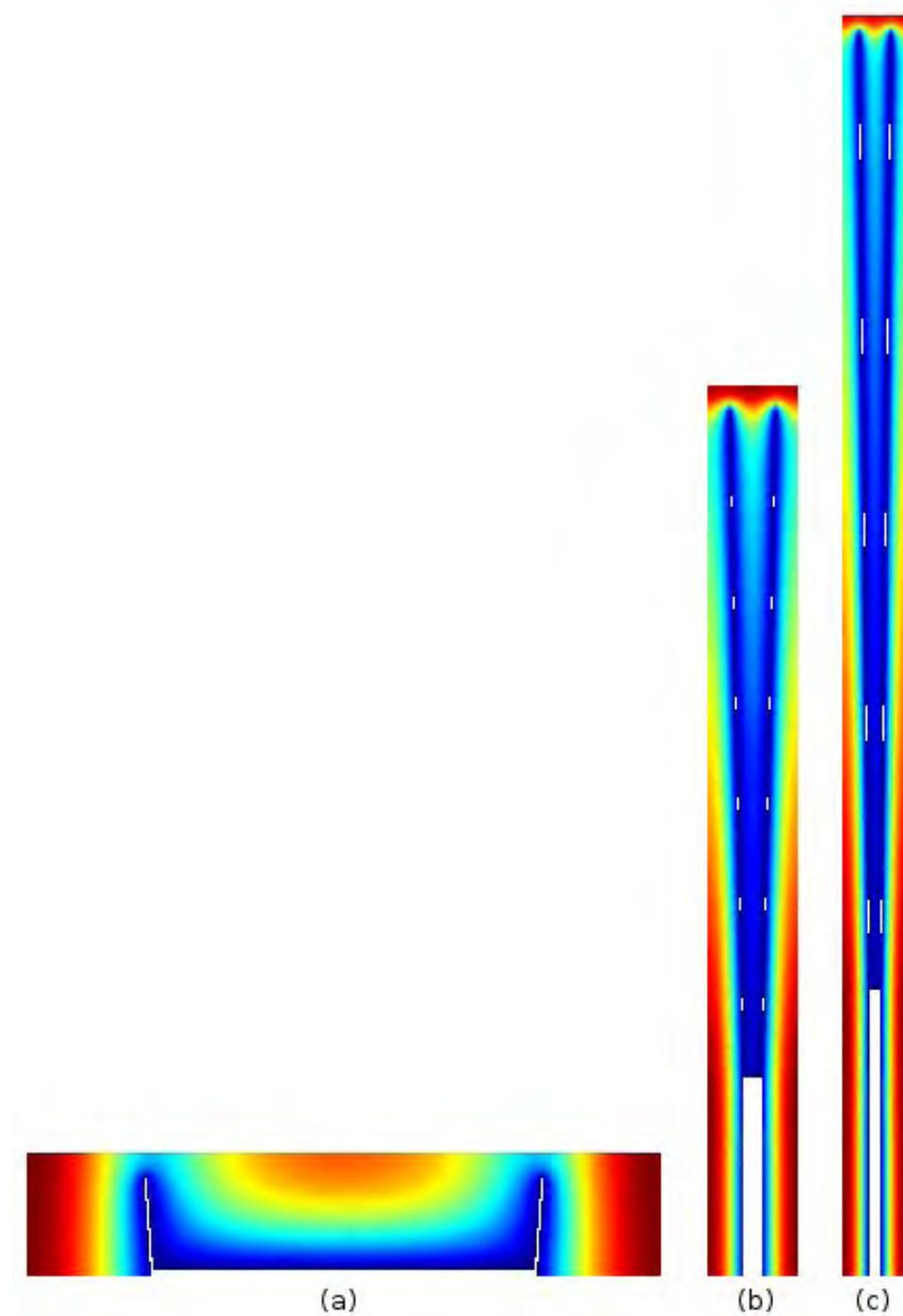


Figura A.14. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,5$ e $\phi = 0,05$:

- (a)** SA *Fast*; $(H/L)_o = 0,2$; $(t_1/t_0)_{oo} = 170$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,50$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,0961$;
(b) SA *BoltzExp*; $(H/L)_o = 10$; $(t_1/t_0)_{oo} = 70$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,3$; $(\alpha)_{oooo} = 1,55$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00797$;
(c) SA *Boltz*; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 30$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,3$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00421$.

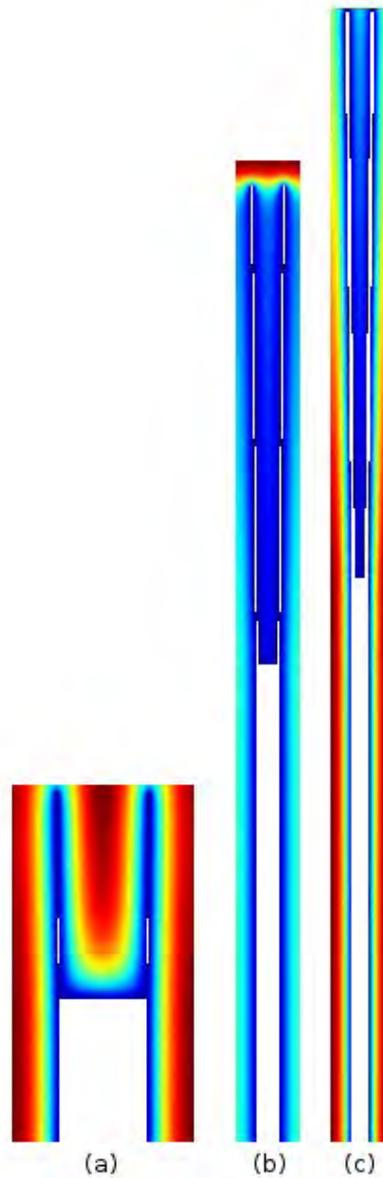


Figura A.15. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,5$ e $\phi = 0,2$:

- (a)** SA Boltz; $(H/L)_o = 2$; $(t_1/t_0)_{oo} = 180$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,7$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,0164$;
(b) AG (Lorenzini et al., 2014^a); $(H/L)_o = 15$; $(t_1/t_0)_{oo} = 13$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$;
 $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,0081$; **(c)** SA ConstExp2; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 5$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$;
 $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,0032$.

A Tabela A.3 apresenta os resultados da otimização completa da cavidade em Y para a restrição de área auxiliar $\psi = 0,6$ combinada com cinco diferentes valores para a restrição de área da cavidade ($\phi = 0,01$; $0,05$; $0,1$; $0,15$ e $0,2$). Os resultados da otimização para $\psi = 0,6$, mostram que

os *cooling schedules* híbridos (*ConstExp1*, *ConstExp2* e *BoltzExp*) encontram com maior frequência as geometrias ótimas que geram os menores valores de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$, e quando estas versões do SA não encontram as menores temperaturas ($\phi = 0,15$ e $0,2$), alcançam valores muito próximos. É interessante notar nos resultados da Tabela A.3 que o modelo de resfriamento *Fast*, obteve bons resultados para $\phi = 0,05$ e $\phi = 0,1$, porém este desempenho não é recorrente se comparado com os resultados anteriores deste modelo. Existe a possibilidade do algoritmo SA com o parâmetro *Fast* encontrar as geometrias ótimas, mas como apresentam os resultados da seção 6.1.3, essa possibilidade é bem menor do que os demais *cooling schedules*.

Tabela A.3. Resultados da otimização completa da cavidade em Y aplicando o SA com vários *Cooling Schedules* para $\psi = 0,6$

$\psi = 0,6 \setminus$ RESTRIÇÕES	GRAUS DE LIBERDADE				$(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$	SIMULATED ANNEALING	
	$(H/L)_o$	$(t_1/t_0)_{oo}$	$(L_1/L_0)_{ooo}$	$(\omega)_{ooo}$		Cooling Schedule	Iterações
0,01	15	80	0,010	1,56	0,00414842	ConstExp2	1926
-	15	20	0,100	1,55	0,00744007	Exponencial	1942
-	10	50	0,007	1,55	0,01093830	Boltz	1036
-	7	40	0,003	1,54	0,01114010	ConstExp1	1641
-	2	90	0,010	1,49	0,02538410	Fast	2087
-	2	80	0,010	1,48	0,02827470	BoltzExp	1072
0,05	20	13	0,100	1,56	0,00382405	ConstExp2	2408
-	20	13	0,100	1,56	0,00382405	Fast	2603
-	10	9	0,020	1,55	0,00758983	Exponencial	1249
-	7	20	0,010	1,56	0,00879071	ConstExp1	1165
-	5	17	0,010	1,55	0,00889789	BoltzExp	1335
-	10	13	0,300	1,54	0,00916053	Boltz	1512
0,10	20	11	0,300	1,56	0,00334155	BoltzExp	2877
-	20	110	1,000	1,55	0,00404618	Fast	2918
-	20	4	0,050	1,56	0,00409670	ConstExp1	2290
-	10	12	0,100	1,56	0,00631822	ConstExp2	1416
-	10	12	0,100	1,56	0,00631822	Exponencial	1477
-	7	9	0,100	1,55	0,00766936	Boltz	1123
0,15	20	80	0,700	1,56	0,00266439	Boltz	1601
-	20	80	0,700	1,56	0,00266439	BoltzExp	1729
-	20	80	0,700	1,56	0,00266439	ConstExp2	2258
-	20	160	0,700	1,56	0,00346004	ConstExp1	1432
-	10	11	0,500	1,55	0,00559049	Exponencial	1978
-	2	220	0,700	1,46	0,02472460	Fast	1814
0,20	20	60	1,000	1,56	0,00239417	Exponencial	1066
-	20	60	1,000	1,56	0,00239417	BoltzExp	2447
-	20	180	0,500	1,57	0,00262291	ConstExp1	1436
-	10	13	0,500	1,56	0,00385125	Boltz	1170
-	7	20	0,500	1,56	0,00534045	Fast	2381
-	7	80	1,000	1,54	0,00662388	ConstExp2	1688

A Figura A.16 apresenta o efeito de ϕ sobre $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ para os resultados de cada versão do SA, ou seja, configurado com diferentes *cooling schedules*. A Fig. A.16 também revela um gráfico reunindo os melhores resultados entre todas as versões do SA avaliadas, representando as

geometrias que geraram os menores valores de $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ para cada restrição de ϕ estudada (“SA Melhores Resultados”).

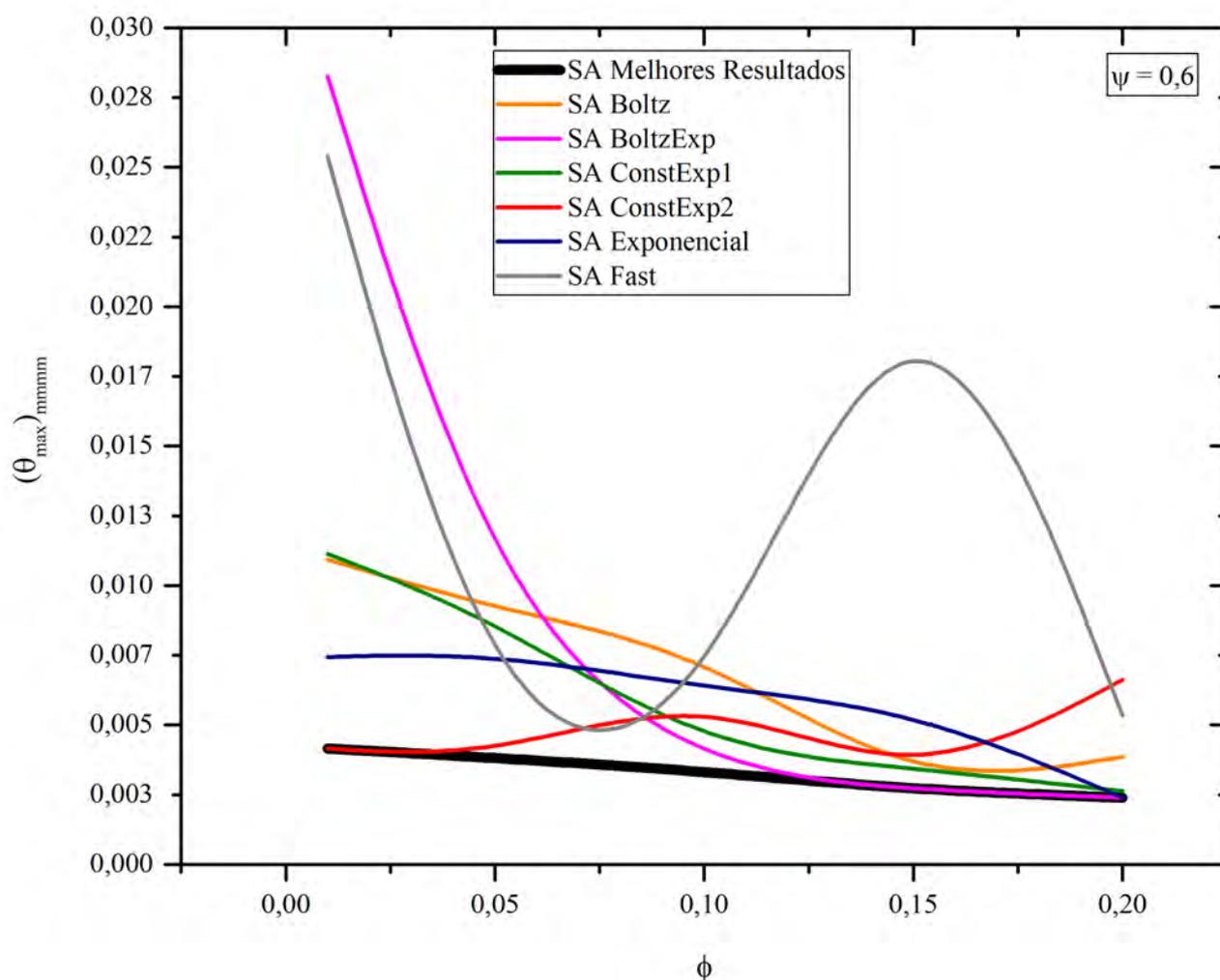


Figura A.16. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* em relação ao efeito de ϕ sobre $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ para $\psi = 0,6$

De acordo com o gráfico dos melhores resultados da Fig. A.16 é possível observar a influência de ϕ sobre a $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$, sendo vista uma queda de $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ com o incremento e ϕ . Esta tendência também pode ser visualizada em alguns resultados individuais, como o SA *BoltzExp*, o qual apresenta a maior temperatura em $\phi = 0,01$ e depois converge para os valores mínimos globais de $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ a partir de $\phi = 0,1$. O *cooling schedule Fast* é o que apresenta a maior variação dos valores de $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ em relação aos valores dos melhores resultados. Mesmo registrando a temperatura mínima em $\phi = 0,05$, para $\phi = 0,15$ apresenta um valor de $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ até nove vezes maior do que o menor valor de $(\theta_{\max})_{\text{mnmnm}}$ encontrado com SA. Em todos os casos analisados, para

as combinações de ψ e ϕ , o modelo *Fast* é o único que não conseguiu registrar valores ótimos com o menor número de simulação entre todas as versões do SA.

O efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\alpha)_{0000}$ é revelado através Fig. A.17, onde estão representados os resultados de todas as versões do SA estudadas, assim como a representação dos melhores resultados pela curva preta (“SA Melhores Resultados”). Semelhantemente ao observado para $\psi = 0,5$, o ângulo α quatro vezes otimizado mantém-se constante em $(\alpha)_{0000} = 1,56$, independente de ϕ . Todos os resultados dos diferentes *cooling schedules* empregados apresentam valores próximos ao valor ótimo de $(\alpha)_{0000} = 1,56$ e em uma faixa de $1,55 \leq (\alpha)_{0000} \leq 1,57$. Em situações extremas valores de $(\alpha)_{0000} = 1,46$ e $1,48$ foram inadequadamente estimados pelos algoritmos *BoltzExp* e *Fast*. O SA com o parâmetro de resfriamento *BoltzExp* apresentou um resultado muito diferente da região ótima apenas para $\phi = 0,01$, sendo que nos demais casos o algoritmo registrou os valores concordantes com as geometrias ótimas encontradas na combinação de melhores resultados. O SA *Fast* também registrou o ângulo ótimo de $1,56$ em duas oportunidades, porém nos demais casos registrou valores distantes da região ótima, para $\phi = 0,01$ e $0,15$ os valores foram muito diferentes da região ótima, o que compromete a interpretação do efeito de ϕ sobre o $(\alpha)_{0000}$.

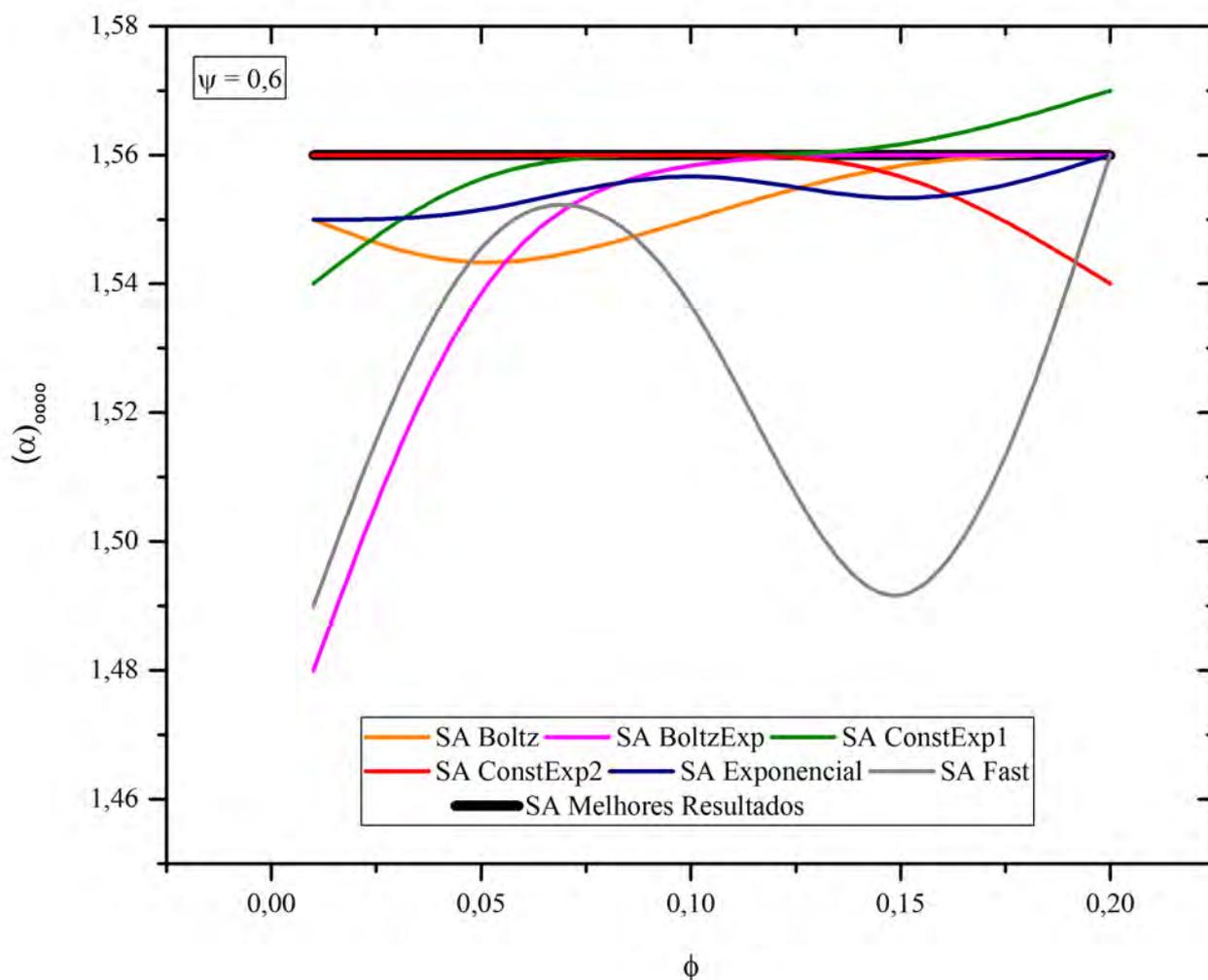


Figura A.17. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* para o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(\alpha)_{0000}$ para $\psi = 0,6$

A Figura A.18 apresenta o efeito de ϕ sobre o grau de liberdade L_1/L_0 para $\psi = 0,6$, o gráfico apresenta diferentes curvas para cada versão do SA e a curva preta para os melhores resultados entre todas as versões estudadas. A curva preta representa o valor de $(L_1/L_0)_{000}$ que pertence às geometrias ótimas as quais retornam os menores valores de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$. É possível verificar através dos resultados da Fig. A.18 que a razão de $(L_1/L_0)_{000}$ aumenta proporcionalmente ao incremento da restrição de área da cavidade ϕ . Para $\psi = 0,5$ igualmente observa-se o aumento de $(L_1/L_0)_{000}$ em relação à variação de ϕ , ao passo que para $\psi = 0,4$ e $0,3$, este aumento não é contínuo, apenas para os menores valores de ϕ .

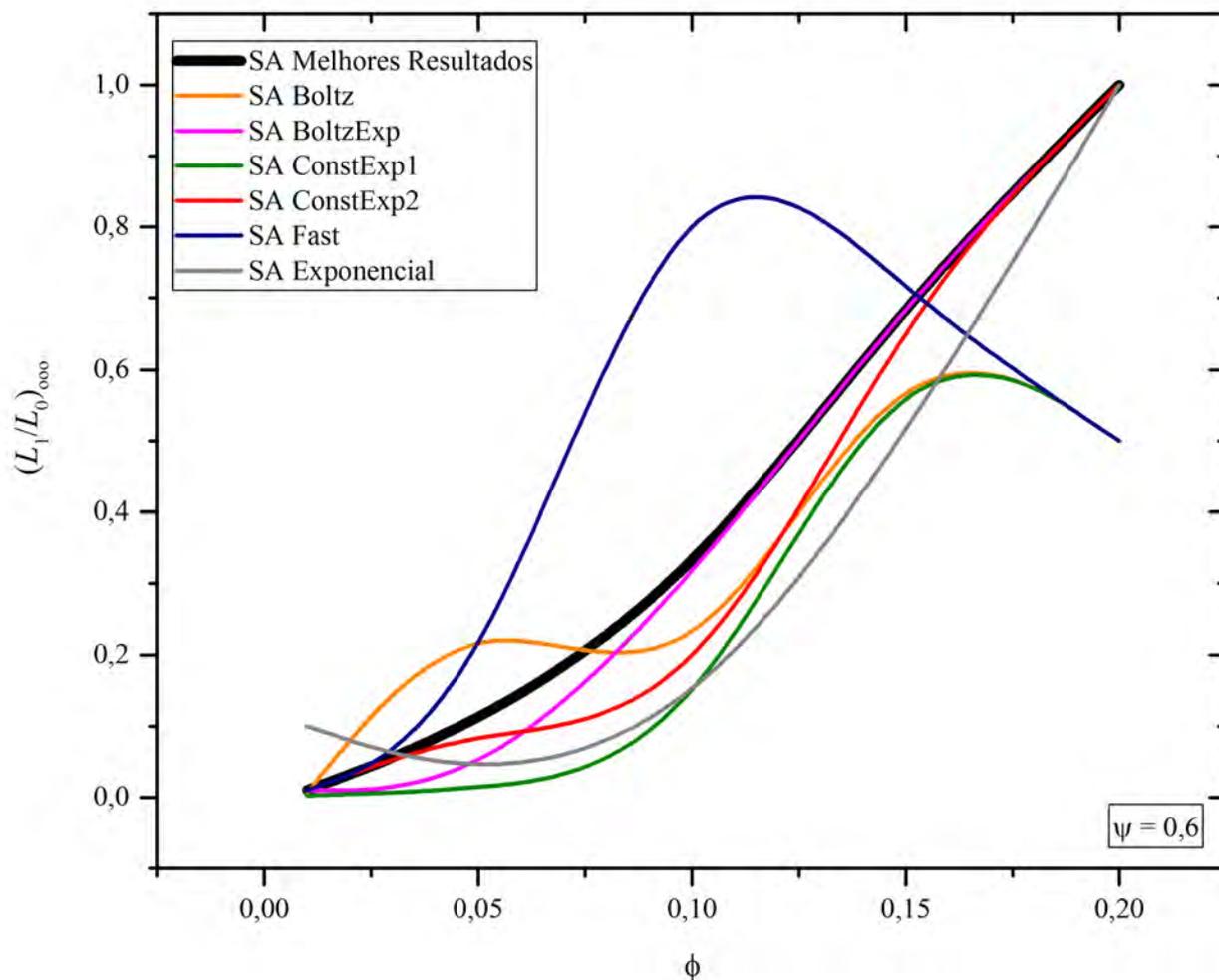


Figura A.18. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{ooo}$ para $\psi = 0,6$

A maioria das versões do SA apresentam em seus resultados para $\psi = 0,6$ o mesmo padrão de aumento da razão $(L_1/L_0)_{ooo}$ em função de ϕ . O único resultado que destoa dos demais é aquele relatado pelo algoritmo SA com o *cooling schedule Fast*. Assim como os resultados para o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{oo}$, Fig. A.19, os resultados do SA *Fast*, na Fig. A.18, geram uma grande distorção na interpretação dos efeitos de ϕ sobre o grau de liberdade $(L_1/L_0)_{ooo}$. Estes resultados enfraquecem a confiabilidade no algoritmo SA *Fast* para esse tipo de problema, visto que possuem grande dificuldade em atingir a máxima temperatura em excesso adimensional e também pela baixa probabilidade em alcançar geometrias ótimas, quando isso ocorre.

A Figura A.19 apresenta os gráficos do efeito de ϕ sobre o $(t_1/t_0)_{oo}$ para cada versão do SA e para os melhores resultados encontrados entre as diferentes versões (“SA Melhores Resultados”). A

partir dos resultados da Fig. A.19, é possível notar uma zona de convergência, ou a região ótima, para a maioria dos valores encontrados pelas diferentes versões do SA, principalmente para o intervalo de ϕ de 0,05 a 0,1. Antes e depois deste intervalo, também há uma região de valores ótimos, porém a divergência entre os resultados é mais acentuada. Por exemplo, em ϕ igual a 0,15 e 0,2, o SA com o modelo de resfriamento híbrido *ConstExp1*, relata valores distantes dos melhores resultados. O *cooling schedule Fast* também apresenta valores com considerável divergência em relação aos melhores resultados, principalmente em $\phi = 0,1$ e 0,15, mesmo apresentado bons resultados nos de mais valores de ϕ .

Em relação ao efeito do incremento de ϕ sobre o valor de $(t_1/t_0)_{\infty}$, é possível observar uma tendência de queda para os primeiros valores de ϕ e uma oscilação a partir de $\phi = 0,1$, pois a razão ótima é incrementada, mas logo cai novamente em $\phi = 0,2$. É importante observar o quanto são distorcidos os efeitos de ϕ nos resultados do SA com o *cooling schedule Fast*, evidenciando a relevância da investigação da melhor adequação dos parâmetros do SA ao *Constructal Design*.

