MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas
Instituto de Matemática, Estatística e Física

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta para o mapeamento do campo conceitual do Cálculo: um estudo dos conhecimentos matemáticos de alunos ingressantes nos Cursos de Engenharias Agroindustriais

Cristiano Rodrigues Garibotti

Santo Antônio da Patrulha

2019

Cristiano Rodrigues Garibotti

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta para o mapeamento do campo conceitual do Cálculo: um estudo dos conhecimentos matemáticos de alunos ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais

Trabalho de Conclusão do Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientador: Profa. Dra. Patrícia Ignácio
Co-orientador: Prof. Dr. Marcelo de Godoi

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA
2019

Ficha catalográfica

G232t Garibotti, Cristiano Rodrigues.
A teoria dos campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o mapeamento do campo conceitual do cálculo : um estudo dos conhecimentos matemáticos de alunos ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais / Cristiano Rodrigues Garibotti. – 2019.
69 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Santo Antônio da Patrulha/RS, 2019.
Orientadora: Dra. Patrícia Ignácio.
Coordenador: Dr. Marcelo de Godoi.

1. Ensino de cálculo 2. Teoria dos campos conceituais 3. SOLO 4. Conhecimentos prévios 5. Quizcalculo I. Ignácio, Patrícia II. Godoi, Marcelo de III. Título.

CDU 37:517

Catalogação na Fonte: Bibliotecária Vanessa Ceiglinski Nunes CRB 10/2174

CRISTIANO RODRIGUES GARIBOTTI

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta para o mapeamento do campo conceitual do Cálculo: um estudo dos conhecimentos matemáticos de alunos ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais

Trabalho de Conclusão do Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Aprovada em: 18/12/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Marcelo de Godoi (Orientador)
(FURG)

Prof. Dr. Manoel Martins
(FURG)

Prof° Dra. Viviane Castro Camozzato
(UERGS)

RESUMO

O nosso entendimento, como professor de Matemática da Educação Superior, das dificuldades dos alunos ingressantes nos cursos de Engenharias, no desenvolvimento das atividades de matemática, e dos altos índices de reprovação e evasão nos cursos de Cálculo Diferencial (RAFAEL e ESCHER, 2015, NASSER, SOUSA e TORRACA, 2015) desencadeou o trabalho de pesquisa aqui realizado. Sendo assim, o objetivo desta pesquisa é de propor ferramentas possíveis para o mapeamento dos conhecimentos matemáticos de alunos nos cursos de Engenharias Agroindustriais da Universidade Federal do Rio Grande elaboradas a partir da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud, com o auxílio da Taxionomia SOLO. Para atingir esse objetivo, foi desenvolvido um *website* (www.quizcalculo.com.br) com um teste sondagem dos conhecimentos prévios, cujos dados podem ser utilizados tanto pelos alunos, como uma orientação de suas lacunas de conhecimento, quanto pelos professores, na preparação do material didático e no entendimento do nível em que o aluno está operando ao resolver tarefas educacionais. Também foram aplicadas avaliações escritas no decorrer do processo educativo para mapeamento dos conhecimentos matemáticos e acompanhamento do processo de aprendizagem. Foi utilizada uma abordagem qualitativa e quantitativa de pesquisa seguindo uma metodologia de pesquisa-ação. Os resultados propiciaram a organização do campo conceitual do Cálculo Diferencial e apontaram que os alunos carregam concepções prévias equivocadas em conceitos matemáticos básicos além de dificuldades na linguagem vernácula e matemática, que acabam se refletindo no entendimento dos conceitos de funções, limites e deviradas, fundamentais no Cálculo Diferencial. Desta forma, a TCC auxiliada pela Taxonomia SOLO se mostrou útil no processo de entendimento e compreensão do campo conceitual do Cálculo Diferencial e do nível de conhecimento dos alunos ingressantes.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo, Teoria dos Campos Conceituais, SOLO, Conhecimentos prévios, Quizcalculo.

ABSTRACT

Our understanding, as a Higher Education Mathematics teacher, of the difficulties of freshmen students of Engineering courses, in the development of mathematics activities, and the high failure rates avoidance in Differential Calculus courses (RAFAEL and ESCHER, 2015, NASSER, SOUSA e TORRACA, 2015) triggered the research work done in this paper. Therefore, the objective of this research is to propose possible tools for mapping the mathematical knowledge of students in the courses of Engenharias Agroindustriais of the Federal University of Rio Grande elaborated from Vergnaud's Conceptual Fields Theory (TCC), with the help of SOLO Taxonomy. In order to achieve this goal, a website (www.quizcalculo.com.br) was developed to perform a quiz to find out the previous knowledge of students, whose data will be used both by students, as an orientation of their knowledge gaps, as well as by teachers, in preparing teaching material and understanding the level at which the student is operating in solving educational tasks. Written assessments were also applied during the educational process to map mathematical knowledge and follow up the learning process. A qualitative and quantitative research approach was used following an action research methodology. The results allowed an organization of the conceptual field of Differential Calculus and pointed out that students carry previous misconceptions in basic mathematical concepts and difficulties in vernacular and mathematical language, which end up reflecting on the concepts of functions, limits and derivatives, that are fundamental in the Differential Calculus. Thus, the TCC assisted by the SOLO Taxonomy proved useful in the process of understanding and understanding the conceptual field of Differential Calculus and the level of knowledge of new students.

Keywords: Calculus Teaching, Conceptual Fields Theory, SOLO, Previous knowlwdge, Quizcalculo.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC – Teoria dos Campos Conceituais

SOLO – Structure of the Observed Learning Outcome

ZDP – Zona de Desenvolvimento Proximal

CD – Cálculo Diferencial

GA – Geometria Analítica

ER – Expressões Racionais

TG – Trigonometria

LE – Logaritmo/Exponencial

FC – Funções

PQ – Polinômios Quadráticos

EI – Equações Lineares e Inequações

GF – Gráfico de Funções

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho partiu do anseio por compreender e estudar as causas dos altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo I, dos estudantes ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais na Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Campus Santo Antônio da Patrulha, que nos anos de 2017, 2018, 2019, alcançou uma taxa de reprovação média de aproximadamente 88,3%.

Desde quando ingressamos na carreira de docente na educação superior, há mais de uma década, percebemos que a falta de motivação, de muitos estudantes, para aprender a matemática, presente nos cursos de graduação de diversas áreas, é inconteste. Essa falta de motivação tem gerado altos índices de reprovações, principalmente nas disciplinas iniciais, tais como Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Geometria Analítica (GASPARIN et al., 2015, MASOLA; ALLEVATO, 2016). Desmotivação essa, muitas vezes, produzida pela dificuldade de aprendizagem. Dentre as principais causas dessa dificuldade, conforme vários autores indicam (CARIELLO et al., 2010; CURY, 2009; LIMA, 2013; MALTA, 2004; MASOLA; ALLEVATO, 2016; PAIS, 2013; PALIS, 2010), se pode citar: dificuldades conceituais crônicas (manipulação algébrica, traçado de gráficos, conceito de função, produtos notáveis, resolução de equações e inequações); diversidade de alunos por sala de aula com diferentes níveis de formação, habilidades e interesses; pouca concentração e motivação; ausência de hábitos de estudos (a qual emerge a questão da transição do ensino médio para o ensino superior); desconhecimento da relevância da matemática para o restante do curso e de suas profissões futuras (devido à pouca maturidade acadêmica[1]); despreparo dos professores; deficiências de leitura e escrita, etc.

Por compreender as dificuldades enfrentadas pelos estudantes, faz-se oportuno e essencial, a busca e aplicação de novas e diversificadas metodologias, para promover o envolvimento emocional e cognitivo do aluno, bem como alternativas que possam contribuir para a motivação dos estudantes, além da compreensão, por parte dos professores dos mecanismos de aprendizagem dos estudantes. Nas últimas décadas têm surgido diversas estratégias de ensino-aprendizagem, na tentativa de contornar essas dificuldades de sala de aula. Dentre essas, podemos citar os métodos

[1] Não se deve confundir maturidade acadêmica com maturidade para com a vida. A primeira não está relacionada com a faixa etária enquanto que a segunda é diretamente proporcional à faixa etária.

ativos de ensino (sala de aula invertida (BERGMAN; SAMS, 2016), o ensino sob medida (NOVAK et al., 1999), a instrução por colegas (MAZUR, 1997), nos quais o aluno se torna o protagonista e aprende de forma mais autônoma, com o apoio de tecnologias, tornando-se corresponsável pelo sucesso da aprendizagem.

No que se refere ao ensino, na maior parte das instituições de ensino brasileiras ainda predomina o modelo tradicional de ensino, que está baseado em um modelo estático de ensino, no qual o professor apresenta os conteúdos de maneira monológica e os alunos ouvem, anotam as explicações para, somente depois disso, estudar, fazer exercícios ou resolver situações-problema. Tais métodos de ensino têm apresentado baixa eficiência no que se refere à aprendizagem dos alunos. Acreditamos que uma das potencialidades a ser buscada com o uso das metodologias que promovam a autonomia e protagonismo dos alunos é superar as formas de ensino que são fundamentadas na transmissão e reprodução dos conteúdos como uma educação bancária (FREIRE, 2005).

Na contramão desse entendimento, Cury (2009) assinala ser necessário conhecer as fontes de dificuldades próprias do estudo da matemática de cada turma, antes de aplicar qualquer nova metodologia. Nesse sentido, julga-se necessário fazer um diagnóstico claro dos conhecimentos prévios de cada turma para poder adaptar o ensino às necessidades dos alunos. Uma alternativa é investigar as concepções prévias, por meio da avaliação prognóstica, e considerá-las como ponto de partida do desenvolvimento cognitivo do sujeito na direção dos conceitos e teoremas científicos.

A avaliação prognóstica é desenvolvida antes de qualquer processo educativo, permitindo ao professor reconhecer que metodologia será a mais eficaz para levar determinado aluno à construção do seu conhecimento. Para tanto, centra-se naquilo que o aluno pode produzir inicialmente, antes de se ter começado qualquer formação. Tem o objetivo de inventariar os conhecimentos do aluno. Pode servir para organizar toda a aprendizagem do aluno. Tem a finalidade de orientar o trabalho do professor (CUNHA, 1998; HADJI, 2001).

Assim sendo, a partir da avaliação prognóstica, é possível, ao professor, propor situações novas, diversificadas, de nível adequado, que auxiliem na ampliação do repertório de esquemas dos estudantes, de modo que os conceitos vão ganhando significados progressivamente (AUSUBEL, 1963). Nesse ponto é importante que se tenha uma forma de feedback para o professor, bem como para o aluno, com o auxílio da avaliação formativa.

A avaliação formativa tem a função de dar um feedback da aprendizagem, tanto para o professor quanto para o aluno, de forma contínua, durante todos os passos do processo educativo do aluno. Isto é, para o aluno, a função é fornecer subsídios para que ele compreenda o seu próprio processo de aprendizagem e o funcionamento de suas capacidades cognitivas implícitas na resolução de problemas. Permite ao aluno ter sempre plena consciência do seu ponto de aprendizagem e de como modificar-se para atingir seus objetivos. Para o professor, a avaliação formativa, tem o papel de orientar e regular a prática pedagógica, pois seus resultados podem ser usados para analisar e identificar a adequação de ensino com o efetivo aprendizado. Com esse tipo de avaliação, é possível ter os subsídios para a busca de informações para a solução de problemas e dificuldades surgidas durante o trabalho com o aluno. É possível que se diga que, a avaliação formativa é o próprio ensino, pois tem por finalidade facilitar a aprendizagem e, como tal, adequar as estratégias para os alunos de acordo com os seus conhecimentos (CUNHA, 1998; HADJI, 2001).

Segundo Vergnaud (1993, 2017b) o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre progressivamente, ao longo de um extenso período de tempo, por meio de experiência, maturidade e aprendizagem. Ele define campo conceitual como sendo “um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados” (VERGNAUD, 1983, apud MOREIRA, 2002). Como exemplos de campos conceituais, na matemática, podemos citar o campo conceitual das estruturas aditivas, multiplicativas e como é de interesse específico da pesquisa, o campo conceitual do Cálculo Diferencial.

A Teoria dos Campos Conceituais centra o ensino e a aprendizagem na conceitualização e os conceitos ganham sentido através das situações. Nessa teoria, situação pode ser entendida como uma tarefa a ser resolvida. Dessa maneira, por meio do viés da organização do conhecimento segundo a TCC deseja-se consolidar o conhecimento, utilizando recursos que conduzam, de forma propositada, o aluno à Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), descrita por Vygotsky (1991). E depois, retirá-lo da ZDP, utilizando outros recursos para que o aprendiz possa construir uma aprendizagem mais sólida, com a consolidação e /ou criação de conceitos novos de forma significativa. Nessa perspectiva, uma das tarefas mais difíceis para o professor, é prover situações aos alunos para que os mesmos possam desenvolver seus esquemas na ZDP.