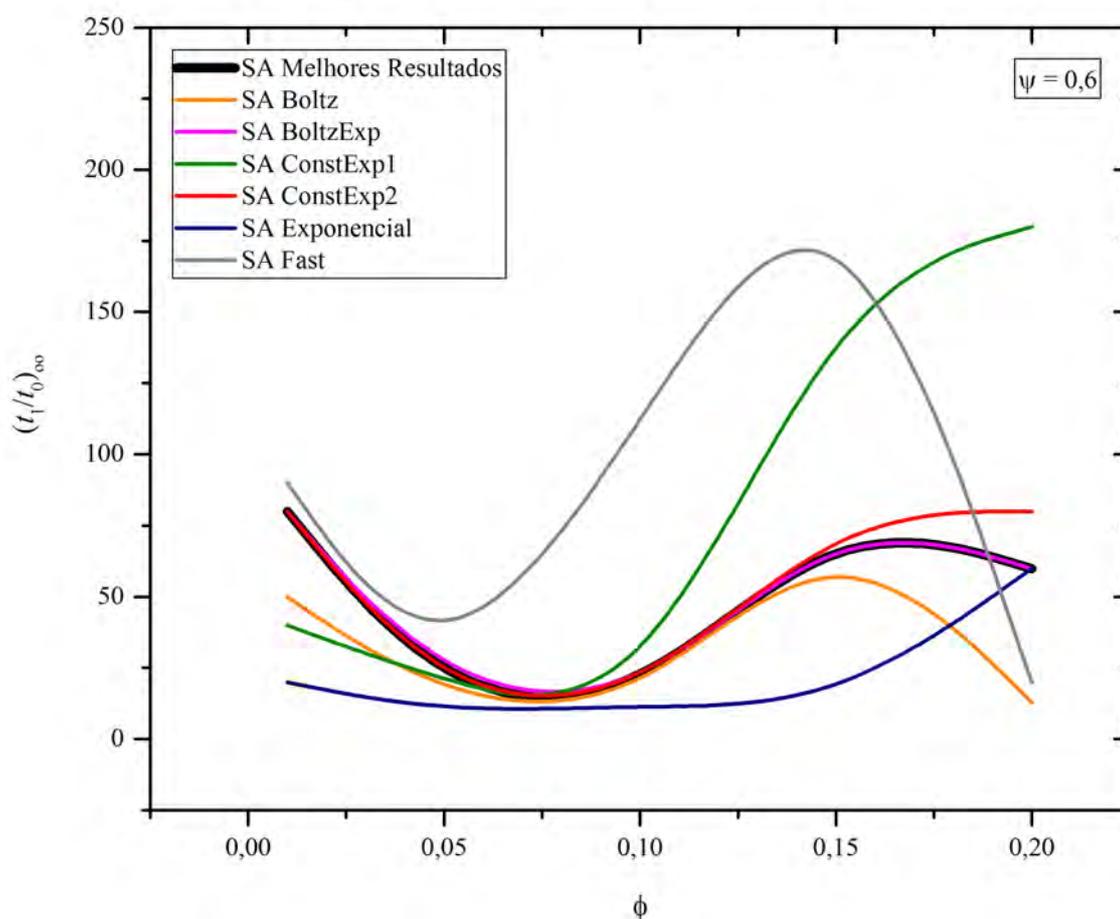


Figura A.19. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(t_1/t_0)_{\infty}$ para $\psi = 0,6$

A Figura A.20 apresenta o gráfico do efeito de ϕ sobre $(H/L)_o$ para $\psi = 0,6$. Através dos gráficos apresentados na Fig. A.20 é possível observar estimativas bastante divergentes entre os resultados das variações do SA, apenas a partir de $\phi = 0,1$, os *cooling schedules* *BoltzExp* e *ConstExp1* convergem para a curva dos melhores resultados, $(H/L)_o = 20$.

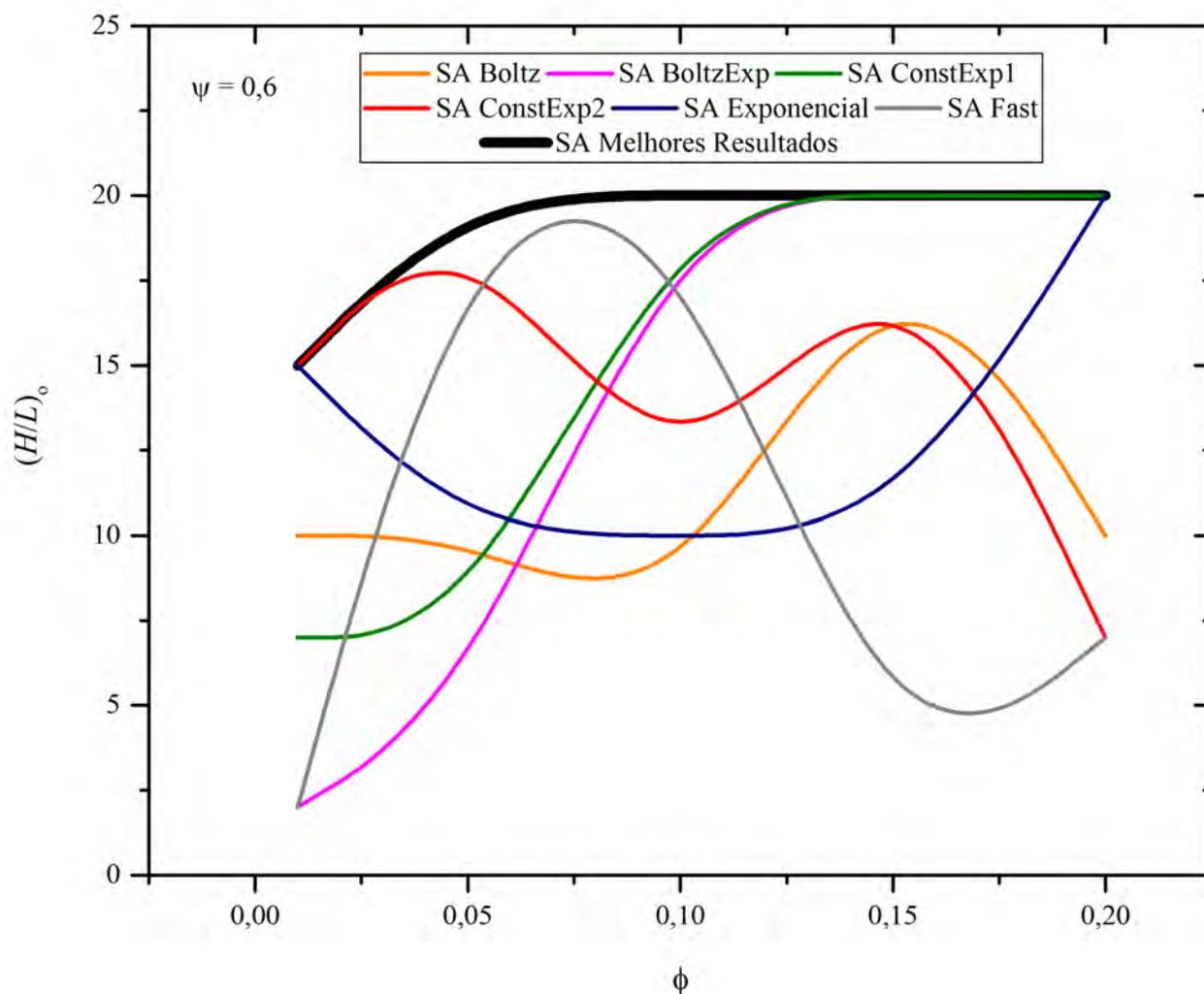


Figura A.20. Comparação entre os resultados do SA com vários *Cooling Schedules* em relação ao efeito de ϕ sobre o grau de liberdade $(H/L)_o$ para $\psi = 0,6$

Semelhante aos resultados para $\psi = 0,5$, a otimização completa para $\psi = 0,6$ também apresenta uma tendência de estagnação da razão $(H/L)_o$ em $(H/L)_o = 20$, não apresentando alteração com o incremento de ϕ . O intervalo ótimo, ou seja, a região com predominância de ótimos locais, é observada pela convergência à razão $(H/L)_o = 15$ em $\phi = 0,01$. A Figura A.21 mostra os campos de temperatura para as geometrias ótimas encontradas com $\psi = 0,6$.

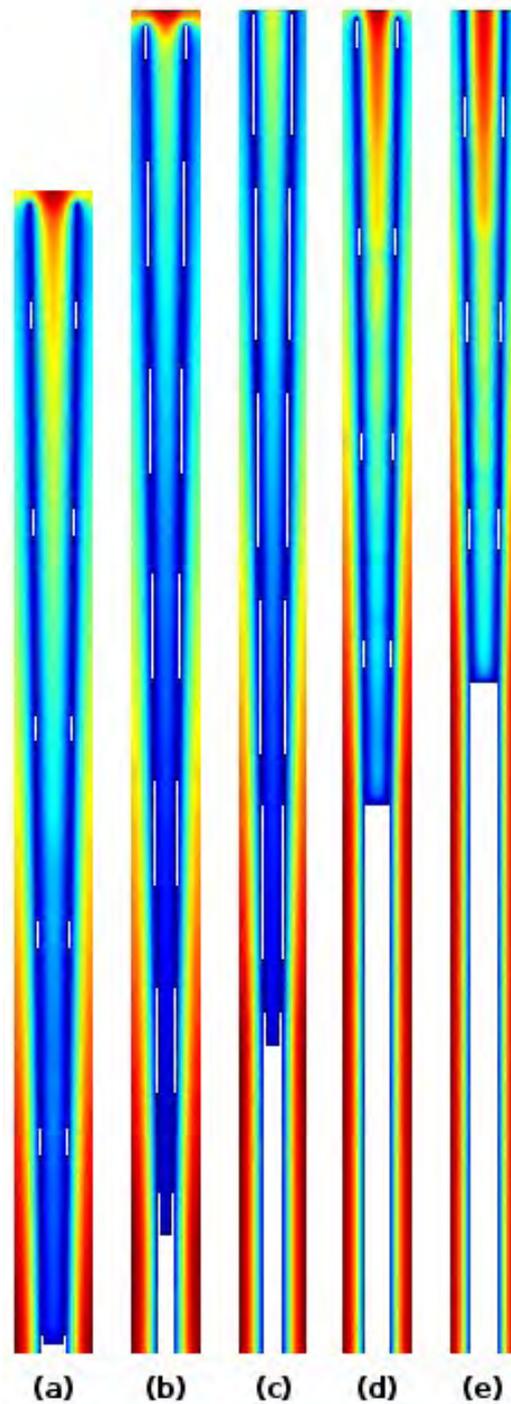


Figura A.21. Geometrias ótimas para $\psi = 0,6$:

- (a) $\phi = 0,01$; $(H/L)_o = 15$; $(t_1/t_0)_{oo} = 80$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,01$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00414$ (*ConstExp2*)
- (b) $\phi = 0,05$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 13$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00382$ (*ConstExp2*);
- (c) $\phi = 0,1$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 11$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,3$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00334$ (*BoltzExp*);
- (d) $\phi = 0,15$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 80$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,7$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00266$ (*Boltz*);
- (e) $\phi = 0,2$; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 60$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00239$ (*Exponencial*).

As geometrias presentes na Figura A.21 fazem parte dos melhores resultados encontrados entre as diferentes versões do SA, neste caso os modelos híbridos encontraram com mais frequência as geometrias ótimas. A Figura A.22 apresenta as comparações entre as geometrias ótimas encontradas pelas diferentes versões do SA. Com a razão de $(H/L)_o = 2$, Fig. A.22(a), o SA configurado com o *cooling schedule Fast*, registrou uma temperatura até nove vezes maior do que a melhor geometria encontrada pelos modelos *Boltz*, *BoltzExp* e *ConstExp2*, Fig. A.22(c).

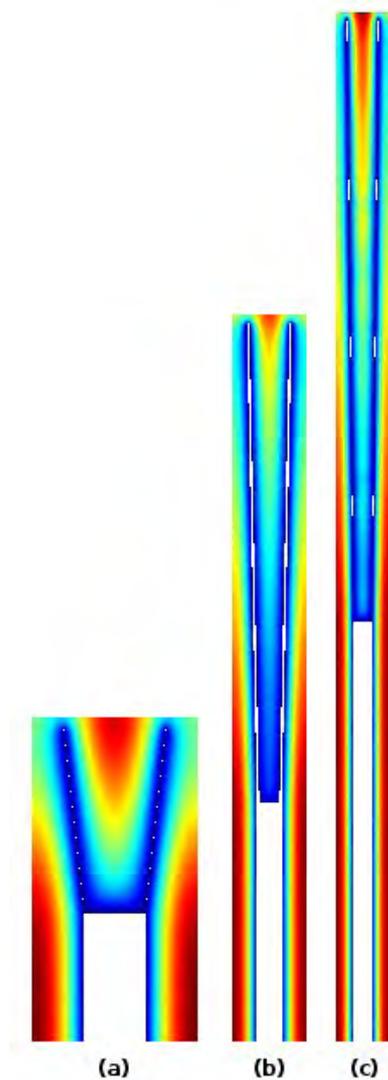


Figura A.22. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,6$ e $\phi = 0,15$:

- (a) SA *Fast*; $(H/L)_o = 2$; $(t_1/t_0)_{oo} = 220$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,7$; $(\alpha)_{oooo} = 1,46$; $(\theta_{max})_{mmmm} = 0,02472$;
 (b) SA *Exponencial*; $(H/L)_o = 10$; $(t_1/t_0)_{oo} = 11$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,5$; $(\alpha)_{oooo} = 1,55$; $(\theta_{max})_{mmmm} = 0,00559$;
 (c) SA *Boltz/BoltzExp/ConstExp2*; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 80$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,7$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$;
 $(\theta_{max})_{mmmm} = 0,00266$.

A Figura A.23 também compara as geometrias ótimas encontradas pelas versões do SA, neste caso para $\phi = 0,2$. A Fig. A.23(c) representa a geometria com o menor valor de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$, enquanto que a Fig. A.23(a) a geometria com o maior valor de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$ encontrado. Neste caso as geometrias encontradas pelas diferentes versões do SA não demonstraram diferenças muito acentuadas, visto que a maior temperatura é apenas três vezes maior que a menor registrada. Em todo o processo de otimização completa da cavidade em Y ficou claro a inferioridade do *cooling schedule Fast*, este que mais vezes registrou as piores geometrias com os maiores valores de $(\theta_{\max})_{\text{mmmm}}$. Porém, não houve uma metodologia específica de otimização (SA com vários *cooling schedules* ou AG) que conduzisse de forma universal às geometrias ótimas para o problema estudado. As geometrias ótimas globais só foram encontradas com a combinação dos melhores resultados de cada versão do SA, tanto híbridos (*BoltzExp*, *ConstExp1* e *ConstExp2*) quanto os padrões *Boltz* e *Exponencial*. Portanto, acredita-se que o uso de uma combinação de métodos de otimização seja o mais recomendado para obter as geometrias ótimas mais próximas da geometria ótima global, bem como para avaliar o efeito de restrições e graus de liberdade sobre o desempenho térmico do problema.

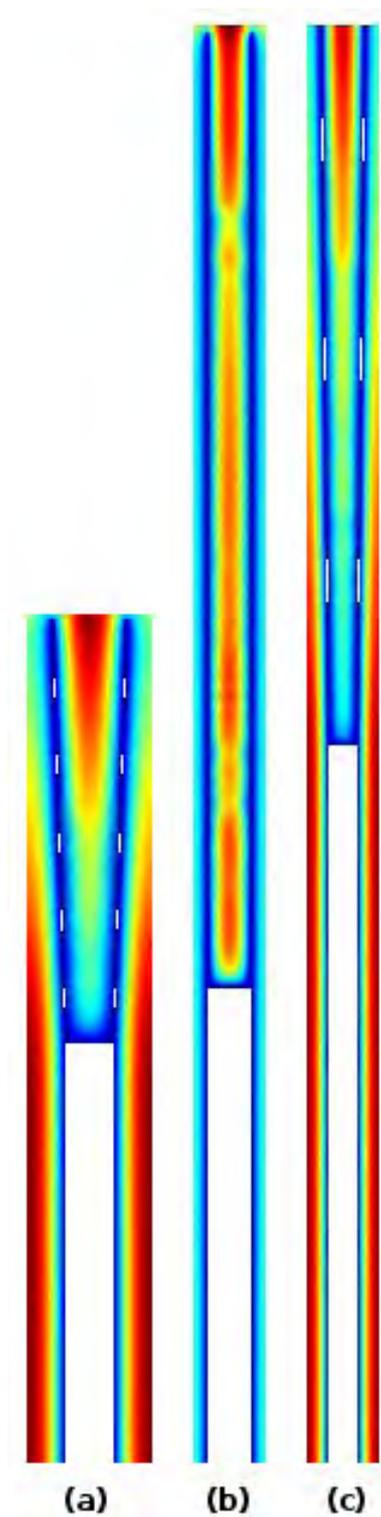


Figura A.23. Geometrias ótimas encontradas por diferentes algoritmos para $\psi = 0,6$ e $\phi = 0,2$:

(a) SA *ConstExp2*; $(H/L)_o = 7$; $(t_1/t_0)_{oo} = 80$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,54$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00662$;

(b) SA *ConstExp1*; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 180$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 0,5$; $(\alpha)_{oooo} = 1,57$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00262$;

(c) SA *Exponencial*; $(H/L)_o = 20$; $(t_1/t_0)_{oo} = 60$; $(L_1/L_0)_{ooo} = 1$; $(\alpha)_{oooo} = 1,56$; $(\theta_{\max})_{mmmm} = 0,00239$.