Assim sendo, a relevância desta pesquisa está nos altos índices de evasão e reprovação na disciplina de Cálculo I e na busca por entender os fatores nelas implicados; no empreendimento da Teoria dos Campos Conceituais enquanto ferramenta capaz de mapear os conhecimentos matemáticos dos alunos ingressantes nos cursos superiores para auxiliar professores na elaboração de seu planejamento; e na utilização da Taxonomia SOLO como metodologia para identificar os tipos de aprendizagem matemática dos alunos da disciplina de Cálculo I.

Considerando esta visão de organização do processo cognitivo, podemos propor a seguinte questão de pesquisa: como mapear os conhecimentos matemáticos dos alunos ingressantes nos cursos de Engenharia Agroindustriais da Universidade Federal do Rio Grande, por meio de ferramentas que possam promover uma avaliação prognóstica capaz de auxiliar os professores para a elaboração de seu planejamento?

Neste contexto, o objetivo geral do trabalho é de propor ferramentas possíveis para o mapeamento dos conhecimentos matemáticos de alunos nos cursos de Engenharias Agroindustriais da Universidade Federal do Rio Grande, elaboradas a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, com o auxílio da Taxionomia SOLO.

A estrutura deste trabalho inicia-se com uma introdução onde é qualificado o principal problema a ser abordado, bem como uma breve justificativa e relevância para a escolha do tema e os estudos sobre os fatores implicados na evasão e reprovação na disciplina de Cálculo I. Uma concisa revisão da literatura é exibida no segundo capítulo, juntamente com uma breve descrição da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, abordando o tema das contribuições de Piaget e Vygotsky para a de Vergnaud. Ainda, no mesmo capítulo, tratamos das contribuições e possibilidades da TCC para o ensino de Cálculo Diferencial (CD). Após, no terceiro capítulo, a metodologia de pesquisa é descrita em detalhe. No quarto capítulo, são feitas as análises dos dados da pesquisa. Nas considerações finais são descritas as considerações sobre o estudo, bem como outras possibilidades para a continuidade da pesquisa. Por fim, as referências apresentam os referenciais que embasaram o presente estudo.

1.1 ESTUDO SOBRE OS FATORES IMPLICADOS NA EVASÃO E REPROVAÇÃO NAS DISCIPLINAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

A evasão no ensino superior vem sendo tema de diversos estudos isolados, desde a década de 70, e configura-se em uma preocupação das universidades públicas e do Ministério da Educação, desde então (POLYDORO, 2000). Dentre as disciplinas iniciais no ensino superior, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é considerada uma das mais difíceis em alguns cursos superiores e tem gerado um alto índice de evasão e reprovações (RAFAEL; ESCHER, 2015; NASSER et. al., 2015).

As dificuldades em Cálculo Diferencial e Integral estão presentes em estudos nacionais e internacionais, que investigam sua causa e indicam diferentes estratégias para contornar essas dificuldades. Diferentes causas e possíveis soluções são indicadas por diversos autores no decorrer desta seção.

Rezende (2003), por exemplo, trata as dificuldades de Cálculo como sendo de natureza epistemológica, o que, segundo o autor, requer uma preparação anterior ao início do ensino do Cálculo, pois alguns resultados do Cálculo estão presentes no ensino básico de matemática: cálculo de áreas de círculos e de volumes de sólidos de revolução, soma de uma progressão geométrica infinita, representação decimal de números reais etc. Porém, o que não está presente é o Cálculo. Ele sugere que um trabalho, feito no Ensino Médio, sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem na disciplina de Cálculo, já que considera a variabilidade uma questão fundamental do Cálculo. Para o autor, o Cálculo é importante para a construção e para a evolução do próprio conhecimento matemático.

Palis (2010) chama a atenção para os problemas causados com a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, apontando que o aluno tem “[...] dificuldades de adaptação ao que se ensina na universidade, aos seus processos de instrução e às suas expectativas de aprendizagem” (PALIS, 2010, p.1). Já os professores que trabalham com alunos recém-ingressos no Ensino Superior não têm uma percepção clara dos conhecimentos e aprendizagens anteriores dos alunos e tendem a supervalorizá-las ou subvalorizá-las. Tanto os professores universitários quanto os professores do ensino básico não compreendem as questões envolvidas nessa transição.

A dificuldade no traçado de gráficos foi constatada por Nasser (2009), e indica que tais dificuldades podem ser atribuídas, principalmente à falta de preparação prévia em relação ao conteúdo de funções, indicando a tecnologia como uma ferramenta que pode ajudar no domínio desses conceitos. Outros autores também apontam a falta de conhecimentos prévios, tais como, simplificação de frações, fatoração, traçado de gráficos de funções afins e quadráticas, cálculo de áreas de figuras geométricas, unidades de medidas, conceito de função, produtos notáveis, resolução de equações (CURY, 2009; MASOLA; ALLEVATO, 2016; GASPARIN et al., 2015).

Já Malta (2004) aponta que a deficiência no uso da linguagem escrita e o pouco desenvolvimento da capacidade de compreensão matemática estão intimamente ligados por uma relação causa-efeito, pois destaca que “[...] sem o desenvolvimento do domínio da linguagem necessária à apreensão de conceitos abstratos (e, portanto, extremamente dependentes da linguagem que os constrói) nos seus diversos níveis, não pode haver o desenvolvimento do pensamento matemático [...]” (MALTA, 2004, p. 44). Pais (2013) ressalta que os símbolos algébricos ou aritméticos necessitam apresentar articulação com a língua vernácula. Para o autor, a aprendizagem matemática requer um consórcio com outras formas de comunicação: língua falada, língua escrita, desenhos, ou seja, articulação entre várias famílias de símbolos. Cury (2004) também afirma que a questão da dificuldade de leitura e escrita estão presentes tanto em exercícios que exigem somente cálculos, como naqueles que necessitam da tradução da linguagem vernácula para a linguagem matemática.

Para tentar minorar as dificuldades do Cálculo Diferencial e Integral, podemos citar ações tais como: relacionar as atividades de aula com o cotidiano profissional do aluno; empregar análise de erros; propor atividades diferenciadas para cada nível de dificuldade; utilizar métodos ativos de ensino, os quais favorecem aos alunos construírem sua autonomia e independência na construção da aprendizagem; utilizar tecnologias etc. (MASOLA; ALLEVATTO, 2016).

É destacado nos estudos apresentados pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991) que:

> [...] ao resolver problemas com regularidade, que permitam diferentes abordagens e incluindo problemas com mais de uma solução, problemas com excesso de dados e problemas sem solução, os alunos vão adquirindo experiência e confiança no modo de procurar os dados necessários, de os interpretar de acordo com as condições dadas e de os relacionar entre si e com o que lhes é pedido. É de esperar que adquiram flexibilidade nos processos de resolução que utilizam, evoluindo, progressivamente, de estratégias informais para estratégias formais [...]. A valorização de diferentes modos de resolução apresentados pelos alunos de uma mesma turma pode estimulá-los a pensarem mais demoradamente no problema e a melhorar a sua compreensão e processo de resolução […]. A discussão de problemas na turma proporciona momentos ricos de aprendizagem, especialmente

> quando se fazem sistematizações de ideias Matemáticas e se estabelecem relações com outros problemas ou com extensões do mesmo problema (p. 29).

O que se percebe, no recorte acima, são indicativos que aproximam tais entendimentos às abordagens teóricas propostas neste trabalho, a citar: Teorias de Piaget, Vygotsky e Vergnaud. Pois trata o professor como um mediador (Vygotsky, 1991), que tem a tarefa de ajudar os alunos a desenvolver seu repertório de esquemas (Piaget, 2002), por meio da proposição de situações (Vergnaud, 1982, 1993, 2009, 2013) frutíferas para os estudantes. Também fica evidente a importância da mediação tanto social, quanto simbólica, produzidas na interação entre os pares e entre professor-aluno, no desenvolvimento da aprendizagem (Vygotsky, 1991).

2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: CONCEITOS, DELINEAMENTOS E POSSIBILIDADES

Gerard Vergnaud, pesquisador francês do campo do Ensino da Matemática, tem investigado ao longo de muitos anos como os estudantes constroem seus conhecimentos matemáticos. Para ele, o estudo dos conhecimentos dos alunos mostra-se essencial para que o professor possa elaborar formas eficientes de trabalhar os conteúdos em sala de aula.

Dedicado aos aspectos práticos e à Didática da Matemática, elaborou a Teoria dos Campos Conceituais, a qual a presente dissertação se filia para mapear alguns conceitos que fazem parte do campo conceitual do Calculo Diferencial e, a partir desses, os conhecimentos matemáticos dos alunos ingressantes nos Cursos de Engenharias Agroindustriais da Universidade Federal do Rio Grande.

Isto posto, o presente capítulo se propõe a expor os conceitos, as filiações, o debate, os delineamentos e algumas possibilidades de trabalho com a Teoria dos Campos Conceituais, apresentando-a como uma teoria capaz de dar condições para que professores do Ensino Superior possam perceber os conhecimentos de seus alunos e elaborar-selecionar metodologias eficazes na produção e construção do conhecimento dos mesmos.

2.1 PIAGET E VYGOTSKY NA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

O legado das teorias de Piaget e Vygotsky permitiram a Gerard Vergnaud desenvolver uma coerente e original teoria sobre como o desenvolvimento conceitual e a aprendizagem ocorrem.

No que se refere à aprendizagem, Piaget (2002) estava interessado no desenvolvimento cognitivo, pois acreditava que a aprendizagem se subordinava a tal desenvolvimento, tendo pouco impacto sobre ele. Por sua vez, Vygostsky (1991) estava mais interessado na aprendizagem, especialmente na aprendizagem no ambiente escolar. Ele tendia a considerar o desenvolvimento como uma consequência da aprendizagem, mas também reconhecia o fato de que o desenvolvimento pode ocorrer sem a aprendizagem formal. Segundo Vergnaud (2013), Vygostky considerava que o sujeito individual podia trabalhar intensivamente sozinho, reorganizando o seu conhecimento prévio à luz do novo conhecimento, e o novo conhecimento à luz do conhecimento prévio. Esse processo é muito similar ao processo de assimilação-acomodação que Piaget considerava central para o desenvolvimento cognitivo.

De acordo com Lima e Santos (2015) e Vergnaud (2017a), as principais contribuições advindas da teoria de Piaget, para a TCC, são os conceitos de esquema e invariantes operatórios. Na teoria de Piaget, esquema é um modelo hipotético de como a informação é armazenada no cérebro (MOREIRA, 1999), e Wadsworth (1996) define como estruturas mentais, ou cognitivas, pelas quais os indivíduos intelectualmente se adaptam e organizam o meio. Enquanto invariantes operatórios são os conhecimentos contidos nos esquemas, isto é, elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória para lidar com uma situação. Os esquemas organizariam a atividade, a representação e a percepção e, também, o desenvolvimento das competências e concepções acerca de um objeto no curso da experiência. O conceito de esquema se presta, portanto, à análise da estrutura da atividade e, para Vergnaud, inclui os invariantes operatórios, ou seja, é uma readequação-associação desses dois conceitos piagetianos.

Vergnaud (2017a) mantém a ideia de Piaget de que a função simbólica é uma interiorização da acomodação, particularmente dos gestos: imita-se um objeto adaptando-se ao mesmo. A adaptação é a modificação que resulta da vivência de uma situação. Piaget disse que o conhecimento é uma adaptação a situações nas quais é necessário fazer algo. Outra ideia profundamente piagetiana que Vergnaud (2017a, p. 25) incorpora é a "[...] ideia de que em determinado momento a bagagem de um indivíduo em um certo conteúdo se apresenta em equilíbrio e que vai se desequilibrar quando encontra um problema novo, o qual não sabe resolver". Por isso, se os estudantes não forem confrontados com situações nas quais eles precisem desenvolver conceitos, ferramentas, limites, eles não têm razão para aprender.

De Vygotsky, Vergnaud toma emprestado dois conceitos importantes: o conceito de mediação e o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). A mediação ocorre tanto por intermédio dos sistemas simbólicos, dentro dos quais está incluída a linguagem (são produtos da cultura e desempenham papel importante na conceitualização), quanto pela mediação do professor (derivada do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que será definida a seguir), que é uma mediação social ou seja, a ideia de ajuda ao próximo (VERGNAUD, 2017a).