**ANEXO II – ARTIGO SOBRE A APLICAÇÃO DO SIMULATED ANNEALING NA
OTIMIZAÇÃO DA CAVIDADE EM Y APRESENTADO NO VI MCSUL**



Constructal Design and Simulated Annealing Employed for Geometric Optimization of a Y-Shaped Cavity Intruded into Conductive Wall

G. V. Gonzales^{1,*}; L. R. Emmendorfer¹; L. A. Isoldi¹; E. S. D. Estrada²; L. A. O. Rocha², E. D. dos Santos¹

¹Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC), Universidade Federal do Rio Grande (FURG), 96021-900, Rio Grande, Brasil.

²Department of Mechanical Engineering (DEMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 90050-170, Porto Alegre, Brasil.

*corresponding author: gillvelleda@gmail.com;

The problem study here is concerned with the geometrical evaluation of an isothermal Y-shaped cavity intruded into conducting solid wall with internal heat generation. The cavity acts as a sink of the heat generated into the solid. The main purpose here is to minimize the maximal excess of temperature (θ_{\max}) in the solid. Constructal Design, which is based on the objective and constraints principle, is employed to evaluate the geometries of Y-shaped cavity. Meanwhile, Simulated Annealing (SA) algorithm is employed as optimization method to seek for the best shapes. To validate the SA methodology, the results obtained with SA are compared with those achieved with Genetic Algorithm (GA) and Exhaustive Search (ES) in recent studies of literature. The comparison between the optimization methods (SA, GA and ES) showed that Simulated Annealing is highly effective in the search for the optimal shapes of the studied case.

Keywords: Constructal Theory, Simulated Annealing, Geometric Optimization, Heat Transfer.

1. INTRODUCTION

With the technological advancement of the industry and the miniaturization of the systems and electronics circuits, new needs and constraints emerged in heat transfer problems. The traditional methods for cooling of electronic devices do not comply with the actual scales required for their working. According to Bejan [1], the viable solution is the utilization of cooling ducts, cavities or high conductive pathways intruded in the medium with heat generation. The problem studied here is concerned with a solid wall with internal uniform heat generation which can be cooled solely by means of the isothermal Y-shaped cavity intruded into the wall. The present research employed Constructal Design method to guide the evaluation of geometrical shape of the cavity which minimizes the maximal excess of temperature (θ_{\max}) [2, 3]. The search for the optimal geometries is performed with the combinatorial optimization algorithm Simulated Annealing (SA) [4, 5].

Constructal Theory is the view that geometry patterns of flux systems in nature emerged by a physical principle, i.e., shape and structure generated in animate and inanimate systems are deterministic and not the result of random. Constructal Theory, proposed by Adrian Bejan [2,6], states that geometry in any flux systems follows the Constructal Law, which states that “*For a finite-size flow system to persist in time (to live), its configuration must evolve in such a way that provides easier access to the currents that flow through it*”. The form to employ Constructal Law for geometric evaluation of flux systems is the Constructal Design [2], which is a method based on objectives and restrictions used to minimize the imperfections of the

investigated systems. Recently, several C, T, Y-shaped cavities, as well as, complex and multiple cavities has been studied by means of Constructal Design, see Refs. [6 – 14].

In the study of Ref. [6] the geometry of C and T-shaped cavities intruded into a rectangular solid with internal heat generation was optimized. The T-shaped cavity has a higher performance than C-shaped one, i. e., the most complex cavity with a higher penetration in the solid domain had the best efficiency. In Ref. [14] it was applied Constructal Design to geometric optimization of a T-shaped cavity intruded into a trapezoidal solid domain with uniform heat generation. As performed in the previous study of Ref. [6] the external surfaces of solid domain are considered adiabatic. In Ref. [15] a complex T-Y-shaped cavity has been optimized and authors concluded that the complex cavity led to a thermal performance 108 % superior than that reached with a C-shaped configuration, for the same conditions and dimensions of the problem. Furthermore, in Ref. [8], the geometric optimization of a Y-shaped cavity demonstrated that this geometry has a performance nearly 109 % higher than that predicted with the elemental cavity.

The above mentioned studies allowed the observation that most complex geometries tend to conduct the flux system to the highest efficiencies. For the cavity problems, systems which minimizes the maximal excess of temperature. However, as more complex are the cavities more degrees of freedom they have and higher computational effort is required to solve the problem for all geometric possibilities and, consequently, find the optimal geometry. Recently, Refs. [12, 13] employed search algorithms to seek for the best shapes in alternative at conventional method of Exhaustive Search (ES), widely used in previous studies of cavities. In both studies it was applied Genetic Algorithm (GA) for the geometric optimization of Y-shaped cavity intruded into a solid with constant heat generation. Ref. [12] performed a comparison between GA and ES for optimization of isothermal cavities, while in Ref. [13] it was evaluated the effect of convective transfer in the cavity surfaces. Moreover, new recommendations for the best geometries are proposed for several ratios of H/L (ratio between height and length of solid domain) solely with the employment of GA. In both studies it was noted that the number of simulations required with GA are strongly reduced in comparison with that needed with ES.

The present work has the purpose to evaluate the combined use of combinatorial optimization algorithm Simulated Annealing (SA) together with Constructal Design to evaluate the Y-shaped cavity geometry. The physical problem investigated here is the same previously studied in Ref. [8] and [12]. In this sense, results emerged by application of SA is compared with those found in literature with GA and SA.

2. MATHEMATICAL MODEL

Figure 1 shows the computational domain of the studied problem. The Y-shaped cavity acts removing the heat generated by solid domain. The seek for the optimal geometry of the cavity is given by variation of the degrees of freedom: H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 and α . The Finite Element Method (FEM) is used to determine the temperature field inside the solid domain and the maximum temperature is collected. The best thermal performance of the system is obtained when the maximum temperature inside the solid domain is minimized.

The solid domain, gray region in Fig. 1, has a constant conductivity k . Moreover, the solid generates heat at a constant volumetric rate given by q''' ($\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$). The outer surfaces of the solid are adiabatic, i.e., perfectly insulated. The generated heat current ($q'''\cdot A$) is removed by the Y-shaped wall, which is maintained at a minimal temperature (T_{\min}). The minimal temperature in the cavity represents a large heat transfer coefficient in such way that convective resistance can be neglected in comparison with the solid conduction resistance. This hypothesis can be associated with a large class of examples where augmentation and compactness are required, such as in the cooling packages of small-scale electronics [16 – 17].

The main goal here is find the optimal geometric form (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α) which minimizes the maximum excess of temperature $(\theta_{\max} - \theta_{\min})/(q'''\cdot A)$.

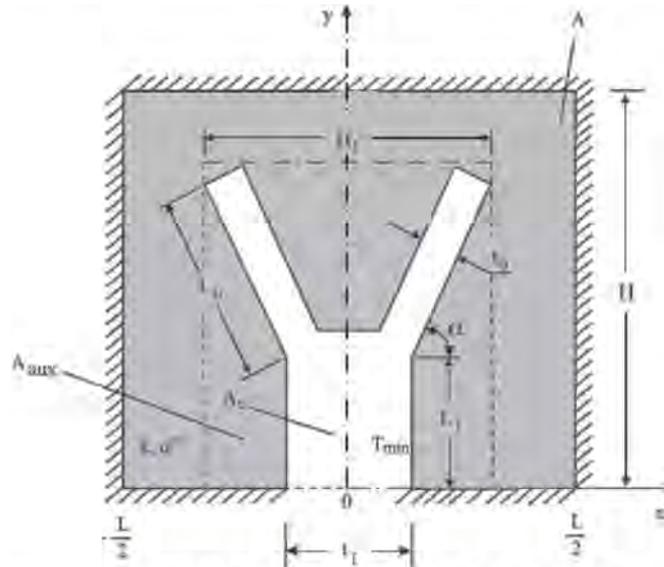


Figure 1: Computational Domain of Y-shaped cavity into a solid with internal heat generation.

According to Constructal Design method, this optimization must respect three constraints, total area of the solid, cavity area and auxiliary area, which are given respectively by:

$$A = HL \quad (1)$$

$$A_c = L_1 t_1 + 2 L_0 t_0 + t_1 t_0 \cos \alpha + t_0^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (2)$$

$$A_{aux} = (L_1 + L_0 \sin \alpha + t_0 \cos \alpha)(2 L_0 \cos \alpha + t_1) \quad (3)$$

where the third and fourth terms of Equation (2) represent the trapezoidal area that unifies the simple and bifurcated branches of the Y-shaped cavity. In Equation (3), the second and first terms between parentheses on the right side of the equation represent the height and the width occupied by the cavity. The Equations (2) and (3) can be expressed as the cavity and auxiliary fractions in relation to total area. They are given by:

$$\varphi = A_c / A \quad (4)$$

$$\psi = A_{aux} / A \quad (5)$$

It is worthy to mention that the Equation (2) is valid only for the following interval: $0 < \alpha < \pi/2$ rad.

The analysis that delivers the global thermal resistance as a function of the geometry consists of solving numerically the heat conduction equation along the solid region,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + 1 = 0 \quad (6)$$

In the dimensionless process of the heat diffusion equation, the term q'''/k is evidenced in all terms, given rise to the unity in the third term of Eq. (6).

The dimensionless variables can be written by:

VI Southern Conference on Computational Modeling (MCSul) - Federal University of Rio Grande (FURG)
VI Conferência Sul em Modelagem Computacional (MCSul) - Universidade Federal do Rio Grande (FURG)
27 à 29 de outubro de 2014, Rio Grande – RS, Brasil

$$\theta = \frac{\theta_{\min}}{q \frac{A}{k}} \quad (7)$$

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{H}, \tilde{L} = \frac{x, y, t_0, t_1, L_0, L_1, H, L}{A^{1/2}} \quad (8)$$

As previously mentioned the outer surfaces of the solid are thermally insulated (adiabatic) while the cavity surfaces are maintained at minimal temperature θ_{\min} . For the sake of brevity, the equations which represents the boundary conditions will not be addressed in this text. More details can be seen in Ref. [8].

The dimensionless form of the Equations (1) - (3) are given, respectively, by:

$$1 = \tilde{H} \tilde{L} \quad (9)$$

$$\varphi = \tilde{L}_1 \tilde{t}_1 + 2 \tilde{L}_0 \tilde{t}_0 + \tilde{t}_1 \tilde{t}_0 \cos \alpha - \tilde{t}_0^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (10)$$

$$\psi = (\tilde{L}_1 + \tilde{L}_0 \sin \alpha + \tilde{t}_0 \cos \alpha)(2 \tilde{L}_0 \cos \alpha + \tilde{t}_1) \quad (11)$$

The objective is minimize the maximum excess of temperature θ_{\max} in the solid domain, given by dimensionless equation:

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{q \frac{A}{k}} \quad (12)$$

3. NUMERICAL MODEL

The function represented by Equation (12) is determined numerically by solving Equation (6) for the temperature field in every assumed configurations (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α) and calculating θ_{\max} to see whether θ_{\max} can be minimized by varying the configuration. The numerical solution is performed with the Finite Element Method (FEM), see Ref. [18, 19], based on linear triangular elements, developed in the MATLAB environment, precisely the PDE (partial-differential-equations) toolbox [20]. The grid was non-uniform in both x and y directions, and varied from one geometry to the next. The appropriate mesh size was determined by successive refinements (h-adaptively), increasing the number of elements four times from the current mesh size to the next mesh size, until the following criterion is satisfied:

$$|(\tilde{\theta}_{\max}^i - \tilde{\theta}_{\max}^{i+1}) / \tilde{\theta}_{\max}^i| < 1 \times 10^{-4} \quad (13)$$

where θ_i represents the maximum value of the temperature evaluated with current mesh, θ_{i+1} represents the temperature evaluated with next refined mesh (which has four elements more than the previous mesh).

Table 1 illustrates the refinement mesh process with the aim to find a independent mesh, that does not influence final results of the temperature field. The following results were performed by using a range between 2240 and 143360 triangular elements. The independent mesh is achieved for the third refinement (35840 elements). The grid independence test is performed for a fixed geometry with the following parameters: $\phi = 0.05$, $\psi = 0.5$, $H/L = 1.0$, $t_1/t_0 = 2.0$, $L_1/L_0 = 0.5$, $\alpha = 0.94$.

Table 1: Grid independence test.

Number of Elements	θ_{\max}	$ \theta_{\max}^i - \theta_{\max}^{i+1} / \theta_{\max}^i$
2240	0.079046	5.6600×10^{-4}
8960	0.079001	1.8978×10^{-4}
35840 *	0.078986	5.6971×10^{-5}
143360	0.078982	-----

* Independent mesh

The results obtained in grid independence test were compared to previous results found in Refs.[9] and [12]. The comparison is depicted in Table 2.

Table 2: Comparison between the results achieved with the present model and those showed in literature.

Reference	θ_{\max}
Present Work	0.0762
Lorenzini et al. (2014a)	0.0762
Lorenzini et al. (2011)	0.0762

4. USING SIMULATED ANNEALING TO GEOMETRIC OPTIMIZATION

The combinatorial optimization algorithm Simulated Annealing (SA) was proposed firstly in Ref. [4] and it has a heuristic based in production of resistant materials, like glass or metal, submitted to annealing process. Initially the material is heated at high level temperatures and then cooled slowly to obtain the minimization of energy between the atoms of the material. The algorithm of Ref. [4] apply the optimization proposed by Ref. [21] for various temperature levels.

Based on the heuristic presented, the algorithm SA starts the seek for the possible solutions in the search space and accept news solutions according with a probability given by Equation (14), which depends on current iteration temperature of algorithm. The function which decreases the temperature at each iteration of the SA is named cooling schedule. For high algorithm temperatures of the annealing process the algorithm proposes distant new geometric neighbor point and has more probability to accept bad solutions, i.e., distant from the optimal shape. As the algorithm temperature decreases the new proposed neighbor points are near from the current point and the probability to accept bad solutions decreases considerably.

$$P = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\Delta}{\max(T)}\right)} \quad (14)$$

In Equation (14) Δ is the difference between the value returned by Objective Function of the new configuration in relation to Objective Function value for the best evaluated point. More precisely, when a new geometry neighbor is proposed in comparison with the current solution, the value of Objective Function, which it is intended to be minimized, is calculated for this new geometry (neighbor). Afterwards, it is calculated Δ subtracting the value of Objective Function for the neighbor solution and Objective Function for the current solution. The acceptance probability of solution also depends on the actual algorithm iteration. Once the numerical model used here led to an achievement of different temperatures for each degree of freedom, for calculation with Eq. (14) it is used the highest temperature of domain [20].

To apply the SA algorithm in the geometric optimization of the Y-shaped cavity, it was needed the same discretization of the space search realized in the study of Ref. [12]. The implementation of SA was run by MATLAB environment. More precisely, it is used the Global Optimization Toolbox with a specific function to SA execution named *simulannealbnd*. The SA solver of the MATLAB is extremely adaptable, i.e., it is possible to develop new algorithms for several functions as cooling schedule, annealing function or the acceptance function.

The present work applied the SA algorithm for the same problem previously studied in Refs. [7] and [12] where the Exhaustive Search (ES) and Genetic Algorithm (GA) were employed to seek for the optimal shapes. In these works all degrees of freedom (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α) were evaluated. In the present work, the main intention was to evaluate the possibility to employ SA combined with Constructal Design for geometric optimization of complex cavity shapes. In this sense, the degree of freedom H/L will be kept fixed ($H/L = 1.0$) and the optimal shapes are obtained for various fixed values of t_1/t_0 , finding the two times minimized maximal excess of temperature, $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$ and the its corresponding optimal shapes: $(L_1/L_0)_o$ and α_{oo} .

The search space formed by degrees of freedom (DOF) L_1/L_0 and α was discretized in the same solution space employed for GA algorithm used in Ref. [12]. The SA was evaluated for 15 different values of DOF L_1/L_0 , as can be seen in the vector represented in Eq. (15), while the DOF α is varied in the interval $1.00 \leq \alpha \leq 1.57$ with a step of $\Delta\alpha = 0.01$.

$$L_1/L_0 = [0.001 \ 0.002 \ 0.003 \ 0.005 \ 0.007 \ 0.01 \ 0.02 \ 0.03 \ 0.05 \ 0.07 \ 0.1 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.7 \ 1.0]^T \quad (15)$$

In order to apply the SA algorithm in an appropriate search space, it is needed to develop an annealing function, i.e., the function which proposes neighbor solutions from the current point during the optimization process. The proposal of the new neighbor for the possible values of L_1/L_0 must respect the interval depicted in Eq. (15), and the new points for α can not extrapolate the interval described above with a precision of $\Delta\alpha = 0.01$. A new cooling schedule (the way as the control temperature for SA algorithm in each iteration will be minimized) is proposed here and is named hybrid function. This function consists in a mixture between two functions available in MATLAB Optimization Toolbox: Exponential and Boltz. The SA algorithm used here has three available cooling functions: *Exponential* (default model), *Fast* and *Boltz*. These functions are presented by the following equations:

$$T_i = T_0 \times 0,95^{k_{sa}} \quad (16)$$

$$T_i = \frac{T_0}{k_{sa}} \quad (17)$$

$$T_i = \frac{T_0}{\ln(k_{sa})} \quad (18)$$

where k_{sa} is the annealing parameter, which is the same value for iteration number before reannealing, i.e., the number of iteration before the recalculation of temperature. By default, it is taking into account a value of $k_{sa} = 100$. T_i represents the temperature in the current iteration and T_0 represents the initial temperature of the algorithm, that is assumed $T_0 = 100$ by default. In this work the proposed cooling temperature, named *Boltzexp*, is a hybrid form between the models described in Equations (16) and (18). Basically, the function consists on the evaluation of the temperature obtained with the two equations and the employment of the lowest temperature obtained with both methods in the current iteration. Figures 2 and 3 illustrates a comparative between the cooling models, including the hybrid model proposed in the present study.

It was performed sixty executions of SA algorithm for the four different cooling schedules. The execution of SA for each kind of cooling schedule led to distinct performances, which will be analyzed in next section. The algorithm stops when the maximal excess of temperature is $\theta_{\max} = 0.6119$, which is the same criterion employed in Ref. [12] for stop of GA. The maximum number of 150 iterations without changes in the current optimal shape was also used as stop criterion for execution of SA. In spite of the establishment of this last criterion, all SA executions found the same optimal value predicted in Ref. [12] for the case with $H/L = 1.0$ and $t_1/t_0 = 11.0$.

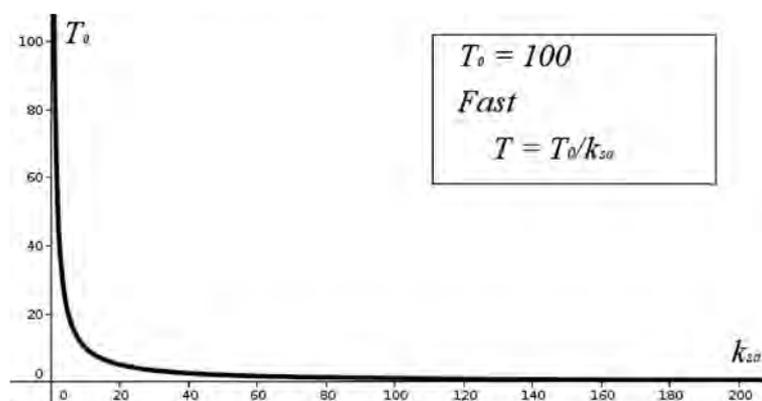


Figure 2 – The behavior of algorithm temperature as a function of the number of iterations for the Fast cooling schedule of SA.

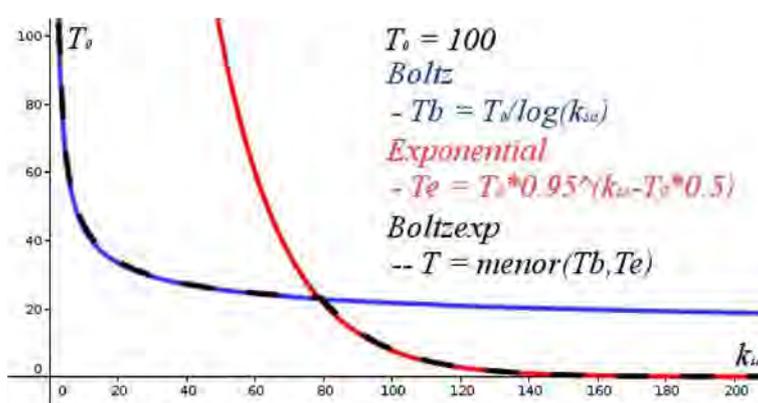


Figure 3 – The behavior of temperature as a function of the number of iterations for three different cooling schedules of SA (boltz, exponential and hybrid).

5. RESULTS AND DISCUSSION

Table 3 demonstrates a comparison between the SA executions for the four kinds of cooling schedules for algorithm temperature. It is important to mention that the results of Table 3 were based in sixty executions of SA algorithm for each cooling schedule (Fast, Boltz, Exponential and Boltzexp). Once the SA algorithm is probabilistic and it has functions for generation of random numbers, it is noticed that the number of iterations (required simulations to find the optimal values) is not constant. In this sense, it is also presented in Table 3 the mean required number of iterations for achievement of optimal shapes, as well as, the lowest and highest number of simulations required for achievement of the optimal shape. It is also shown the number of times where the algorithm reaches to the optimal shape.

Table 3: Comparative between SA cooling models for temperature algorithms.

COOLING SCHEDULE (SA)	$(L_i/L_0)_0$	$(\alpha)_{00}$	Qtd	%	MEAN NUMBER OF ITERATIONS	MINIMUM NUMBER OF ITERATIONS	MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
Fast	0.007	1.55	30	50	129.28	4	187
Boltz	0.007	1.55	43	72	206.63	6	422
Exp	0.007	1.55	48	80	100.90	18	248
Boltzexp (hybrid)	0.007	1.55	54	90	154.58	49	381

Firstly, Table 3 shows that all models reached to the same global optimal shape. The fourth column of Table 3 shows that on the one hand the model *Boltzexp* is the most reliable model for achievement of the optimal geometry since it reached 54 times (of 60 executions) to the global minimal maximum excess of temperature for the Y-shaped cavity, i.e., 90 % of executions. The other 6 executions led to local minimal temperatures and local optimal shapes. On the other hand, the *Fast* model reached the optimal shape only 50 % of times executed, being the lowest reliability model among the studied functions. Concerning the number of iterations, it can be seen that the algorithm can reach optimal geometries (even a local optimal shapes) with few iterations (simulations), e.g., the *Fast* model reached to the minimal shape with only 4 iterations, while the model *Boltzexp* required a minimal of 49 iterations to find one optimal shape. The mean number of iterations to find the optimal shapes among the 60 executions performed for all cooling schedules are presented in sixth column of Table 3. The best model in this aspect is the *Exp*, which required approximately 100 iterations to find the optimal shape. In spite of the fact that *Exp* model required a number of simulations nearly 35 % lower than that required for the *Boltzexp* model, this last model will be employed in the continuity of the work due to its elevated reliability, which is the most important aspect in the seek for the optimal shapes.

Table 4 presents a comparison between the results reached with *Boltzexp* cooling schedule in SA algorithm and those reached with ES [8] and GA [12]. The optimized geometry was performed for the following constant values of constraints and degrees of freedom: $\varphi = 0.05$, $\psi = 0.3$, $H/L = 1.0$ and $t_1/t_0 = 11.0$. The mode of number of iterations for achievement of the optimal results with SA are used for comparison with the results of literature, i.e., the number of iterations with more occurrence.

Table 4: Comparative between obtained results with ES, GA and SA for the following fixed parameters :
 $H/L = 1,0$, $t_1/t_0 = 11,0$, $\varphi = 0,05$ e $\psi = 0,3$.

Optimization Method	$(L_1/L_0)_o$	$(\alpha)_{oo}$	$(\theta_{max})_{mm}$	Number Of Iterations
Exhaustive Search	0,007	1,55	0,611	331
Genetic Algorithm	0,007	1,55	0,611	169
Simulated Annealing	0,007	1,55	0,611	143*

* Mode of the number of iterations in 60 SA executions with hybrid cooling model

The results of Table 4 shows that the twice minimized maximum excess of temperature, $(\theta_{max})_{mm}$, was the same for all search mechanism. Furthermore, all methods employed found the same optimal geometries: $(L_1/L_0)_o$ e α_{oo} . Concerning the number of simulations (iterations) to optimize the problem it can be observed that the search mechanisms heuristic and probabilistic (GA and SA) require a number of simulations strongly inferior to that needed with ES, allowing future studies of more complex geometries with larger number of degrees of freedom. For this specific problem, the number of simulations required by ES to find the optimal is 1.96 and 2.31 times higher than that required for GA and SA, respectively. In spite of the lower requisition on the number of simulations with SA for this specific case, the comparison between GA and SA are not conclusive and more simulations and the study in other geometries are needed.

Figure 4 illustrates a comparison between the temperature field obtained for the optimal geometry and the extreme geometries in the valid solution space for the case where $H/L = 1.0$ and $t_1/t_0 = 11.0$ and for the following constraints: $\varphi = 0.05$ and $\psi = 0.3$. The results presented here are obtained only with the used of SA. Figure 4(a) shows the temperature field for the lower extreme of the search space ($L_1/L_0 = 0.001$), while in Fig. 4(b) it is presented the twice optimized geometry and Fig. 4(c) depicts the upper extreme of the ratio L_1/L_0 studied ($L_1/L_0 = 1.0$). Similarly to what was noticed in previous works of Ref. [6] and [12], the employment of Constructal Design allowed the improvement of thermal performance by means of geometrical evaluation. For the showed cases, the optimal geometry, Fig. 4(b), has a thermal performance nearly 81% and 39% superior than that achieved with the lowest and highest extremes of the ratio L_1/L_0 , Fig. 4(a) and 4(c), respectively. It is also seen that the maximum thermal performance is obtained for the geometry which led to the most homogeneous temperature field, i.e., according to the Constructal principle of “optimal distribution of imperfections” [2, 3].

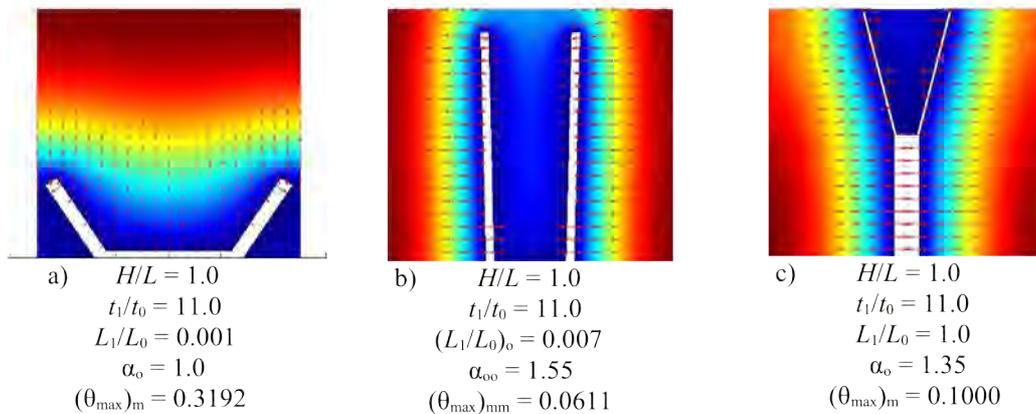


Figure 4 – Temperature Fields for the geometries with various ratios of the L_1/L_0 : a) $L_1/L_0 = 0.001$ (lower extreme), b) $L_1/L_0 = 0.007$ (optimal), c) $L_1/L_0 = 1,0$ (upper extreme).