Vygotsky (1991) indica a existência de pelo menos dois níveis de desenvolvimento cognitivos de um indivíduo: Nível de Desenvolvimento Real e Nível de Desenvolvimento Potencial. O primeiro é medido pela capacidade de o indivíduo resolver problemas de forma independente e o segundo é determinado através da solução de problemas sob a orientação de alguém (um adulto, no caso de uma criança) ou em colaboração de companheiros mais capazes (VYGOTSKY, 1991). A ZDP é definida por Vygotsky (ibid.) como a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial e define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão no processo de maturação. É uma medida do potencial de aprendizagem; representa a região na qual o desenvolvimento cognitivo ocorre; é dinâmica e está constantemente mudando (MOREIRA, 1999). O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente. A ZDP permite-nos delinear o estado dinâmico de desenvolvimento cognitivo do aprendiz, propiciando o acesso não somente ao que já foi atingido através do desenvolvimento, mas também àquilo que está em processo de maturação.

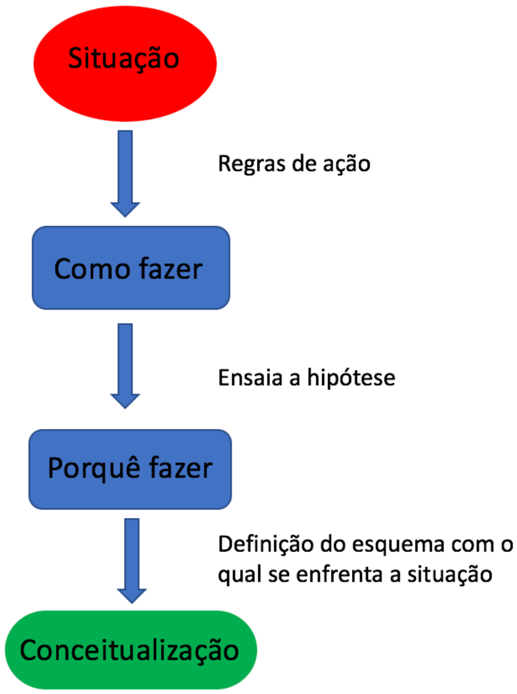
A TCC de Vergnaud amplia o foco piagetiano das operações lógicas e das estruturas gerais do pensamento, para o estudo do funcionamento cognitivo do sujeito-em-situação (MOREIRA, 1999), dessa forma, procura explicar o desenvolvimento dos processos de conceitualização, partindo do princípio de que a maior parte dos nossos conhecimentos são formados por competências que estão disponíveis sob a forma de esquemas. Aliado a isso, incorpora o conceito de mediação tanto social (entre indivíduos) quanto simbólica (linguagem e outros sistemas de símbolos), pois acredita que há uma transformação do conhecimento quando está sendo formulado, quando é debatido, argumentado e quando está em sistemas coerentes de enunciados (VERGNAUD, 2017a).

2.2 GERARD VERGNAUD E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

As ideias de Gérard Vergnaud estão organizadas e sintetizadas, de certo modo, em sua Teoria dos Campos Conceituais, a qual tenta oferecer um quadro de análise para o estudo do processo de aprendizagem dos conceitos. Se trata de uma teoria cognitivista neopiagetiana que tem uma forte contribuição dos trabalhos de Vygotsky. Busca analisar o desenvolvimento e a aprendizagem de competências complexas dos estudantes, sobretudo aquelas implicadas nas ciências e na técnica, a longo prazo, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual do seu domínio. Esta não é específica da matemática, mas é no terreno da matemática que foram desenvolvidas as pesquisas mais sistemáticas, sendo as estruturas aditivas e multiplicativas os campos mais estudados (VERGNAUD, 1982, 1983, 1993, 2009, 2013).

A teoria dos campos conceituais (TCC) parte do pressuposto de que o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização do real (MOREIRA, 2002). Logo, deve-se dar toda atenção aos aspectos conceituais e à análise conceitual das situações para as quais os estudantes desenvolvem seus esquemas. Desta forma, quando uma pessoa enfrenta uma situação, ela se serve de um esquema, isto é uma organização invariante de conduta que compreende o estabelecimento de metas, regras de ação, invariantes operatórios e inferências. Pode-se pensar que quando se enfrenta uma situação percorre-se três níveis de aprendizagem (Figura 1): memorizar regras de ação (se permanece na perspectiva de como fazer); ensaiar proposições (se ensaia uma hipótese de porquê fazer); conceitualizar (se ascende ao porquê do esquema com o qual se enfrenta a situação, que corresponde à conceitualização) (GROSSI, 2017).

Figura 1 - Fazes de aprendizagem quando confrontado por uma situação



Fonte: Elaboração do próprio autor

Para Vergnaud, o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do aprendiz, vai acontecendo ao longo de um período extenso de tempo, em meio às experiências, à maturidade e à aprendizagem (Ibid.) e alguns campos conceituais podem ser importantes para a compreensão de outros. Ele considera útil falar em distintos campos conceituais, se eles puderem ser consistentemente descritos (VERGNAUD, 1982, 1993, 2009, 2013), pois crê que é praticamente impossível estudar as coisas separadamente e, por isso, é preciso fazer recortes. Sendo assim, os campos conceituais constituem-se em frutíferas unidades de estudo que dão sentido aos problemas e às observações feitas em relação à contextualização (SANTANA; ALVES; NUNES, 2015).

Por exemplo, o Cálculo Diferencial e Integral e a Geometria são campos conceituais. Esses campos não são apenas conjuntos de conceitos na TCC, pois o conceito de campo conceitual é mais amplo:

> [...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente interligados no processo de aquisição. (VERGNAUD, 1982, p. 40, tradução nossa).

Ou seja, as ligações do conceito com seus elementos constituem o significado fundamental de um campo conceitual. A descrição de um campo conceitual requer ao mesmo tempo a análise das situações (ou dos problemas), a análise dos procedimentos utilizados pelos alunos e suas argumentações, e as representações simbólicas que utilizam. Por exemplo, os conceitos de multiplicação, divisão, fração, razão, proporção, função linear, número racional, similaridade, espaço vetorial e análise dimensional pertencem todos a um grande campo conceitual que é o das estruturas multiplicativas.

Vergnaud (2017b, p. 42) também define campo conceitual como sendo

> [...] ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos. O conjunto de situações cujo domínio progressivo implica uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem a dominar estas situações.

Sendo assim, a TCC fundamenta-se em certas ideias básicas (VERGNAUD, 2017a):

1. Um conceito adquire sentido em função da multiplicidade de problemas aos quais responde, ou seja, a aprendizagem de um conceito não ocorre somente com uma situação.

2. Os conceitos não funcionam isoladamente, mas sim vinculados uns aos outros. Desta forma, uma situação não é resolvida com apenas um conceito.

3. A aprendizagem das propriedades e relações que envolvem tais conceitos acontecem por uma série de rupturas e filiações durante uma longa história. Ou seja, o domínio de um campo conceitual é um processo longo que necessita de diversas situações.
4. Um conceito não é uma mera definição, ele remete à sua possibilidade de funcionar na resolução de problemas.

É por isso que o conceito, para Vergnaud, tem um sentido muito mais amplo que o comumente utilizado e pode ser definido por um tripé de três conjuntos distintos, não independentes entre si, mas diferentes (VERGNAUD, 1993, 2017b):

S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito (o referente);

I: conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) em que se baseia a operacionalidade dos esquemas, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito (o significado);

R: conjunto de formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações as quais ele se aplica e os procedimentos que dele se nutrem (o significante).

Como as situações que dão sentido aos conceitos, um conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações. O sentido é uma relação do sujeito com as situações e com o significante. Mais precisamente, são os esquemas, isto é, os comportamentos e sua organização, evocados no sujeito por uma situação ou por um significante (representação simbólica) que constituem o sentido dessa situação ou desse significante (VERGNAUD, 1993; MOREIRA, 1999). Por exemplo, o sentido de limite (conceito de Cálculo) para um determinado sujeito (discente) é o conjunto de esquemas que ele pode utilizar para lidar com situações com as quais se depara e que implicam a ideia de limite, bem como o conjunto de esquemas que o sujeito pode usar para operar com símbolos numéricos, algébricos, gráficos e linguísticos que representam o conceito de limite.

Vergnaud define esquema como sendo uma organização invariante da conduta para uma determinada classe de situações. O que é invariante? É a organização, não o comportamento observável; os esquemas não são estereótipos. Portanto, um esquema é um universal eficiente para todo um espectro de situações e pode gerar diferentes sequências de ações, procedimentos de coleta e controle de informações, dependendo das características de cada situação em particular (VERGNAUD, 1993, 2013). Sendo assim, esquema é, necessariamente, feito de quatro categorias de componentes (ibid.):

- uma ou várias metas;
- regras de ação, de busca de informação e de controle;
- invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação;
- possibilidades de inferências.

Os conhecimentos contidos nos esquemas são designados pelas expressões *conceito-em-ação* e *teorema-em-ação*. Vergnaud, também os designa pela expressão mais geral *invariantes operatórios*. Teorema-em-ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real; conceito-em-ação é uma categoria de pensamento considerada como relevante (MOREIRA, 1999). Esses conhecimentos constituem a base conceitual implícita, ou explícita que permite obter informação pertinente e, a partir dela e das metas a alcançar, inferir as regras de ação mais pertinentes. Ou seja, conceitos em ação permitem captar as informações pertinentes no ambiente e selecionar os teoremas-em-ação necessários para a avaliação das metas suscetíveis de formar-se e das regras de ação para alcançá-las. Contudo, é importante salientar que um teorema-em-ação não é um verdadeiro teorema, sequer um conceito-em-ação é um verdadeiro conceito científico a menos que se tornem explícitos. Em geral, os alunos não são capazes de explicitar ou mesmo expressar em linguagem natural seus teoremas e conceitos-em-ação. Aí entra o papel do professor: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos, e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito. Ou seja, é um papel de mediador. Porém, pelo fato de os estudantes não conseguirem explicitar esses teoremas e conceitos-em-ação, o professor deve encontrar maneiras de identificar e mapear tais invariantes operatórios. Para isso, tem que se ter clareza de quais são os invariantes operatórios científicos envolvidos na categoria de situações que se está trabalhando.

2.3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA

A teoria dos campos conceituais se interessa pela análise das operações de pensamento porque esse é o centro da conceitualização. Portanto, é necessário que essas operações de pensamentos estejam presentes nos problemas que os alunos encontram. Porém, o aluno não aprende sozinho, apesar de percorrer boa parte do caminho sozinho. Desta forma, o docente tem o papel fundamental de oferecer situações, e mais do que isso, realizar muitos outros atos de mediação: esclarecer o objetivo geral do problema; dar exemplos; identificar e selecionar informação pertinente e como dela fazer uso; fazer emergir, pelo menos parcialmente, os conceitos e teoremas pertinentes; facilitar as inferências na situação, colocar em palavras e em símbolos os conhecimentos, as situações e as regras que organizam a atividade.

De acordo com Vergnaud (1993, 2017b), para que os sujeitos da aprendizagem dominem um campo conceitual, novos problemas devem ser estudados ao longo de vários anos. As dificuldades conceituais são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas. Vergnaud (1993) defende a ideia de se trabalhar situações-problema para que o conhecimento matemático se torne significativo. Esse tipo de abordagem tem uma forte relação com a interação aluno-objeto, além de explorar em sala de aula situações espontâneas que poderiam ser entendidas no cotidiano. Ou seja, é uma interação esquema-situação, onde o esquema é o referente do sujeito do conhecimento e a situação é a circunstância e o conceito em que o objeto a ela se apresenta (CARVALHO JR.; AGUIAR JR. 2007).

A riqueza na variedade das situações é proporcional à amplitude da construção dos conceitos. Dessa forma, o docente tem o papel de propor situações muito variadas, e cada vez mais complexas, de forma a criar filiações e rupturas. Muitas vezes, deve-se dar pequenos passos, mas, outras vezes, deve-se dar grandes passos para desestabilizar as concepções do aluno. Sendo assim, as situações devem ser cuidadosamente escolhidas, ordenadas, apresentadas no momento certo e dentro da ZDP, buscando identificar os invariantes operatórios mobilizados pelo estudante para tratar da situação em questão, e, dessa forma, estimular a criação/adaptação de um novo esquema.

Outra importante contribuição da Teoria dos Campos Conceituais para o ensino é a questão do conhecimento implícito e do conhecimento explícito. Apesar de a ciência ser simbólica, formal e explícita, é preciso ter sempre em mente que o conhecimento do aluno, como de qualquer outro sujeito, é, em grande parte implícito (Moreira, 2017). Portanto, o ensino deve facilitar a transformação dos invariantes operatórios implícitos em conceitos e teoremas científicos, explícitos, isto é, favorecer a transformação do conhecimento implícito em explícito, sem nunca subestimá-lo ou desvalorizá-lo.

É importante lembrar que o domínio de um campo conceitual é um processo difícil e sobretudo demorado e se dá de forma progressiva, isto é, à medida que o aprendiz vai dominando o campo conceitual, o conhecimento implícito vai progressivamente evoluindo para o conhecimento explícito, ao invés de substituí-lo. Dessa forma, o professor tem papel essencial nesse processo, pois sem o ensino não se pode acreditar que o sujeito passe a dominar campos conceituais complexos e formalizados como, por exemplo, o campo conceitual do Cálculo Diferencial.

Segundo Vergnaud (2017a, p. 34),

> [...] o benefício principal da TCC no ensino é a informação aos docentes sobre o processo dos alunos, que serão orientados pelos erros que eles cometem. Estes erros correspondem às hipóteses incompletas que os alunos percorrem numa aprendizagem.

Trata-se de saber onde o aluno se encontra para melhor saber como auxiliá-lo nas tarefas seguintes e novas. Isso faz sentido, já que Vergnaud considera que a aquisição de conhecimentos é orientada pelas situações e problemas previamente dominados pelo sujeito. Tais dificuldades podem ser examinadas em termos dos invariantes operatórios, ou seja, verificar se os invariantes operatórios que os estudantes estão utilizando na resolução de problemas correspondem com os invariantes operatórios da teoria. Isto é, aos teoremas e conceitos científicos adequados à resolução do problema (situação) em pauta.

2.3.1 UMA PROPOSTA DO USO DA TEORIA DO CAMPOS CONCEITUAIS PARA O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Conforme mencionado anteriormente, o eixo principal desta pesquisa é a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, que herda de Piaget e Vygotsky alguns conceitos que norteiam seus trabalhos. Sendo assim, apontamos aqui o que de mais importante para nossa proposta será utilizado referente a cada uma das teorias supracitadas. De Piaget utilizamos especialmente duas ideias: a primeira baseia-se no fato de que o aprendiz constrói o conhecimento a partir de sua ação sobre o objeto (Lima e Santos, 2015) e a segunda ideia é a da equilibração, que é o processo composto pela assimilação (processo externo) e acomodação (processo interno). De Vygotsky, aproveitamos essencialmente três conceitos: Ferramenta cultural (como mediadora da situação), ZDP (identificar aquilo que o aprendiz é capaz de aprender com ajuda de pares) e a formação de conceitos. O conceito que procuramos desenvolver nos aprendizes em sala de aula é o científico. Em uma disciplina, qualquer que seja ela, sempre procuramos, enquanto professores, trabalhar com definições de forma que um determinado conhecimento adquirido possa servir para "x" situações.

Como já mencionado, estamos propondo utilizar a TCC de Vergnaud, que considera que a organização do conhecimento está estruturada em campos conceituais e o domínio desse conhecimento se dá ao longo de um extenso período de tempo, por meio da experiência, maturidade e aprendizagem, como ferramenta para esboçar o campo conceitual do Cálculo Diferencial.

Para que os sujeitos da aprendizagem dominem um campo conceitual, novos problemas devem ser estudados ao longo de vários anos. As dificuldades conceituais são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas. Vergnaud (1993) defende a ideia de se trabalhar situações-problema para que o conhecimento matemático se torne significativo. Esse tipo de abordagem tem uma forte relação com a interação aluno-objeto, além de explorar em sala de aula situações espontâneas que poderiam ser entendidas no cotidiano.

Para exemplificar a abordagem do conceito de diferencial enquadrada na teoria dos campos conceituais de Vergnaud transcrevo abaixo o trecho de Lima e Santos (2015):

> Quando, por exemplo, um docente explicita o conceito de diferencial (significado: I) ao aprendiz, o faz ao menos com a tradicional dedução utilizando o conceito prévio de limites (significante: R) e também explicitando um exemplo de aplicabilidade prática (referente: S). Espera-se, assim, que o discente possa ser capaz de exercer um isomorfismo entre as diversas situações (reais ou não) apresentadas e, com isto, a indução para a consolidação do novo conceito. Em geral, uma quantidade excedente de exemplos para a análise isomorfa permite um melhor entendimento, pois explora, com uma maior faixa, a interpretação do(s) próprio(s) discente(s), i.e., as possíveis interpretações conceituais do objeto de estudo.

De maneira mais clara: uma gama maior de exemplos e situações é capaz de atingir uma faixa maior de discentes no processo de aprendizagem e permite uma chance maior de construção de esquemas por parte do aluno e, consequentemente, o aluno, tem mais possibilidades de criar um campo conceitual bem estruturado sobre a derivada, quando tem a oportunidade de estudar e investigar diferentes situações que lhe deem sentido, unidos pelas representações.

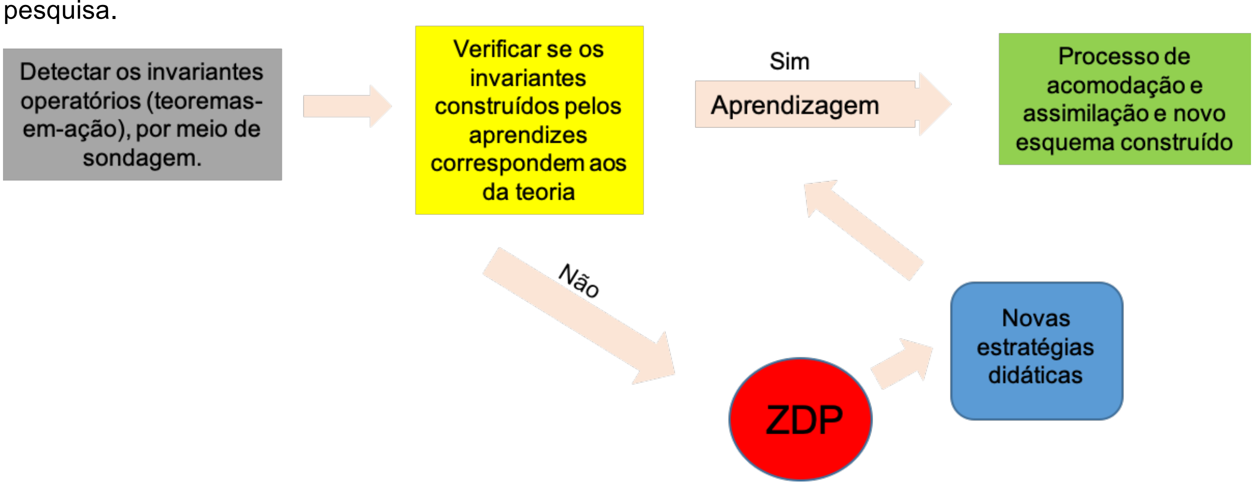
Por meio do algoritmo abaixo, propomos uma estratégia da utilização da TCC aplicada a um campo conceitual genérico.

1. Detectar os invariantes operatórios construídos pelos estudantes por meio de sondagem.

2. Determinar os invariantes operatórios do campo conceitual a ser estudado (I) por meio de pesquisa.
3. Determinar quais são as situações que dão sentido a estes invariantes operatórios (S) e associar as representações (R) a esse conjunto de situações. Importante ressaltar que as representações e as situações estão atreladas horizontalmente. Elas coexistem.
4. Confrontar os estudantes com tais situações.
5. Verificar se os invariantes construídos pelos estudantes correspondem aos da teoria (por meio de avaliações escritas).

A Figura 2 apresenta um mapa conceitual para a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud articulado aos objetivos da pesquisa, tendo em vista que mostra a importância do processo de construção do campo conceitual de trabalho aliado ao mapeamento dos conhecimentos dos estudantes, possibilitando assim que o professor possa ter ferramentas para melhor mediar o processo de aprendizagem dos estudantes.

Figura 2 - Mapa conceitual da teoria dos campos conceituais articulada com os objetivos desta pesquisa.

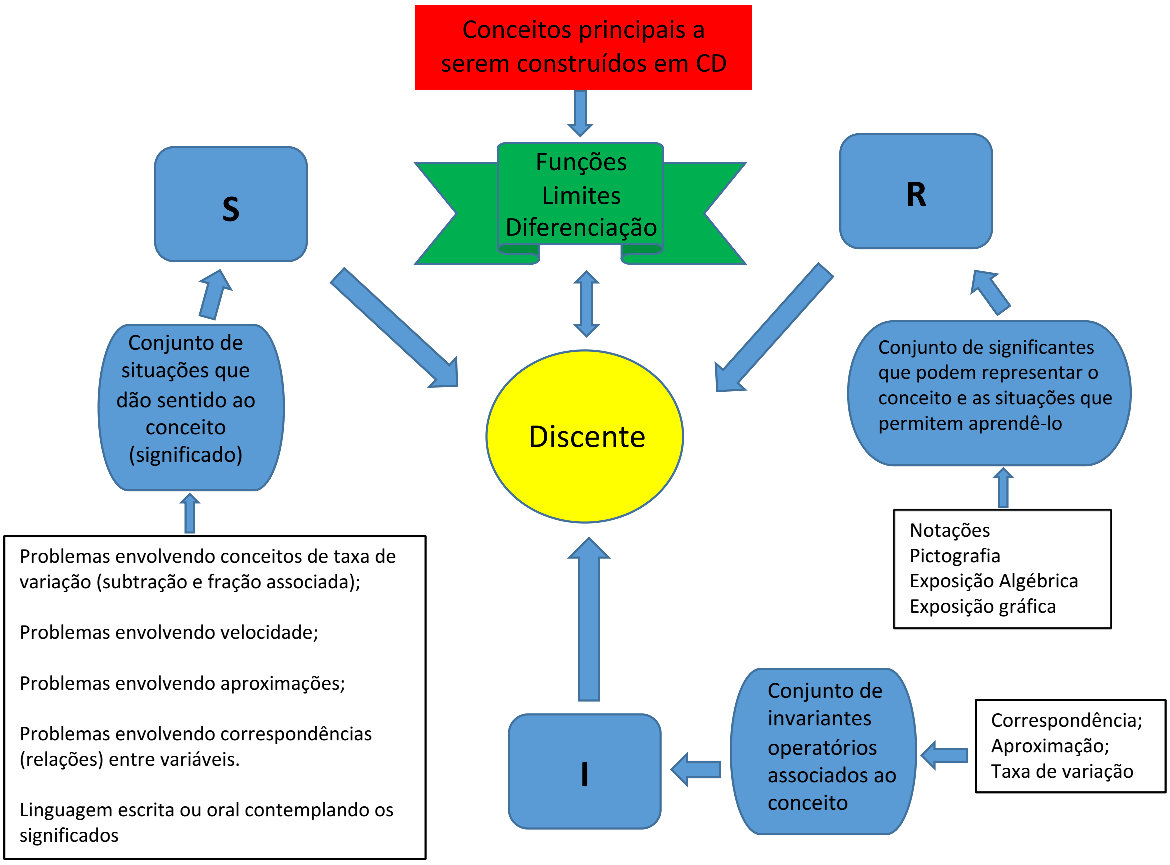


Fonte: Elaboração própria do autor

Desta forma, ao aprofundar seus conhecimentos sobre a teoria dos campos conceituais, o professor terá subsídios para elaborar e propor situações mais diversificadas visando o desenvolvimento dos conceitos do campo conceitual do Cálculo Diferencial.

Na Figura 3 apresentamos uma possível proposta das estruturas para o entendimento do campo conceitual do Cálculo Diferencial (CD). Ou seja, para a construção dos conceitos de funções, limites e derivadas, o discente é confrontado com conjunto de situações que podem incluir taxas de variações, problemas envolvendo velocidade, etc. O discente vai precisar de invariantes operatórios (ideia de correspondência, aproximação e taxa de variação) para analisar e dominar tais situações. Por sua vez, os conceitos e suas relações, e consequentemente as situações e os esquemas que evocam, são representados por um conjunto de significantes (exposição linguística, exposição gráfica, notações, etc).

Figura 3 - Mapa conceitual do Cálculo Diferencial



Fonte: Adaptado de Silva e Santos (2015)

2.4 TAXONOMIA SOLO E A TCC: ARTICULAÇÕES POSSÍVEIS

Como uma das ferramentas para auxiliar o mapeamento dos conhecimentos matemáticos dos estudantes, escolhemos a aplicação de um teste múltipla escolha por meio de um *website*. Na elaboração e correção das questões desse *website*, foi utilizada a taxonomia SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome), proposta por Biggs e Collis (1982).