Table 5 demonstrates the results achieved with the Simulated Annealing (SA) for different values of t_1/t_0 for a fixed value of $H/L = 1,0$, as well as, the results reached with GA and ES in Ref. [12]. The results showed that the search algorithm meta-heuristics and combinatorial found the same optimal shapes obtained with ES, showing that the use of Simulated Annealing (SA) algorithm is adequate for optimization of heat transfer problems combined with Constructal Design. Concerning the number of required iterations to find the optimal geometries, both methods (GA and SA) led to a strong reduction of computational effort required to obtain the optimal shapes. With exception of the case $t_1/t_0 = 11,0$, the GA required lower simulations than SA for every ratios of t_1/t_0 studied. It is worthy to mention that the number of simulations required with SA to obtain the optimal geometries has a large variation for each value of t_1/t_0 investigated. For instance, for t_1/t_0 the number of iterations varied from a minimum of 49 simulations to a maximum of 381 simulations. A similar behavior is noticed for the simulations with GA. Therefore, in spite of the advantage of GA for the results of Table 5, the comparison between SA and GA are not conclusive. Future studies are required to evaluate the reliability of both methods (number of times where the global optimal is achieved) and the number of simulations required for problems with more degrees of freedom.

In order to evaluate the capability of SA to represent the effect of geometry over the thermal performance, Fig. 5 shows the effect of the ratio t_1/t_0 over the twice minimized maximal excess of temperature, $(\theta_{\max})_{\text{mm}}$, and the respective optimal shapes: $(L_1/L_0)_o$ e α_{oo} . The results not only showed that SA is suitable to find the minimal temperature and optimal shapes, but is also suitable for prediction of the effect of the degrees of freedom (DOF) over the performance of flux system, which is extremely important in the studies of geometrical evaluation with Constructal Design.

6. CONCLUSION

In the present work it was performed a numerical study about the employment of combined Constructal Design and Simulated Annealing (SA) for geometric evaluation and optimization of an isothermal Y-shaped cavity intruded into solid conducting wall with internal heat generation. The optimization results found with SA were compared with those achieved with Exhaustive Search (ES) and Genetic Algorithm (GA) presented in Ref. [8] and [12].

The results obtained in the present work showed that the employment of Simulated Annealing is a suitable methodology in combination with Constructal Design for geometric optimization of heat transfer problems. Firstly, it was investigated four different cooling schedules. The hybrid method named *Boltzexp* increased significantly the reliability in the seek for the optimal shapes. For instance, the method *Boltzexp* reached to the global optimal

VI Southern Conference on Computational Modeling (MCSul) - Federal University of Rio Grande (FURG)
 VI Conferência Sul em Modelagem Computacional (MCSul) - Universidade Federal do Rio Grande (FURG)
 27 à 29 de outubro de 2014, Rio Grande – RS, Brasil

geometry in 90 % of executions performed with the code, while the method *Fast* achieved only in 50 % of executions. In this sense, the *Boltzexp* function was employed in the search for the evaluation of three degrees of freedom in the Y-shaped cavity.

Table 5 – Compare between the results obtained with SA, AG and ES for a optimization with following fixes parameters : $H/L = 1.0$, $\varphi = 0.05$ e $\psi = 0.3$

Parameter / Study		Present Work Simulated Annealing	Ref. [11] Genetic Algorithm	Ref. [7] Exhaustive Search
$t_1/t_0 = 7.0$	Iterations	141	31	527
	$(\alpha)_{oo}$	1.48	1.48	1.48
	$(L_1/L_0)_o$	0.001	0.001	0.001
	$(\theta_{max})_m$	0.0700	0.0700	0.0700
$t_1/t_0 = 10.0$	Iterations	149	47	649
	$(\alpha)_{oo}$	1.54	1.54	1.53
	$(L_1/L_0)_o$	0.001	0.001	0.001
	$(\theta_{max})_m$	0.0639	0.0639	0.0639
$t_1/t_0 = 11.0$	Iterations	143	169	331
	$(\alpha)_{oo}$	1.55	1.55	1.55
	$(L_1/L_0)_o$	0.007	0.007	0.007
	$(\theta_{max})_m$	0.0611	0.0611	0.0611
$t_1/t_0 = 12.0$	Iterations	119	52	385
	$(\alpha)_{oo}$	1.53	1.53	1.53
	$(L_1/L_0)_o$	0.05	0.05	0.05
	$(\theta_{max})_m$	0.0642	0.0642	0.0642

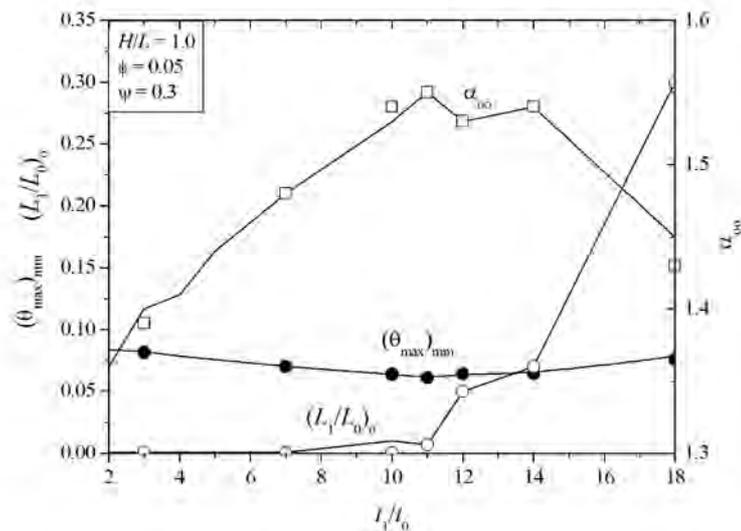


Figure 5. Compare between results of the Exhaustive Search Method and optimal points found with Simulated Annealing in function of t_1/t_0 .

Concerning the seek for the optimal geometries, the twice minimized maximal excess of temperature, $(\theta_{max})_{mm}$ and their respective optimal shapes $((L_1/L_0)_o$ and α_{oo}) obtained with SA are the same previously predicted with ES and GA. The computational effort required with SA and GA were strongly lower than that necessary with ES. The results showed that SA combined with Constructal Design is not only suitable to find the best geometries of the Y-shaped cavities

but also for prediction of the effect of geometric parameters (degrees of freedom) over the thermal performance of heat transfer problems.

Future studies will be performed to evaluate new complex geometries combining SA and GA with Constructal Design to find the optimal geometries and evaluate the effect of geometric parameters over cavities intruded into conducting solid walls.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

Professor E. D. dos Santos is sponsored by FAPERGS (Process: 12/1418-4). Prof. L. A. O. Rocha thanks CNPq by financial support.

8. REFERENCES

-
1. Bejan, A., Optimal Internal Structure of Volumes Cooled by Single-Phase Forced and Natural Convection. *Journal of Electronic Packaging*. 2003; vol. 125, pp. 200 – 207.
 2. Bejan A., *Shape and Structure, from Engineering to Nature*. Cambridge University Press, Cambridge, UK; 2000.
 3. Bejan, A. and Lorente, S., *Design with Constructal Theory*. Wiley, Hoboken, 2008.
 4. Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. and Vecchi, M. P., Optimization by Simulated Annealing. *Science*, New Series. 1983, v. 220, No 4598, pp 671-680.
 5. Eglese R W., Simulated Annealing: A tool for Operational Research. *European Journal of Operational Research*, 1990, p.271-281.
 6. Biserni C, Rocha LA.O, Bejan A. Inverted Fins: Geometric Optimization of the Intrusion Into a Conducting Wall. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2004, v. 47, pp. 2577–2586.
 7. Estrada E, Dos Santos ED, Isoldi LA, Rocha LAO. Genetic Algorithm and Constructal Design for Geometric Optimization of Y-Shaped. In: V MCSUL, Rio Grande - RS. V Conferência Sul de Modelagem Computacional, 2012. v. 1. p. 45-50.
 8. Lorenzini G, Biserni C, Isoldi LA, Dos Santos ED, Rocha LAO. Constructal Design Applied to the Geometric Optimization of Y-shaped Cavities Embedded in a Conducting Medium. *J. Electronic Packaging*. 2011, vol. 133, pp. 041008-1 – 041008-8.
 9. Lorenzini G, Garcia FL, Dos Santos ED, Biserni C, Rocha LAO. Constructal design applied to the optimization of complex geometries: T-Y-shaped cavities with two additional lateral intrusions cooled by convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2012, v. 55, p. 1505-1512.
 10. Lorenzini G, Biserni C, Link FB, Isoldi LA, Dos Santos ED, Rocha LAO. Constructal Design of T-Shaped Cavity for Several Convective Fluxes Imposed at the Cavity Surfaces. *J. Eng. Thermophys.* 2013 , 22, pp. 309–321.
 11. Hajmohammadi MR, Poozesh S, Campo A, Nourazar SS. Valuable Reconsideration in the Constructal Design of Cavities. *Energy Convers. Manage.* 2013, 66, pp. 33–40.
 12. Lorenzini G, Biserni C, Estrada E da SD, Dos Santos ED, Isoldi LA, Rocha LAO. Genetic Algorithm Applied to Geometric Optimization of Isothermal Y-Shaped Cavities. *Journal of Electronic Packaging*. 2014a, vol 136.
 13. Lorenzini G, Biserni C, Estrada ED, Isoldi LA, Dos Santos ED, Rocha LA.O. Constructal Design of Convective Y-Shaped Cavities by Means of Genetic Algorithm. *Journal of Heat Transfer*. 2014b, v. 136, p. 071702-071702-10.
 14. Xie Z, Chen L, Sun F. Geometry Optimization of T-Shaped Cavities According to Constructal Theory. *Math. Comput. Model.* 2010 ,v 52, pp. 1538–1546.
 15. Lorenzini G, Rocha LAO. Geometric optimization of T-Y-shaped cavity according to constructal design. *Int J Heat Mass Transfer* 2009;52:4675-4683.
 16. Xie, Z. H., Chen, L. G., Sun, F. R. Constructal Optimization of Twice Y-Shaped Assemblies of Fins by Taking Maximum Thermal Resistance Minimization as Objective. *Sci. China Technol. Sci.*, 2010, v. 53, pp. 2756 – 2764.
 17. Lorenzini, G. L., Rocha, L. A. O., Constructal Design of Y-shaped Assembly of Fins. 2000, v. 49, pp. 4552 – 4557.
 18. Reddy JN, Gartling DK. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC, Boca Raton, Florida, USA; 1994.

VI Southern Conference on Computational Modeling (MCSul) - Federal University of Rio Grande (FURG)
VI Conferência Sul em Modelagem Computacional (MCSul) - Universidade Federal do Rio Grande (FURG)
27 à 29 de outubro de 2014, Rio Grande – RS, Brasil

19. Zienkiewicz OC, Taylor RL. The finite element method: The Basis. Volume 1, Butterworth-Heinemann, Oxford,.Ed 5; 2000.
 20. MATLAB User's Guide, Version 6.0.088, Release 12, The Mathworks Inc., Natick, MA, 2000.
 21. Metropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth MN, Teller AH. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. The Journal Of Chemical Physics. 1953, v 21, p 1088-1092.
-

**ANEXO III – ARTIGO SOBRE O ESTUDO DE COOLING SCHEDULES
APRESENTADO NO VI MCSUL**



A Comparative Study of Simulated Annealing with different Cooling Schedules for Geometric Optimization of a Heat Transfer Problem According to Constructal Design

G. V. Gonzales^{1,*}; L. R. Emmendorfer¹; L. A. Isoldi¹; E. da S. D. Estrada²; L. A. O. Rocha², E. D. dos Santos¹

¹Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC), Universidade Federal do Rio Grande (FURG), 96021-900, Rio Grande, Brasil.

²Department of Mechanical Engineering (DEMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 90050-170, Porto Alegre, Brasil.

*corresponding author: gillvelleda@gmail.com;

The Simulated Annealing is a widely used meta-heuristic to combinatorial and optimization problems studied since 1983, when it was first proposed. This algorithm has a particular parameter, the cooling schedule (specifically the decrease of temperature) which is still defined for each problem empirically. This study has the aim to find the best cooling schedule(s) for geometric optimization of a heat transfer problem. More specifically it is performed the geometrical evaluation of an isothermal Y-shaped cavity intruded into conducting solid wall with internal heat generation. In this research, Constructal Design is employed to determine the constraints and objectives for geometric evaluation of this problem. The cooling schedule(s) recommended here will contribute for future applications of Simulated Annealing heuristic in association with Constructal Design to seek for the optimal shapes of complex geometries in heat transfer problems, as well as, evaluate the influence of geometric parameters over thermal performance of the problem. Six different methods of decrease of temperature are evaluated in twenty samples of thirty simulations for each cooling schedule. From these simulations, it was extracted the percentage of convergence to the global optimal point. Results showed that the Fast cooling schedule led to the worst performance in the seek for the global optimal shapes, while the three hybrid cooling schedules proposed here are the most recommended to find the optimal geometrical configurations in heat transfer problems in association with Constructal Design (*BoltzExp*, *ConstExp1* and *ConstExp2*).

Keywords: Constructal Design, Simulated Annealing, Geometric Optimization, Heat Transfer, Cooling Schedule.

1. INTRODUCTION

The algorithm Simulated Annealing (SA) is a meta-heuristic proposed by Kirkpatrick [1]. It is an implementation of Metropolis et al. [2] method in a sequence of iteration controlled by a temperature parameter, based on physic annealing process. According to Kirkpatrick [1] the temperature parameter and the behavior of temperature decay is defined empirically. This parameter is responsible for the control of temperature in the algorithm and is called cooling schedule. This parameter has the highest influence over the seek for the optimal results [3,4]. There are in literature several studies about the best cooling schedules or variants of classical SA, see Refs. [5-13]. However, there is no universal recommended cooling schedule to seek for the best geometries in heat transfer problems.

Constructal Design derives from Constructal Theory, which is the view that geometry patterns of any animate or inanimate flux systems, which are seen in nature is not result of chance, but emerged by a physical principle, the Constructal Law [14,15]. Constructal Law states that "For a finite-size flow system to persist in time (to live), its configuration must evolve in such a way that provides easier access to the currents that flow through it". The form to employ Constructal Law for geometric evaluation of flux systems is the Constructal Design [14], which is a method based on objectives and restrictions used to minimize the imperfections

of the investigated systems. This method has also been applied for improvement of performance in engineering problems. Recently, several C, T, Y-shaped cavities, as well as, complex and multiple cavities has been studied by means of Constructal Design, see Refs. [16 – 24].