A metodologia SOLO fornece uma maneira sistemática de descrever como o desempenho de um aluno cresce em complexidade ao dominar muitas tarefas (situações), especialmente o tipo de tarefas realizadas na escola. Segundo esses autores, os indivíduos aprendem um novo conhecimento através de estágios ascendentes que envolvem estruturas cognitivas cada vez mais complexas. Em cada estágio, há uma estrutura comum que representa níveis progressivos de complexidade. Cada nível destina-se a abranger e transcender o nível anterior. Os níveis de complexidade estabelecidos na teoria da taxonomia SOLO são: pré-estrutural, uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstrato estendido.

No desenvolvimento da SOLO, Biggs e Collis (1982) levaram em conta muitos fatores que afetam a aprendizagem dos alunos, tais como: conhecimento prévio dos alunos e equívocos, motivos e intenções em relação à educação e suas estratégias de aprendizagem. O resultado é um constructo que tem dimensões quantitativas e qualitativas.

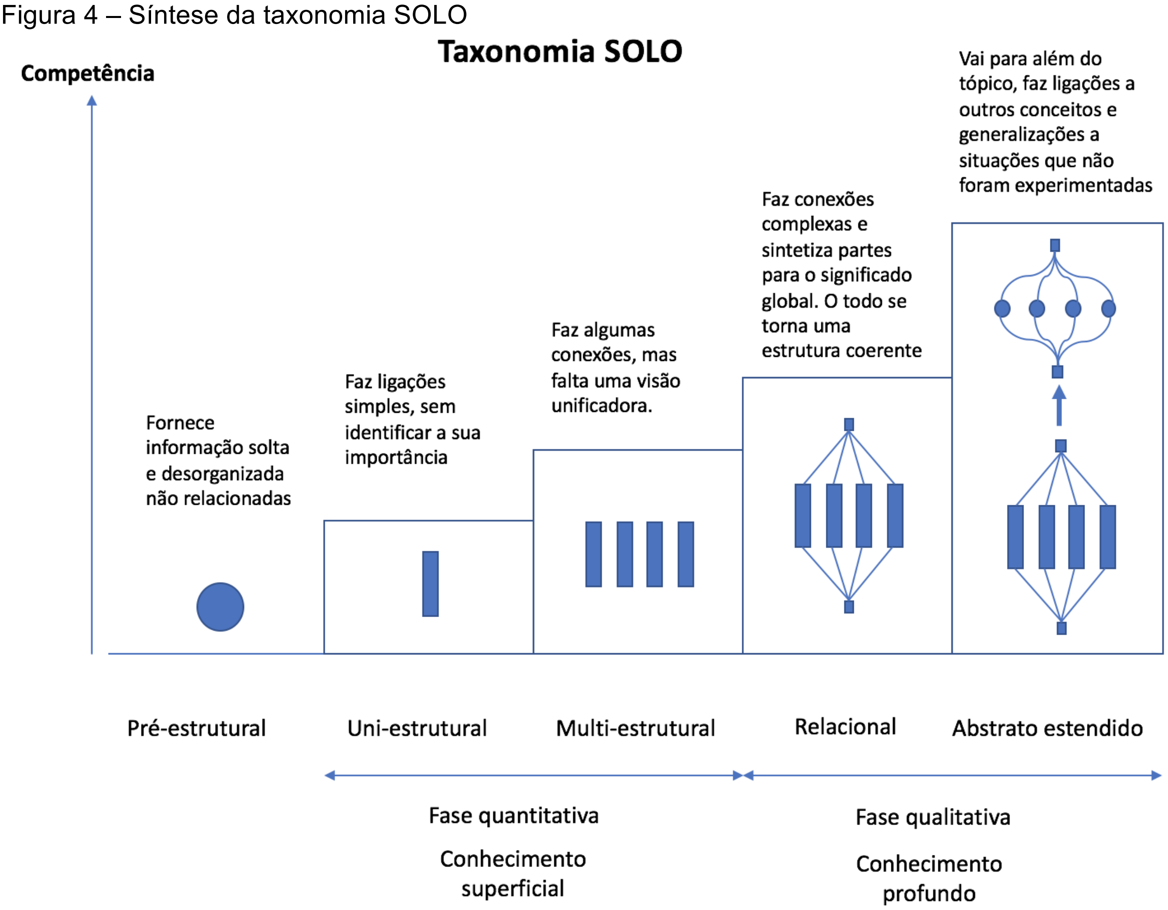
Para esses autores, no âmbito escolar podem ser identificados dois tipos de aprendizagem: superficial e profunda. A superficial, na qual o conhecimento se acumula em maior quantidade, diz respeito a respostas uniestruturais e multiestruturais. Isto é, os estudantes focalizam nos tópicos e elementos mais importantes, para tentar reproduzi-los com precisão, por isso os estudantes não vêem conexão entre os elementos ou significados e as implicações do que é aprendido. A profunda, que tem respostas abstratas relacionais estendidas, vem com uma mudança qualitativa em como as ideias são entendidas em conexão com outras ideias. Se refere a um entendimento intrínseco sobre o conteúdo: a procura por analogias, relações com o conhecimento prévio, teorização sobre o que foi aprendido e derivações de extensões e exceções (BIGGS; COLLIS, 1982). Essa mudança qualitativa é cognitivamente desafiadora, mas Biggs e outros que escreveram sobre a SOLO nos aconselham a lembrar que os últimos níveis do SOLO não são necessariamente mais “difíceis” do que os níveis anteriores; afinal, lembrar-se de um grande número de fatos discretos pode ser bastante difícil. Isso também não ajuda. Hattie e Brown (2004, p. 17-18) escrevem: “Profundidade não é o mesmo que dificuldade - talvez seja essa confusão que explica porque tantas questões colocadas pelos professores não exigem que os alunos usem habilidades de raciocínio de alto nível, mas sim requerem uma maior atenção aos detalhes”.

De acordo com Biggs e Collis (1982), a taxonomia possibilita a avaliação de um conteúdo para identificar, em termos gerais, o nível em que o aluno está atualmente operando, ao responder a tarefas educacionais. Em linguagem simples, a taxonomia

SOLO consiste em quatro níveis: uma ideia, múltiplas ideias, relacionando as ideias e ampliando as ideias (BIGGS; COLLIS, 1982, p. 39). A SOLO é um meio de classificar os resultados do aprendizado em termos de sua complexidade, permitindo-nos avaliar o trabalho dos alunos em termos de sua qualidade, não de quanto disso e daquilo eles acertaram, bem como pela quantidade de informação processada, tendo como base as respostas dos alunos. Dessa forma, ao longo do desenvolvimento das tarefas, o enfoque não está nas respostas corretas ou erradas, mas sim na estrutura (natureza) das respostas, que, codificadas em categorias baseadas nos níveis SOLO, tornam possível inferir uma mudança ao longo do tempo.

A Figura 4, apresentada à frente, sintetiza a descrição dessa taxonomia, utilizando as especificações já indicadas.

Figura 4 – Síntese da taxonomia SOLO



Fonte: Adaptado de Biggs (20-?)

A taxonomia SOLO é útil para analisar em que nível os alunos estão operando e em que nível eles estão cometendo seus erros e equívocos, dependendo do nível de demanda das tarefas. Um aprendiz que esteja pensando uni-estruturalmente, provavelmente, considerará um conceito matemático em uma dimensão e, portanto, perderá as outras dimensões úteis de um conceito ou problema matemático. Da mesma forma, o aprendiz pode ser multi-estruturado, mas ainda não consegue relacionar o que ele está pensando em relação a outros conceitos e ideias. Essas lacunas nos níveis de pensamento dos alunos proporcionam lacunas sobre quais erros matemáticos e equívocos ocorrem.

Segundo Biggs (20-?), a aprendizagem é construída pelas atividades que os alunos realizam (situações); aprender é sobre o que eles fazem, não sobre o que nós professores fazemos. Da mesma forma, a avaliação é sobre quão bem eles alcançam os resultados pretendidos, não sobre quão bem eles relatam de volta para nós o que nós lhes dissemos ou o que eles leram. A Taxonomia SOLO ajuda a mapear os níveis de compreensão que podem ser incorporados nos resultados de aprendizagem pretendidos. Dessa forma, a classificação por níveis SOLO pode dar um bom indicativo da ZDP que o aluno se encontra no momento da tentativa de resolução da tarefa. De posse dessa informação o professor pode agir e apresentar situações para conduzir o estudante ao domínio progressivo do campo conceitual em questão.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo discorreremos sobre os caminhos metodológicos que foram percorridos para a realização desta pesquisa. Conforme mencionado anteriormente, esta dissertação tem por objetivo propor ferramentas possíveis para o mapeamento dos conhecimentos matemáticos de alunos ingressantes na disciplina de Cálculo I elaboradas a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, com o auxílio da Taxionomia SOLO. Para isso, optamos por uma pesquisa com uma abordagem tanto qualitativa que se caracteriza, de acordo com GIL (2002), como sendo exploratória e explicativa, quanto quantitativa, e seguirá um delineamento de pesquisa-ação, já que estamos investigando nossa própria prática docente. É uma pesquisa exploratória, pois tem por objetivo propiciar maior familiaridade com o problema de retenção e reprovação na disciplina de Cálculo I dos estudantes ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais, com vistas a torná-lo mais explícito e constituir hipóteses (GIL, 2002). É explicativa, pois tem a preocupação de identificar os fatores ou fenômenos que contribuem para a ocorrência da alta taxa de reprovação e retenção na referida disciplina.

3.1 PESQUISA-AÇÃO

A pesquisa-ação pode ser definida, segundo Thiollent (1986, p.14), como:

> [...] um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação ou com a resolução do problema coletivo e no qual os pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo e participativo.

Ou seja, a pesquisa-ação deve haver envolvimento ativo do pesquisador e a ação por parte das pessoas envolvidas no problema. Ela inicia-se a partir da observação de um problema do cotidiano do pesquisador e tem por objetivo melhorar a prática.

No campo educacional, a pesquisa-ação deve ser entendida como um processo de constante reflexão e indagação sobre o que acontece em sala de aula, no intuito de resolver os problemas que emergem do cotidiano (KIELT, 2017). Os professores são incentivados a questionar suas próprias ideias e teorias educativas, o que exige dos mesmos um olhar crítico, reflexivo e uma disposição para a mudança na sua prática.

3.2 DELINEAMENTO

Esta pesquisa foi desenvolvida na Universidade Federal do Rio Grande – FURG, no Campus de Santo Antônio da Patrulha – RS, na qual, enquanto docente, constatamos a evasão, retenção e desmotivação para aprender Cálculo Diferencial.

Este campus da FURG se localiza no litoral norte do Rio Grande do Sul e recebe estudantes provenientes de diferentes partes do Brasil, atendendo cerca de 300 alunos, divididos nos cursos de Engenharia Agroindustrial – Indústrias Alimentícias, Engenharia Agroindustrial – Agroquímica, Licenciatura em Ciências Exatas, Administração de Empresas e Engenharia de Produção. A oferta desses cursos ocorre na modalidade presencial, no período diurno. A biblioteca, atende de forma satisfatórios aos cursos. Há rede *wifi* com conexão à internet por todos os prédios e laboratório de informática para utilização dos alunos e professores.

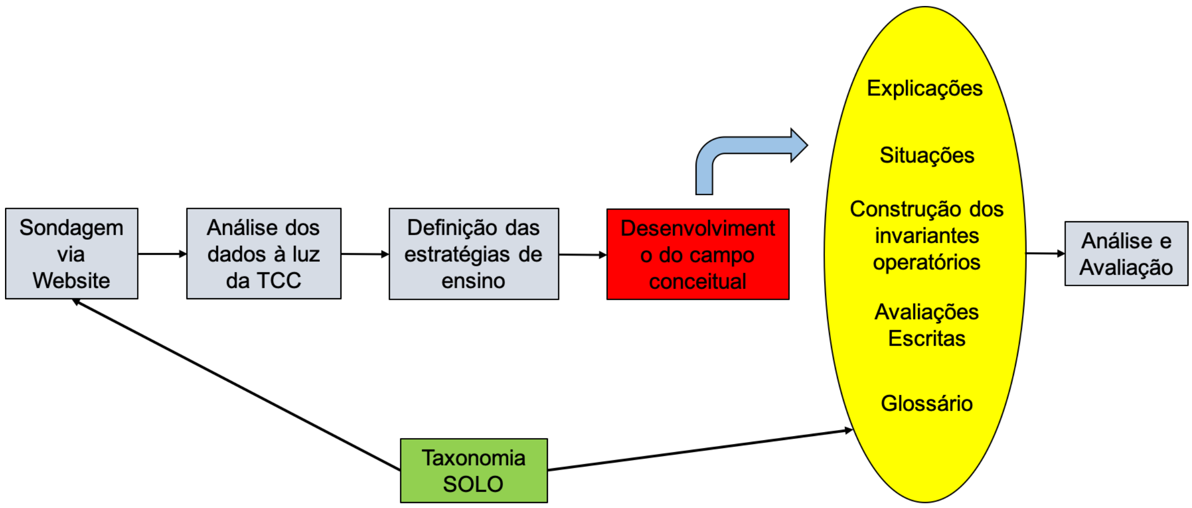
Tendo como base teórica a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, com o objetivo de mapear os conhecimentos matemáticos dos estudantes, foi elaborado um teste com questões múltipla escolha para mapear os conhecimentos matemáticos prévios dos estudantes para ser aplicado na primeira semana de aula.

Os estudantes matriculados na Disciplina de Cálculo I, divididos em duas turmas, aqui denominadas de “Turma 1” e “Turma 2”, foram incentivados a realizar o teste por meio do *website.* Foi dado o prazo de uma semana para que eles realizassem o teste. Os dados foram coletados e tratados no software Excel e os resultados foram compilados de maneira a se ter uma ideia geral do nível de desenvolvimento SOLO das turmas, por área de conhecimento. Como é um teste individual, os resultados também podem ser analisados de tal forma. Ao finalizar o teste, cada estudante recebeu o gabarito das questões com o respectivo tema de cada uma, para que o mesmo pudesse servir como um guia de estudo individual para cada estudante. O professor, em posse dos dados, pode fazer um mapeamento dos conhecimentos matemáticos prévios da turma.

À medida que as aulas avançavam, optou-se por ampliar o entendimento dos conhecimentos matemáticos dos estudantes por meio de avaliações escritas. Desta maneira, foram aplicadas três avaliações com intervalo significativo entre elas versando sobre os conceitos de funções, limites e derivadas. Os estudantes foram incentivados a elaborarem um glossário matemático, no intuito de desenvolverem a linguagem escrita e, também, como forma de exercitarem a explicitação dos invariantes operatórios.

Essa caminhada está resumida Figura 5 abaixo.

Figura 5 – Visão geral da execução da pesquisa



Fonte: Elaboração própria do autor.

3.3 SONDAGEM: INSTRUMENTOS DE OLETA DE DADOS

Temos a intenção de investigar o nível de desenvolvimento cognitivo dos estudantes ingressantes na universidade no que diz respeito à capacidade de compreensão dos conceitos matemáticos necessários para o bom aproveitamento nas disciplinas de Cálculo I. Isso porque, de posse desses resultados, será possível criar estratégias de ensino que ajudem o desenvolvimento desses estudantes e possibilitem o mapeamento do Campo Conceitual do Cálculo Diferencial.

Moreira (2002, 2017) salienta que, na TCC, concepções prévias não devem ser consideradas ideias erradas, mas o ponto de partida do desenvolvimento cognitivo do sujeito na direção dos conceitos e teoremas científicos. Contudo, algumas concepções prévias podem se tornar um obstáculo tão grande que será melhor abandoná-las. Nesse sentido, ferramentas de sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos são de importante valia para a presente pesquisa.

Para este estudo, os instrumentos de coleta de dados utilizados foram: teste de conhecimentos prévios, avaliações escritas e diário de campo.

3.3.1 TESTE DIAGNÓSTICO DE CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS POR MEIO DE *WEBSITE*

O teste de conhecimentos prévios foi elaborado de maneira a avaliar os conhecimentos matemáticos dos estudantes ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais da FURG. As questões foram organizadas para avaliar as seguintes áreas de conhecimento:

- Geometria Analítica (GA)
- Expressões Racionais (ER)
- Trigonometria (TG)
- Logaritmo/Exponencial (LE)
- Funções (FC)
- Polinômios Quadráticos (PQ)
- Equações Lineares e Inequações (EI)
- Gráfico de Funções (GF)

A escolha de tais áreas de conhecimento se deu de acordo com o que julgamos serem conhecimentos necessários para o sucesso na disciplina de Cálculo I. Em nossa opinião, os campos conceituais das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas deveriam estar bem desenvolvidos para que o aprendiz tivesse ferramentas mínimas para dominar o campo conceitual do Cálculo Diferencial. Assim sendo, as questões foram concebidas dentro desses campos conceituais e organizadas de acordo com a taxonomia SOLO, a qual propõe classificação por níveis de complexidade.

As questões do teste procuraram oferecer situações (S) diversas que envolveram alguns conceitos fundamentais dos campos conceituais das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas, que, em nossa avaliação, consideramos importantes para a construção do Campo Conceitual do Cálculo Diferencial pelo estudante. Para a correta solução das questões, os alunos devem mobilizar os invariantes operatórios da teoria (I) e compreenderem o conjunto de simbologias que permitem a representação dos conceitos (R).

Foram elaboradas 3 questões dentro de cada área do conhecimento, totalizando 24 questões, e tais questões foram classificadas dentro de três níveis consecutivos propostos na taxonomia SOLO, a saber, uni-estrutural (I), multi-estrutural (II), relacional (III). O teste pode ser encontrado no *website* “Teste

Diagnóstico de Conhecimentos Matemáticos”, de endereço: www.quizcalculo.com.br e suas questões estão dispostas no Apêndice A.

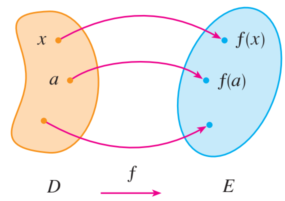
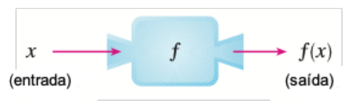
3.3.2 AVALIAÇÕES ESCRITAS

Buscando mapear o conhecimento dos estudantes no campo conceitual do Cálculo Diferencial durante o processo de aprendizagem, foram elaboradas três avaliações escritas para serem aplicadas ao longo do semestre. Como base para a construção dessas avaliações foi importante ter em mãos os resultados do teste diagnóstico de conhecimentos prévios, e também elaborar um mapeamento do campo conceitual em questão.

Conforme mencionado anteriormente, selecionamos três conceitos principais do campo conceitual do Cálculo Diferencial (funções, limites e derivadas) e ampliamos a discussão apresentada na Figura 3. Dessa forma, vamos apresentar, nos Quadros 1, 2 e 3 abaixo, os conceitos de funções, limites e derivadas da forma como utilizamos na pesquisa. No desenvolvimento desses conceitos, à luz da TCC, apresentamos as situações, os invariantes operatórios e as representações simbólicas. É importante ressaltar, que para este momento, os invariantes operatórios foram elaborados por nós. Porém isso não significa que o aluno seja capaz de enuncia-lo e, mesmo se o fizer, poderá fazê-lo de um modo que não corresponda ao conteúdo do conceito evocado pelo livro ou pelo professor.

Tendo como como base esses quadros, as avaliações foram elaboradas de forma a mapear os invariantes operatórios que os estudantes mobilizam para tentar enfrentar situações que envolvem esses três conceitos. As questões das avaliações foram retiradas e modificadas a partir de problemas do livro de Stewart, 2001. Foram aplicadas três avaliações: a primeira versando sobre o conceito de funções, a segunda sobre o conceito de limites e a terceira sobre o conceito de derivadas. As três avaliações escritas estão disponíveis nos Apêndices B, C e D, respectivamente.

Quadro 1- Mapeamento do conceito de função sob a perspectiva da TCC

Conceito: Função		
Situações que envolvem o conceito de funções	*Invariantes operatórios passiveis de serem enunciados pelos estudantes*	*Representações simbólicas*
Problemas envolvendo correspondências (relações) entre variáveis, como por exemplo: • Numero de pães que vou comprar, com preço a pagar • Número de questões certas num teste, com a nota tirada. • Velocidade média de um automóvel, com o tempo de duração de uma viagem Consumo de combustível de um automóvel, como a velocidade.	A função é uma relação entre dois ou mais conjuntos. Função é uma maneira de associar a cada valor de um conjunto D um único valor de um conjunto E. O gráfico de uma função associa a cada par de elementos relacionados pela função com um ponto em um espaço adequado (no $\mathbb{R}^2$, geometricamente representado pelo plano cartesiano). Variável, correspondência e dependência.	 $f: D \to E$ $f(x) = y$ 

Fonte: Elaboração própria do autor.

Quadro 2 - Mapeamento do conceito de limite sob a perspectiva da TCC

Conceito: Limite		
Situações que envolvem o conceito de limite	*Invariantes operatórios passiveis de serem enunciados pelos estudantes*	*Representações simbólicas*
Problemas envolvendo aproximação: • Encontrar a área de uma região curva • Encontrar a tangente a uma curva	Aproximação Se o limite existe ele é único. Se o limite da função existe é porque os limites laterais da função existem e coincidem. Reciprocamente, se os limites laterais de uma função existem e coincidem então esse tal limite será o limite da função. Uma função real $f(x)$ é contínua no ponto a se, e somente se, limite quando x tende a a de $f(x) = f(a)$	$\lim_{x \to a} f(x) = L$ $f(x) \to L, quando\ x \to a$

Fonte: Elaboração própria do autor.

Quadro 3 - Mapeamento do conceito de derivada sob a perspectiva da TCC

Conceito: Derivada		
Situações que envolvem o conceito de derivada	*Invariantes operatórios passiveis de serem enunciados pelos estudantes*	*Representações simbólicas*
Problemas envolvendo taxas de variação • Velocidade instantânea de corpos ou objetos em movimento • Coeficiente angular da reta • Custo marginal • Taxa de crescimento de uma população • Taxa de variação de temperaturas	Derivada de uma função é o limite da taxa média de variação de y em relação a x, quando $\Delta x \to 0$. Derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. A taxa de variação instantânea de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto. O gráfico de uma função diferenciável é uma curva suave, sem nenhum pico "pontudo".	$\frac{dy}{dx}$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ y' $f'(x)$ Dy

Fonte: Elaboração própria do autor.

3.3.3 DIÁRIO DE CAMPO

Neste diário de campo foram anotadas importantes observações provenientes da participação dos estudantes durante as aulas presenciais, nos quais eu pude identificar algumas dificuldades e invariantes operatórios construídos de maneira equivocada, bem como os avanços e concepções corretas. O diário foi produzido no período de 4 meses de aula do semestre regular.

3.4 ANÁLISE DE DADOS

Os dados coletados na pesquisa foram analisados qualitativamente, a partir da interpretação dos resultados obtidos na sondagem de conhecimentos prévios e nas avaliações escritas.

Uma análise quantitativa, através de medidas objetivas, com a utilização de ferramentas de estatística descritiva e inferencial, também foi feita, com o intuito de obter conclusões acerca do aproveitamento e participação dos estudantes nas aulas, mais precisamente na correção do teste e da prova pelo viés da taxonomia SOLO.

3.5 MATERIAIS UTILIZADOS

Para a aplicação desta pesquisa o professor necessitará de:

- Computador/smartphone;
- Software para estatística descritiva: R® ou planilha eletrônica.
- Acesso a *wifi* com internet;
- Materiais de consumo didáticos tradicionais: giz, papel, projetor multimídia, etc.

4 MAPEANDO OS CONHECIMENTOS MATEMÁTIOCOS DE ALUNOS INGRESSANTES NOS CURSOS DE ENGENHARIAS AGROINDUSTRIAIS

Como produto desta pesquisa, foi elaborado, em parceria com um profissional da área de Informática, o *website* intitulado "Teste Diagnóstico de Conhecimentos Matemáticos" para smartphones e desktops, que foi utilizado para sondagem dos conhecimentos prévios. Tal *website* é de domínio público e está disponível no endereço: www.quizcalculo.com.br.

Também se buscou avançar a teoria dos campos conceituais no ensino de Cálculo Diferencial, de maneira a verificar se os invariantes operatórios específicos de certa teoria, foram construídos eficazmente, por meio de avaliações escritas e utilizando um diário de campo como ferramenta de registro e consulta dos momentos enriquecedores de sala de aula.

4.1 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS GLOBAIS DO TESTE DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Nesta seção apresentaremos e analisaremos os resultados do teste de conhecimentos prévios de uma maneira global, ou seja, sobre o conjunto de estudantes que realizou o teste no *website* "Teste Diagnóstico de Conhecimentos Matemáticos".

Conforme mencionado anteriormente, o teste foi aplicado na primeira semana de aula, sendo que os estudantes foram incentivados, porém não obrigados a participar do teste. De um total de 54 estudantes matriculados nas duas turmas (27 na Turma 1 e 27 na Turma 2), 15 estudantes da Turma 1 realizaram o teste diagnóstico enquanto que da Turma 2, 16 estudantes realizaram. O tempo médio de realização do teste foi de aproximadamente 3 horas e 30 minutos.