The problem studied here is a Y-shaped cavity that is intruded into a conducting solid wall with internal heat generation. The heat is just only removed by Y-shaped cavity and the objective is to optimize its geometry to minimize the thermal resistance of the solid. In general, as more complex is the cavity geometry to be evaluated more degrees of freedom (DOF) are required to define. The optimization of this kind of problem requires a large computational effort due to the high number of required simulations for complete optimization. In this framework, recent studies [22, 23] employed genetic algorithms (GA) to seek for the best shapes. The achieved results for few degrees of freedom were compared with those achieved with Exhaustive Search (ES) which consists on the simulation of all geometric possibilities. Afterwards, new results were proposed using only GA for the whole degrees of freedom of the problem.

The employment of Simulated Annealing (SA) in association with Constructal Design for geometrical optimization of cavities has not been studied in literature at the authors knowledge, representing a novel important study. Then, the study of appropriate annealing cooling schedule is also an important subject. The application of algorithm without adjusted configurations can led to errors in the achievement of global optimal shapes, as well as, in the evaluation of influence of each geometric parameter (DOF) over thermal performance of the problem, mainly in cases where it is not possible to compare the results with those achieved with ES. In this sense, this study intends to reach to a recommendation about the best cooling schedules for a reliable optimization with SA meta-heuristic for future optimization of complex cavities into Constructal Design framework.

2. MATHEMATICAL MODELING

Figure 1 shows the computational domain of the studied problem. The Y-shaped cavity acts removing the heat generated by solid domain (gray region). The seek for the optimal geometry of the cavity is given by variation of the degrees of freedom: H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 and α . The temperature field inside the solid domain is solved for every studied cases and the maximum temperature is collected. The best thermal performance of the system is obtained when the maximum temperature inside the solid domain is minimized.

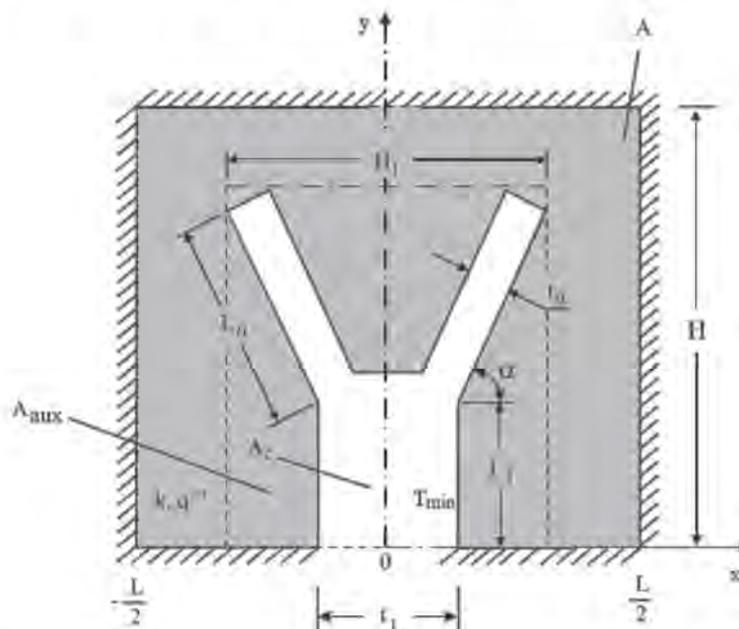


Figure 1: Computational Domain of Y-shaped cavity into a solid with internal heat generation.

More details of mathematical model can see in [18]. The main objective is to minimize the dimensionless maximum excess of temperature (θ_{\max}) in the solid domain, given by dimensionless equation:

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{q \frac{A}{k}} \quad (1)$$

3. NUMERICAL MODEL

The function represented by Equation (1) is determined numerically by solving the temperature field in every assumed configurations (H/L , t_1/t_0 , L_1/L_0 , α) and calculating θ_{\max} to see whether θ_{\max} can be minimized by varying the configuration. The numerical solution is performed with the Finite Element Method (FEM), see Refs. [25, 26]. The domain is discretized with linear triangular elements. The solution is performed in MATLAB environment, precisely the PDE (partial-differential-equations) toolbox [27]. The grid was non-uniform in both x and y directions, and varied from one geometry to the next. The appropriate mesh size was determined by successive refinements (h-adaptively), increasing the number of elements four times from the current mesh size to the next mesh size, until the following criterion is satisfied:

$$|(\theta_{\max}^i - \theta_{\max}^{i+1}) / \theta_{\max}^i| < 1 \times 10^{-4} \quad (2)$$

where θ_i represents the maximum value of the temperature evaluated with current mesh, θ_{i+1} represents the temperature evaluated with next refined mesh (which has four elements more than the previous mesh).

Table 1 illustrates the refinement mesh process with the aim to find an independent mesh that does not influence results of temperature field. The following results were performed by using a range between 2240 and 143360 triangular elements. The independent mesh is achieved for the third refinement (35840 elements). The grid independence test is performed for a fixed geometry with the following parameters: $\phi = 0.05$, $\psi = 0.5$, $H/L = 1.0$, $t_1/t_0 = 2.0$, $L_1/L_0 = 0.5$, $\alpha = 0.94$.

Table 1: Grid independence test.

Number of Elements	θ_{\max}	$ (\theta_{\max}^i - \theta_{\max}^{i+1}) / \theta_{\max}^i $
2240	0.079046	5.6600×10^{-4}
8960	0.079001	1.8978×10^{-4}
35840 *	0.078986	5.6971×10^{-5}
143360	0.078982	-----

* Independent mesh

The results obtained in grid independence test were compared with previous results found in Refs. [19, 22]. The comparison is depicted in Table 2.

Table 2: Comparison between the results achieved with the present model and those showed in literature.

Reference	θ_{\max}
Present Work	0.0762
Lorenzini et. al. (2014a)	0.0762
Lorenzini et. al. (2011)	0.0762

4. SIMULATED ANNEALING

The combinatorial optimization algorithm Simulated Annealing (SA) was proposed firstly in Kirkpatrick et al. [1] and it has a heuristic based in production of resistant materials, like glass or metal, submitted to annealing process. Initially the material is heated at high level temperatures and then cooled slowly to obtain the minimization of energy between the atoms of the material. The algorithm of Kirkpatrick et al. [1] applies the optimization proposed by Metropolis et al. [2] for various temperature levels.

Based on the heuristic presented, the algorithm SA starts the seek for the possible solutions in the search space and accept new solutions according with a probability given by Eq. (3), which depends on current iteration temperature of algorithm. According to Eglese [3], the initial temperature, the method as the temperature decrease, the number of neighbor proposes at each level of temperature, the reannealing parameter and the stop criterion, are named cooling schedule. For high algorithm temperatures of the annealing process the algorithm proposes distant new geometric neighbor point and has more probability to accept bad solutions, i.e., distant from the optimal shape. As the algorithm temperature decreases the new proposed neighbor points are near from the current point and the probability to accept bad solutions decreases considerably.

$$P = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\Delta}{\max(T)}\right)} \quad (3)$$

In Eq. (3) Δ is the difference between the value returned by Objective Function of the new configuration in relation to Objective Function value for the best evaluated point. More precisely, when a new geometry neighbor is proposed in comparison with the current solution, the value of Objective Function, which it is intended to be minimized, is calculated for this new geometry (neighbor). Afterwards, it is calculated Δ subtracting the value of Objective Function for the neighbor solution and Objective Function for the current solution. The acceptance probability of solution also depends on the actual algorithm iteration. Once the numerical model used here led to an achievement of different temperatures for each degree of freedom, for calculation with Eq. (3) it is used the highest temperature of domain [27].

To apply the SA algorithm in the geometric optimization of the Y-shaped cavity, it was needed the same discretization of the space search realized in the study of Lorenzini et al. [22]. The implementation of SA was run in MATLAB environment. More precisely, it is used the Global Optimization Toolbox with a specific function to SA execution named *simulannealbnd*. The SA solver of the MATLAB is extremely adaptable, i.e., it is possible to develop new algorithms for several functions as cooling schedule, annealing function or the acceptance function.

The present work applied the SA algorithm for the same problem previously studied in Refs. [17, 22] with the Exhaustive Search (ES) and Genetic Algorithm (GA), which were employed to seek for the optimal shapes. In the present study, the main intention is to find the best configurations for SA (cooling schedule) that combined with Constructal Design can be employed to seek for the best geometries of complex cavity shapes. Twenty samples with 30 executions of the SA is realized trying to found the once optimized ratio of L_1/L_0 , $(L_1/L_0)_o$, and the twice optimized angle α , α_{oo} , for three different values of the ratio t_1/t_0 : $t_1/t_0 = 10.0, 11.0$ and 12.0 , which represents the optimal region for the ratio t_1/t_0 and with the fixed parameters studied here, see Lorenzini et al. [22]. In this analysis it was extracted the mean percentage of achievement of the global optimal geometries with each cooling schedule.

For optimization of two DOF of the problem, the search space formed by L_1/L_0 and α is discretized in the same solution space employed for GA algorithm used in Lorenzini et al. [22]. The SA is evaluated for 15 different values of DOF L_1/L_0 , as can be seen in the vector represented in Eq. (4), while the DOF α is varied in the interval $1.00 \leq \alpha \leq 1.57$ with a step of

$\Delta\alpha = 0.01$. The results present in Lorenzini et al. [22] were used to validate the optimal configuration found here with SA and it is also used as stop criterion for the algorithm.

$$L_1/L_0 = \begin{array}{|c} 0.001 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.005 \\ 0.007 \\ 0.01 \\ 0.02 \\ 0.03 \\ 0.05 \\ 0.07 \\ 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 1 \end{array} \quad (4)$$

The SA algorithm requires a function that must propose the neighbor solutions from the current point during the optimization process, this function is called annealing function, which is developed in the present study for optimization with two DOFs ($L_1/L_0, \alpha$). The proposal of new neighbor for the possible values of DOFs must respect the discretized space, i.e., generating in a random way the values inside the search space. The random number function used is the default function of MATLAB together with an adaptation calculus for generation of valid values in search space and inside of the discretization established for each degree of freedom.

The cooling schedules observed in this work has the same initial parameters of SA, defined in the start of algorithm, only difference is the temperature decrease that is the investigation goal. Six functions of cooling was studied, the default functions of MATLAB Optimization Toolbox (*Exponential*, *Fast* and *Boltz*) and more three hybrid and customized function which will be called here: *BoltzExp*, *ConstExp1* and *ConstExp2*. These functions are respectively represented by the following equations:

$$T_i = T_0 \times 0,95^{k_{sa}} \quad (5)$$

$$T_i = \frac{T_0}{k_{sa}} \quad (6)$$

$$T_i = \frac{T_0}{\ln(k_{sa})} \quad (7)$$

$$T_i = \begin{cases} \frac{T_0}{\ln(k_{sa})} & : k_{sa} \leq 80 \text{ for } T_0 = 100 \\ T_0 * 0.95^{(k_{sa} - T_0/2)} & : k_{sa} > 80 \text{ for } T_0 = 100 \end{cases} \quad (8)$$

$$T_i = \begin{cases} T_0 & : k_{sa} \leq \frac{T_0}{2} \\ T_0 * 0.95^{(k_{sa} - T_0/2)} & : k_{sa} > \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (9)$$

$$T_i = \begin{cases} T_0 & : k_{sa} \leq \frac{T_0}{2} \\ T_0 * 0.9^{(k_{sa} - T_0/2)} & : k_{sa} > \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (10)$$

where k_{sa} is the annealing parameter, which is the same value for iteration number until reannealing, i.e., the number of iterations before the recalculation of temperature. Reannealing raises the temperature after the algorithm accepts a certain number of new points, and start the search again at the higher temperature. The number of iterations after reannealing is configured in MATLAB Optimization Toolbox, which by default is considered 100. T_i in above equations represents the temperature in the current iteration and T_0 represents the initial temperature of the algorithm, that is assumed $T_0 = 100$ by default.

In this work the proposed cooling temperature, named *Boltzexp*, is a hybrid form between the models described in Equations (5) and (6). Basically, the function consists on the evaluation of the temperature obtained with the two equations and the employment of the lowest temperature obtained with both methods in the current iteration. The value $k_{sa}=80$ in Eq. (8), represents the number of iteration when the function changes the model of decrease temperature, i.e., from *Boltz* to *Exponential*.

Two more cooling schemes are proposed, the *ConstExp1* and *ConstExp2*, represented by Eqs. (9) and (10), respectively. These models are very similar, the only difference between them is the constant of decrease in the cooling temperature, which are respectively given by 0.95 and 0.9. Both schedules maintain the temperature fixed in the initial steps until the number of iterations is equal to the half of initial temperature (T_0). In first steps of those models, the algorithm runs freely at initial temperature and with full probability to accept new points with the purpose to find a better initial point until the temperature decrease. In Figure 2 it is possible to observe the behavior of temperature decay with the number of iterations for the several cooling schedules evaluated here.

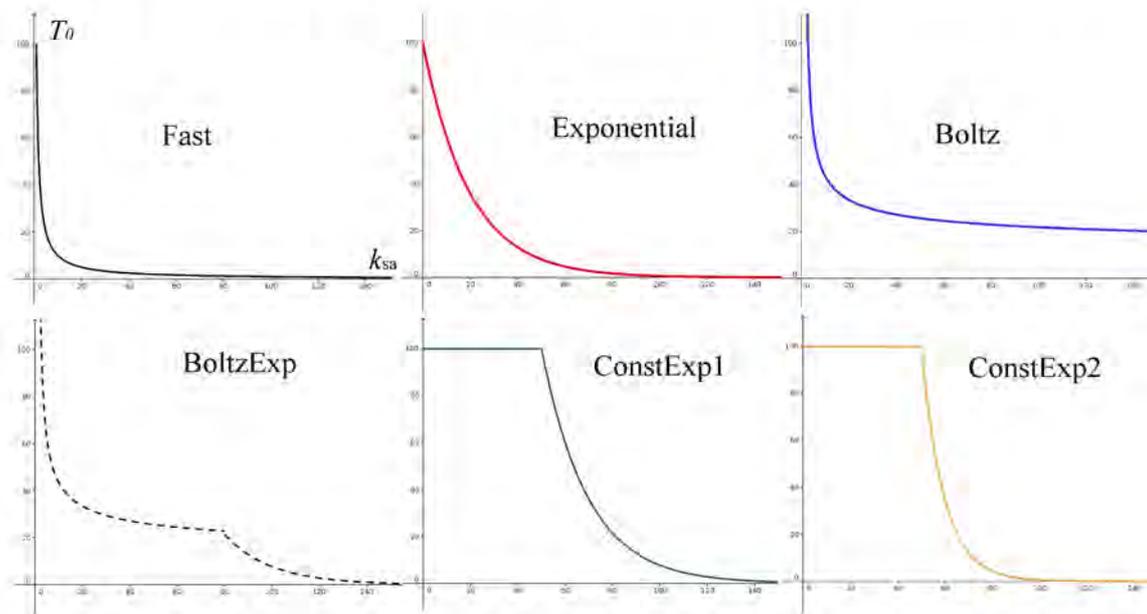


Figure 2 – The behaviour of algorithm temperature as a function of the number of iterations for the six different cooling schedule of SA ($T_0 = 100$ for all models).