A seguir detalhamos os resultados do teste e apontamos algumas possíveis ações que o professor de Cálculo I pode tomar para sanar essas lacunas de aprendizagem, bem como as possibilidades de conteúdos possíveis de serem abordados sem essa base mínima.

Os resultados estatísticos gerais do teste resumidos na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, à seguir:

Tabela 1 - Resumo estatístico do teste de conhecimentos prévios das Turmas 1 e 2

	Turma 1	*Turma 2*
Média	10,00	7,56
Erro-padrão	0,90	0,97
Mediana	11,00	7,00
Moda	10,00	8,00
Desvio-padrão	3,48	3,90
Variância da amostra	12,14	15,20
Curtose	4,38	-0,42
Assimetria	-2,00	0,58
Intervalo	13,00	13,00
Mínimo	0,00	2,00
Máximo	13,00	15,00
Soma	150,00	121,00
Contagem	15,00	16,00

Fonte: Elaboração própria do autor

A média de acertos das turmas 1 e 2 foi de 10 e 7,56, respectivamente, o que equivale a um percentual médio de acertos de 41,67% e 31,51% respectivamente. Olhando para o coeficiente de variação (média/desvio-padrão) das duas turmas, 34,8% e 51,58% respectivamente, se conclui que existe uma alta dispersão dos valores em torno da média e, consequentemente, a média aritmética tem uma baixa representatividade como medida de tendência central do número de acertos de ambas as turmas. Isto é, existe uma grande variabilidade no número de acertos, o que comprova a heterogeneidade dos estudantes, quanto ao nível de conhecimentos prévios, avaliados no teste. Porém, apesar da heterogeneidade, o número máximo de acertos não ultrapassou 13, na turma 1 e 15 na turma 2, o que evidencia a falta conhecimentos de matemática necessários para responder às questões do teste.

Os resultados das duas turmas são apresentados nos quadros abaixo:

Quadro 4 - Resultados do teste, para Turma 1 classificados de acordo com o nível SOLO.

Tópico	Nº de Acertos no Nível SOLO			Soma
	I	II	III	
Geometria Analítica	8	4	1	13
Expressões Racionais	9	13	8	30
Trigonometria	1	7	5	13
Logaritmo/Exponencial	8	4	1	13
Funções	3	5	5	13
Polinômios Quadráticos	11	6	3	20
Equações lineares e inequações	11	11	10	32
Gráficos de funções	10	2	5	17

Fonte: Elaboração própria do autor

Quadro 5 - Resultados do teste, para Turma 2, classificados de acordo com o nível SOLO.

Tópico	Nº de Acertos no Nível SOLO			Soma
	I	II	III	
Geometria Analítica	11	4	1	16
Expressões Racionais	11	9	8	28
Trigonometria	2	6	8	16
Logaritmo/Exponencial	8	4	0	12
Funções	3	2	3	8
Polinômios Quadráticos	4	2	3	9
Equações lineares e inequações	5	10	7	22
Gráficos de funções	9	1	3	13

Fonte: Elaboração própria do autor

Com base nesses dois quadros, pode-se fazer várias elações sobre as dificuldades dos alunos que realizaram os testes. No entanto, fica mais evidente o déficit dos estudantes nos tópicos de funções e gráficos de funções, que são conceitos chaves utilizados na disciplina de Cálculo I. Também se pode constatar a dificuldade de entendimento de funções transcendentes (funções trigonométricas diretas, logaritmos e exponenciais). Em nosso entendimento, a dificuldade nas funções transcendentes pode ser consequência direta da falta de entendimento do conceito de função. É importante ressaltar que tais conclusões não podem ser tomadas como verdades absolutas, mas sim como indícios, pois as condições de aplicação do teste foram bastante variáveis, já que o teste foi tomado por cada estudante individualmente, no momento em que ele julgou mais propício. As limitações do teste de múltipla escolha também devem ser levadas em consideração.

Apesar das referidas limitações, os testes confirmam vários resultados da literatura (CURY, 2009; NASSER et. al., 2015; REZENDE, 2003; GASPARIN et al.,

2015) que apontam para uma deficiência dos conhecimentos matemáticos básicos, tais como funções, trigonometria, módulo, geometria analítica. Tendo em vista que o Cálculo pode ser visto como o estudo da função, essa lacuna de conhecimento gera uma dificuldade no aprendizado dos conceitos de Cálculo Diferencial.

Analisando à luz da TCC, os resultados do teste diagnóstico apontam que os estudantes não têm o domínio necessário dos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. Em nosso entender, o domínio desses campos conceituais é de grande importância no desenvolvimento do campo conceitual do Cálculo Diferencial, pois, conforme mencionamos anteriormente, é um campo híbrido e os conceitos necessários para resolver os problemas do cálculo transitam pelos campos das estruturas aditivas e multiplicativas. Aqui se devem propor situações muito variadas e na complexidade certa, para criar filiações e rupturas que conduzam ao desenvolvimento e adaptação de esquemas capazes de lidar com as situações e conceitos do Cálculo Diferencial.

Nesse contexto, é plausível acreditar que a maioria dos estudantes ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais da Furg no ano de 2019 não possuíam uma base conceitual considerada mínima de matemática para o bom desempenho na disciplina de Cálculo I.

4.2 ANÁLISE DAS AVALIAÇÕES ESCRITAS

Nesta seção faremos uma análise global das respostas típicas dos estudantes em cada questão das as avaliações. É importante ressaltar que as respostas dos estudantes podem se encontrar em cada um dos níveis da taxonomia SOLO.

4.2.1 AVALIAÇÃO ÁREA 1 – INEQUAÇÕES E FUNÇÕES

A Avaliação 1 visava mapear o conhecimento dos estudantes sobre o conceito de funções e inequações, para isso foram elaborados problemas (situações) que compreendem e dão significado ao conceito de função. Como exemplo de análise, escolhemos a questão 7, que relaciona o número de bactérias com o tempo que transcrevemos à seguir:

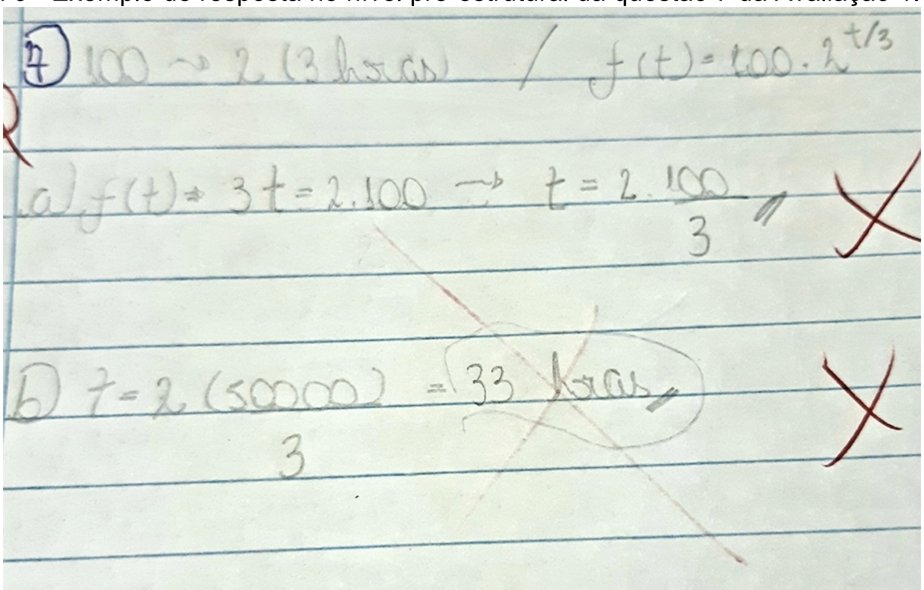
> Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias, f , após t horas é $f(t)=100\cdot 2^{t/3}$.
>
> *(a)* Encontre a função inversa e explique seu significado
>
> *(b)* Quando a população atingirá 50.000 bactérias?

Nessa questão, os estudantes deveriam compreender corretamente o conceito de função, serem capazes de identificar as variáveis dependente e independente, bem como a relação direta entre elas, para assim poder fazer a relação inversa entre elas. Compreendendo a relação inversa, seriam capazes de resolver a tarefa.

Um esboço de uma classificação das respostas segundo a taxonomia SOLO é apresentado á seguir:

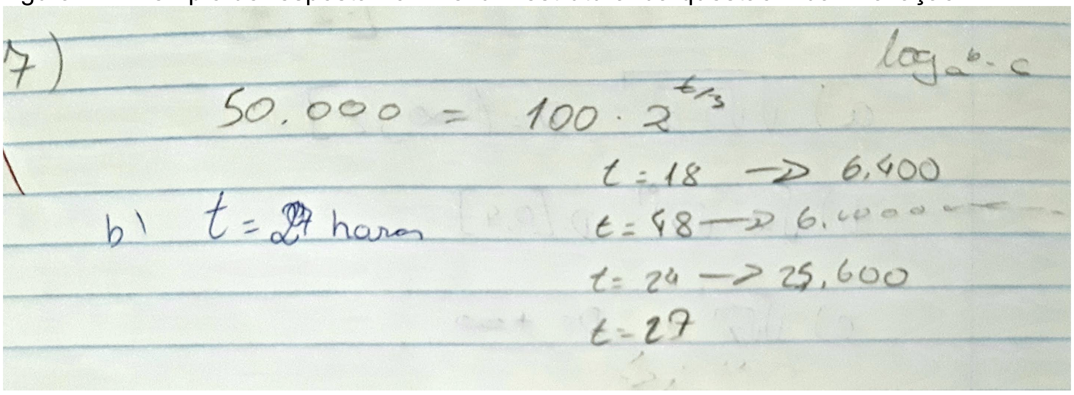
- **Nível pré-estrutural:** Nesta categoria de respostas podemos colocar as respostas em branco ou respostas não fazem sentido, ou seja, informações soltas e desorganizadas. Um exemplo desse tipo de resposta pode ser visto na Figura 6. Conforme se pode observar, o estudante não sabe o que é função inversa, simplesmente sumiu com a exponencial e fez alguns cálculos para obter uma resposta.

Figura 6 - Exemplo de resposta no nível pré-estrutural da questão 7 da Avaliação 1.



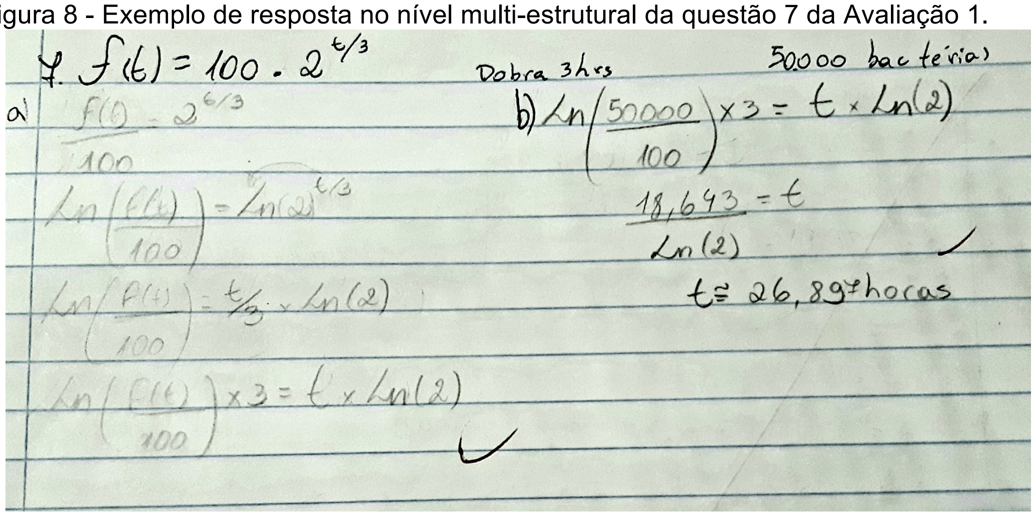
- **Nível uni-estrutural:** Aqui neste nível, colocaríamos respostas que os estudantes tiveram a capacidade de reconhecer tanto a relação direta quanto a relação inversa, mas não tiveram ferramentas para operar simbolicamente com elas. Fazem ligações simples entre os conceitos. Na Figura 7, mostramos um exemplo de uma resposta que poderia estar classificada nesse nível. Conforme se pode observar, o estudante não respondeu a letra (a), pois não tem a compreensão do conceito formal de função inversa. Contudo, conseguiu identificar as variáveis e sua relação inversa e tentou utilizar um tipo de proporção linear em um problema de proporção exponencial. As conexões entre os conceitos necessários para resolver o problema não estão completamente elaboradas ainda.