5. RESULTS AND DISCUSSION

In this study, it is evaluated only the SA parameter named decrease of temperature. The other parameters are maintained fixed with the sole interest to evaluate the influence of cooling schedule function in the search for the optimal shapes of the studied Y-shaped cavity.

As above mentioned, the study focused in the optimal region for t_1/t_0 reported in Lorenzini et. al.[22]. For all geometries evaluated, the parameter H/L is considered constant $H/L = 1.0$ and the areas fractions are $\phi = 0.05$ and $\psi = 0.3$. The results of optimal configuration in Lorenzini et. al. [22] were used as stop criterion for the algorithm SA.

Table 3 shows for each cooling schedule the percentage of achievement of the optimal geometry, i.e., which minimizes the dimensionless maximum excess of temperature (θ_{\max}). From the 30 executions for each sample (in a total of 20 samples) for each cooling schedule and for each evaluated ratio of t_1/t_0 , it was possible to reach to statistics measures of the achievement of global optimal geometry. Results of Table 3 reveal that SA algorithm is not deterministic and they show the importance of statistical analysis to understand the behavior and influence of the different parameters in optimization algorithms. For example, *Fast* cooling schedule reaches to the optimal shape only 12.94 % of the evaluated samples. On opposite, the *ConstExp2* leads to an achievement of 62.44 %, in average, of the optimal shapes, showing that the new proposed cooling schedules are more effective in the search for the global optimal shapes than the default models presented in MATLAB Optimization Toolbox. Among the evaluated cooling schedules, the worst performance was obtained with the *Fast* method, which clearly is not recommended for this kind of problem. Even for a specific sample, where the *Fast* cooling schedule reaches to the optimal in 36.67 % of the simulations, the performance was inferior to the average performance of other functions as *Boltz*, *BoltzExp*, *ConstExp1* and *ConstExp2*. It can also be noticed that the method *Exponential* also has a lower percentage to find the global optimal shape, the mean percentage is only 27.50 % with a standard deviation of 16.86 %. The hybrid cooling schedules allowed the increase of the number of times where the global optimal geometry for Y-shaped cavity with two DOFs is find, being in this primary analysis more reliable for combination with Constructural Design for optimization of complex cavities in heat transfer realm. However, these methods (*BoltzExp*, *ConstExp1* and *ConstExp2*) also increase the magnitude of standard deviation, which can be negative for representation of local effects of degrees of freedom over the thermal resistance of the problem. The ideal case is that one which in average reaches to a high number of cases where the geometry is optimized and with a few variation (standard deviation) when the geometrical parameters are varied.

Table 3 – Percentage distribution of statistics in the achievement of optimal shapes for each cooling schedule.

Statistical Measures / Function	Fast	Exponential	Boltz	BoltzExp	ConstExp1	ConstExp2
Mean	12.94	27.50	42.72	54.39	54.67	62.44
Absolute Deviation	8.50	14.75	14.71	17.98	19.80	22.68
Standard Deviation	10.11	16.86	17.09	20.93	23.57	25.63
Variance	102.10	284.23	292.10	438.23	555.63	656.82
Mode	3.33	6.667	33.33	30.00	20.00	83.33
Median	11.67	30.00	36.66	53.33	56.67	71.67
Smaller	0.00	0.00	13.33	16.67	10.00	10.00
Largest	36.67	60.00	73.33	90.00	93.33	96.67

The Table 4, ANOVA was used for proof the difference between the cooling schedules analyzed. In this analysis was employed the one-way ANOVA, because the percentage sample for each treatment, or cooling schedule, are independents [28]. Also was observed twenty rounds of thirty runs of the SA for each value of t_1/t_0 (10,11 and 12) in optimal region for this case. So, were evaluated six different treatments, each one of them with sixty samples of the percentage in find the optimal shapes at thirty optimization processes. Therefore the model employed for ANOVA is balanced, i.e., the same number of samples for each treatment. The P-Value, shown in Table 4, is very minor than the significance level 0.001, this indicates that at least one distribution of the percentages is different [28].

Table 4 – Analysis of variance between all cooling schedules.

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sum of Square	Mean Squares	F-Value	P-Value
Schedules	5	107143	21428.6	55.2	2.56401e-42
Residuals	354	137417.1	388.2	---	--
Total	359	244560	---	---	---

Figure 3 depicts the percentage of global optimization for each cooling schedule. It can be seen a similarity between three last cooling schedules: *BoltzExp*, *ConstExp1* and *ConstExp2*. In average these cooling schedules are better than the other three studied methods (*Fast*, *Exponential* and *Boltz*). Results also showed that in local conditions (one specific sample) the methods *ConstExp1* and *ConstExp2* reach to the global optimal shape only in 10 % of the cases and for other specific samples they reached to magnitudes of achievement higher than 90 %, which can be seen in black traces. It is also important to mention that for these cooling schedules local optimal shapes with a performance similar to that obtained for the global optimal shapes were reached. In this sense, in general, the hybrid cooling schedules showed for the present study the most recommended functions for application of SA and Constructal Design for geometrical optimization of heat transfer problems.

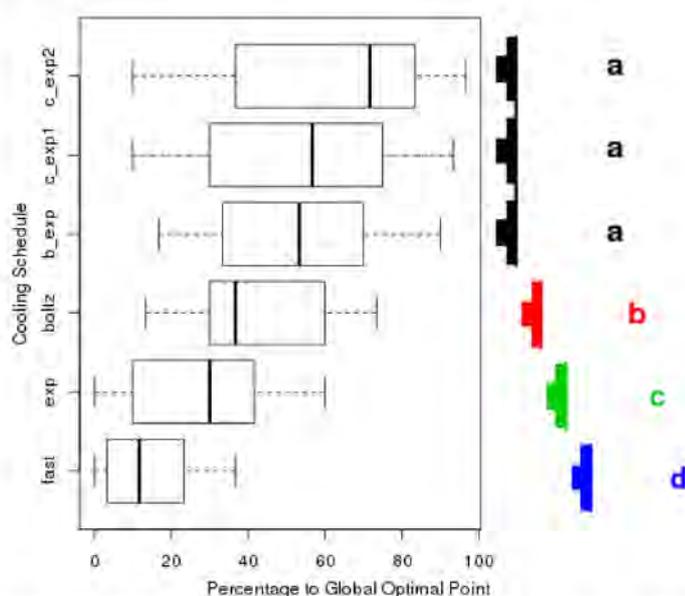


Figure 3 – The comparison and classification between analysed cooling schedules (*b_exp* = *BoltzExp*; *c_exp1* = *ConstExp1*; *c_exp2* = *ConstExp2*).

To corroborate the previous findings, Figure 3 also shows the classification of all studied cooling schedules is performed based on pairwise comparison and the mean value of percentage distribution of achievement of global optimal shape. Figure 3 was made with data generated by Software-R, a free software environment for statistical computing. Moreover, the Tukey test

was employed for generated this graph. Results clearly revealed the inferiority of *Fast* and *Exponential* cooling schedules and the superiority of new schedules to find the optimal geometries in the present studied cases.

6. CONCLUSION

In this work, six functions of the cooling schedule were compared and classified. This analysis employed the SA algorithm combined with Constructal Design for geometrical optimization of complex Y-shaped cavities. Results showed that SA is a very useful tool for optimization in the framework of Constructal Design, but this meta-heuristic requires an adequate selection of its main parameters, mainly the cooling schedule. For the case with more degrees of freedom when ES is not applicable, the reliable of meta-heuristics used is very important for geometric optimization, as well as, the evaluation of effects of each degree of freedom over the thermal performance of the system.

In the present study it was noticed that the *Fast* cooling schedule led to the worst performance, reporting several local optimal geometries for the Y-shaped cavity intruded into conductive solid wall with internal heat generation. Even when the best results obtained with *Fast* cooling schedule are taken into account, the performance is inferior to those reached with hybrid cooling schedules (*BoltzExp*, *ConstExp1* and *ConstExp2*). The other two functions for cooling schedule (Exponential and Boltz) led to intermediate performance.

The best results were obtained with the new cooling schedules proposed (*BoltzExp*, *ConstExp1* and *ConstExp2*). The increase in the achievement of global optimal shapes for the hybrid cooling schedules are concerned with the increase of freedom given by the algorithm to explore the search space in the initial iterations. When the algorithm starts with bad initial point, he has more iterations to change to a better point until the beginning of temperature decay. It is important to mention that the new cooling schedules were the only functions that reach to a maximum percentage of more than 90 % in the achievement of optimal shapes.

In the future, the results generated in this paper will be employed in a same class of problem but with a new geometry, the double T-shaped cavity. This geometry has a more degrees of freedom and you complete optimization would consume a large computational effort with Exhaustive Search and will need the employment of SA for geometric optimization.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

Professor E. D. dos Santos is sponsored by FAPERGS (Process: 12/1418-4). Prof. L. A. O. Rocha thanks CNPq by financial support.

8. REFERENCES

-
1. Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. and Vecchi, M. P., Optimization by Simulated Annealing. Science, New Series. 1983, v. 220, No 4598, pp 671-680.
 2. Metropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth MN, Teller AH. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. The Journal Of Chemical Physics. 1953, v 21, p 1088-1092.
 3. Eglese R W., Simulated Annealing: A tool for Operational Research. European Journal of Operational Research, 1990, p.271-281.
 4. Bertsimas, D., Tsitsiklis, J., 1993, "Simulated Annealing", Statistical Science, v. 8, n.1, pp 10-15.
 5. Szu H., Hartley R., 1987, "Fast Simulated Annealing", Physics Letters A, v. 122, p. 157-162.
 6. Hajek B., 1988, "Cooling Schedules for Optimal Annealing", Mathematics of Operations Research, v. 13, n. 2, p. 311-129.
 7. Ingber L., 1989, "Very Fast Simulated Re-annealing", Math. Comput. Modelling, v. 12, n. 8, pp.967-973.
 8. Ingber L., 1993, "Simulated Annealing: Patrice versus Theory", Mathl. Comput. Modeling Vol. 18 ,No 11, pp-29-57.

9. Nourani Y., Andresen B., 1998, “A comparison of simulated annealing cooling strategies”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 31, pp. 8373–8385.
10. El-Bouri A., Azizi N., Zolfaghari S., 2007, “A comparative study of a new heuristic based on adaptive memory programming and simulated annealing: The case of job shop scheduling”, *European Journal of Operational Research*, v. 177, pp. 1894–1910.
11. Schneider J. J., Puchta M., 2010, “Investigation of acceptance simulated annealing — A simplified approach to adaptive cooling schedules”, *Physica A*, v. 389, pp. 5822–5831.
12. Kastanya D., 2013, “Evaluating the effects of cooling schedule on the performance of ADORE”, *Annals of Nuclear Energy*, v. 62, pp. 483–486.
13. Brusco M. J., 2014, “A comparison of simulated annealing algorithms for variable selection in principal component analysis and discriminant analysis”, *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 77, pp. 38–53.
14. Bejan A., *Shape and Structure, from Engineering to Nature*. Cambridge University Press, Cambridge, UK; 2000.
15. Biserni C, Rocha LA.O, Bejan A. Inverted Fins: Geometric Optimization of the Intrusion Into a Conducting Wall. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2004, v. 47, pp. 2577–2586.
16. Biserni C, Rocha LA.O, Bejan A. Inverted Fins: Geometric Optimization of the Intrusion Into a Conducting Wall. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2004, v. 47, pp. 2577–2586.
17. Estrada E, Dos Santos ED, Isoldi LA, Rocha LAO. Genetic Algorithm and Constructal Design for Geometric Optimization of Y-Shaped. In: *V MCSUL, Rio Grande - RS. V Conferência Sul de Modelagem Computacional*, 2012. v. 1. p. 45-50.
18. Lorenzini G, Biserni C, Isoldi LA, Dos Santos ED, Rocha LAO. Constructal Design Applied to the Geometric Optimization of Y-shaped Cavities Embedded in a Conducting Medium. *J. Electronic Packaging*. 2011, vol. 133, pp. 041008-1 – 041008-8.
19. Lorenzini G, Garcia FL, Dos Santos ED, Biserni C, Rocha LAO. Constructal design applied to the optimization of complex geometries: T-Y-shaped cavities with two additional lateral intrusions cooled by convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2012, v. 55, p. 1505-1512.
20. Lorenzini G, Biserni C, Link FB, Isoldi LA, Dos Santos ED, Rocha LAO. Constructal Design of T-Shaped Cavity for Several Convective Fluxes Imposed at the Cavity Surfaces. *J. Eng. Thermophys.* 2013, 22, pp. 309–321.
21. Hajmohammadi MR, Poozesh S, Campo A, Nourazar SS. Valuable Reconsideration in the Constructal Design of Cavities. *Energy Convers. Manage.* 2013, 66, pp. 33–40.
22. Lorenzini G, Biserni C, Estrada E da SD, Dos Santos ED, Isoldi LA, Rocha LAO. Genetic Algorithm Applied to Geometric Optimization of Isothermal Y-Shaped Cavities. *Journal of Electronic Packaging*. 2014a, vol 136.
23. Lorenzini G, Biserni C, Estrada ED, Isoldi LA, Dos Santos ED, Rocha LA.O. Constructal Design of Convective Y-Shaped Cavities by Means of Genetic Algorithm. *Journal of Heat Transfer*. 2014b, v. 136, p. 071702-071702-10.
24. Xie Z, Chen L, Sun F. Geometry Optimization of T-Shaped Cavities According to Constructal Theory. *Math. Comput. Model.* 2010, v 52, pp. 1538–1546.
25. Reddy JN, Gartling DK. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC, Boca Raton, Florida, USA; 1994.
26. Zienkiewicz OC, Taylor RL. *The finite element method: The Basis*. Volume 1, Butterworth-Heinemann, Oxford, Ed 5; 2000.
27. *MATLAB User's Guide*, Version 6.0.088, Release 12, The Mathworks Inc., Natick, MA, 2000.
28. Hines. W. W; Montgomery, D. C., Goldsman, D. M, Borrer, C. M., 2006. Tradução: V. R. Lima, *Probabilidade e Estatística na Engenharia*. Cap.12, Rio de Janeiro, LTC.