Figura 7 - Exemplo de resposta no nível uni-estrutural da questão 7 da Avaliação 1



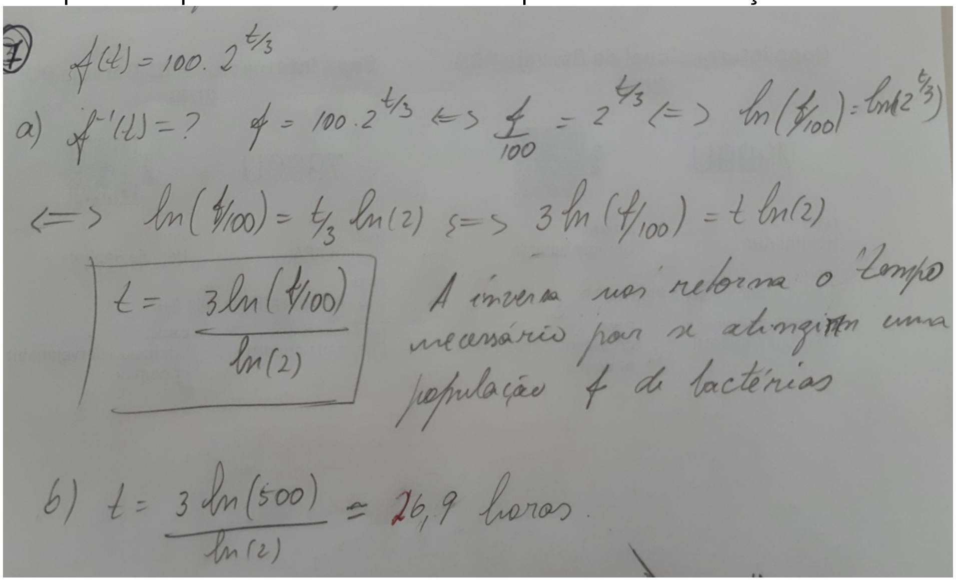
- **Nível multi-estrutural:** Nesta categoria, buscamos repostas que fazem algumas conexões entre os conceitos, mas que ainda não apresentam uma visão unificadora. Na Figura 8 abaixo, vemos uma solução correta em valores, todavia o estudante não foi capaz de explicitar tanto o significado da função inversa, quanto uma fórmula final na parte (a). Portanto, pode-se concluir que o mesmo não percebeu que, para resolver a parte (b), o ponto de partida seria a fórmula obtida na parte (a). Pode-se entender que o estudante não teve uma visão unificadora.

Figura 8 - Exemplo de resposta no nível multi-estrutural da questão 7 da Avaliação 1.



- **Nível relacional:** Aqui espera-se que o estudante responda corretamente as duas partes das questões, mostrando que tem uma visão geral unificada da situação. Apesar do pequeno erro de cálculo resposta abaixo (Figura 9) mostra uma solução correta, demonstrando que o estudante tem o domínio dos conceitos e sabe operar como eles de forma a resolver a situação em questão.

Figura 9 - Exemplo de resposta no nível relacional da questão 7 da Avaliação 1.



- **Nível abstrato estendido:** Esta possibilidade não foi avaliada na questão.

Sob a ótica da TCC, acreditamos que os estudantes classificados nos níveis relacional e abstrato entendido, conseguiram incorporar o conceito aos esquemas que lidam com tipo de situações em questão.

4.2.2 AVALIAÇÃO ÁREA 2 – LIMITES

A Avaliação 2 visava mapear o conhecimento dos estudantes sobre o conceito de limites, para isso foram elaborados problemas (situações) que compreendem e dão significado ao conceito de limite. Como exemplo de análise, escolhemos a questão 4, a qual procura explorar o entendimento do estudante à respeito da continuidade de uma função. Para tanto, o estudante precisa compreender com clareza o conceito de limite. A questão 4 da Avaliação 2 é transcrita à seguir:

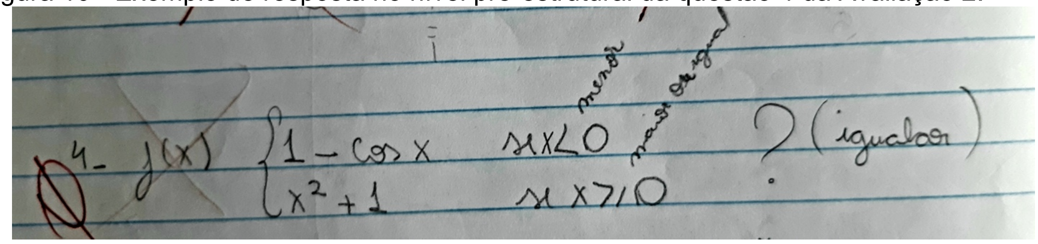
Determine, se existirem, os valores de $x \in D_f$*, nos quais a função* $f(x)$ *não é contínua.*

$$f(x)=\begin{cases} 1-\cos x, & \text{se } x<0 \\ x^2+1, & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

Para a solução correta desta questão, o estudante tem que compreender o conceito de função, que envolve o domínio de outros conceitos e campos conceituais (estruturas multiplicativas e aditivas), e ter conhecimento da definição de continuidade de uma função em um ponto que envolve diretamente o conceito de limite. O domínio da simbologia que representa os conceitos de função e limite também se fazem necessários para resolver essa situação. Por ser uma função definida por partes, o entendimento de limites laterais também será necessário. Em nosso entendimento, as respostas dos estudantes podem ser categorizadas, de acordo com a taxonomia SOLO, conforme:

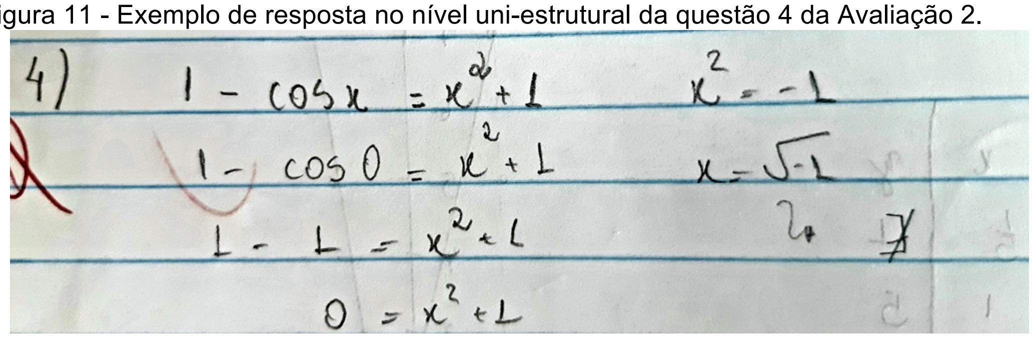
- **Nível pré-estrutural:** o estudante não teve capacidade nem de começar a resolver o problema. Aqui se enquadram aquelas respostas em branco ou a que os estudantes somente transcrevem o problema novamente nas folhas de resposta, ou ainda as respostas completamente desorganizadas e sem relações, como por exemplo a que está mostrada na Figura 10:

Figura 10 - Exemplo de resposta no nível pré-estrutural da questão 4 da Avaliação 2.



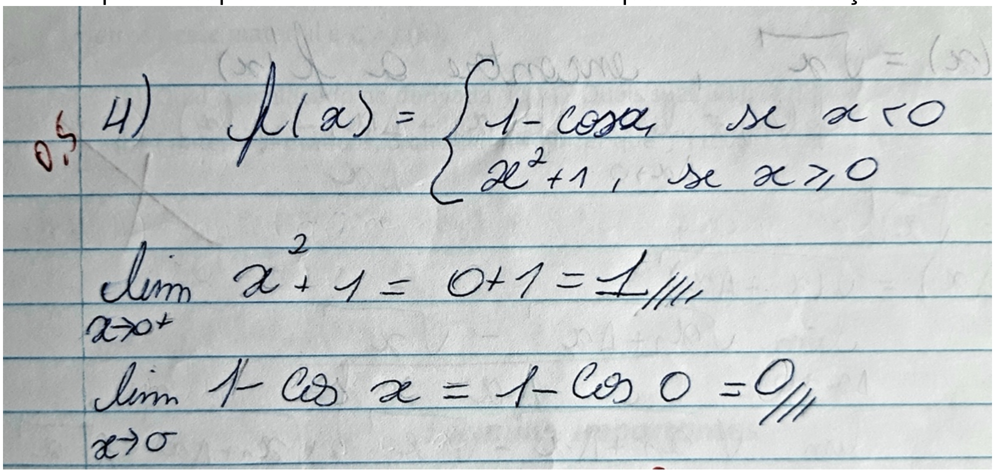
- **Nível uni-estrutural:** Aqui classificamos aquelas respostas incorretas e sem ligações, tais como, cálculos de limites das partes da função sem se preocupar com os limites laterais no ponto zero, o cálculo do valor da função no ponto zero. Ou seja, aquelas respostas em que o estudante utiliza um procedimento mecânico, sem identificar as ligações com o problema. Como exemplo, pode-se observar a resposta mostrada na Figura 11, abaixo:

Figura 11 - Exemplo de resposta no nível uni-estrutural da questão 4 da Avaliação 2.



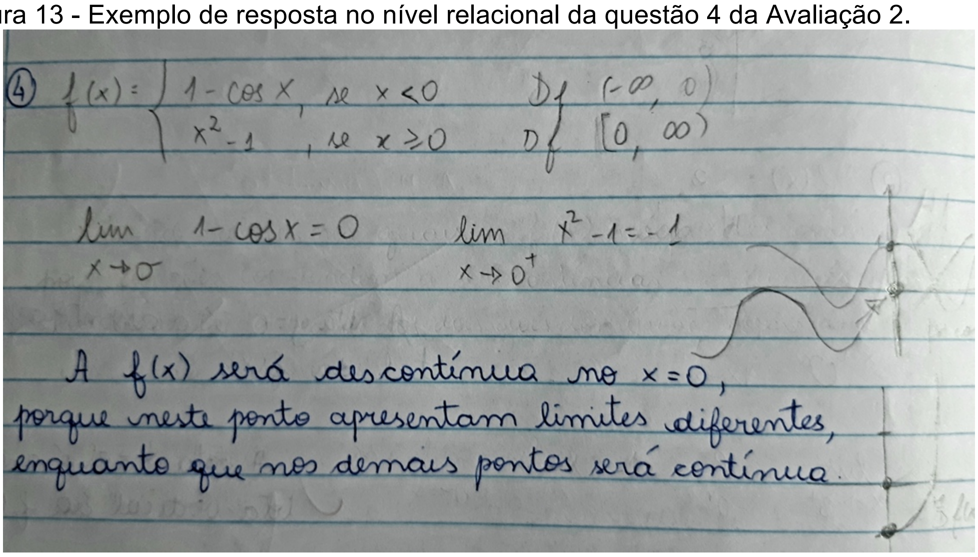
- **Nível Multi-estrutural:** Neste nível, podemos classificar aquelas respostas em que os alunos sabem o passo-a-passo e a definição de continuidade, porém não tem uma visão unificadora dos conhecimentos. Eles identificam uma “anormalidade” no ponto zero, mas não conseguem chegar a conclusão que esse é o ponto de descontinuidade. Uma resposta típica desse nível é mostrada a seguir (Figura 12):

Figura 12 - Exemplo de resposta no nível multi-estrutural da questão 4 da Avaliação 2.



- **Nível Relacional:** Nesta categoria, os estudantes conseguem ter uma visão global do problema. Aqui eles têm a clareza dos conceitos de função e limites e conseguem unificá-los para resolver de maneira adequada à situação pedida no problema. A seguir (Figura 13) um exemplo de uma resposta nesse nível:

Figura 13 - Exemplo de resposta no nível relacional da questão 4 da Avaliação 2.



- **Nível abstrato estendido:** Neste nível, o aluno poderia ir além e fazer outras relações, como por exemplo, o gráfico da função, porém a questão não motivou a este tipo de entendimento.

Sob a ótica da TCC, acreditamos que os estudantes classificados nos níveis relacional e abstrato entendido, conseguiram incorporar o conceito aos esquemas que lidam com o tipo de situação em questão. Dizendo de outro modo, os estudantes construíram os invariantes operatórios de maneira correta, ou seja, eles coincidem com os da teoria. Muitas vezes, não conseguem explicitar tais invariantes, no entanto conseguem operar de maneira correta com os mesmos.

4.2.3 AVALIAÇÃO ÁREA 3 – DERIVADAS

A avaliação 3 visou mapear o conhecimento dos estudantes sobre o conceito de derivada. Para isso foram elaborados problemas (situações) que compreendem e dão significado a esse conceito, que, sabemos, está relacionado com os conceitos de função e limite. Como vimos na TCC, conceitos não funcionam isoladamente, mas sim vinculados uns aos outros.

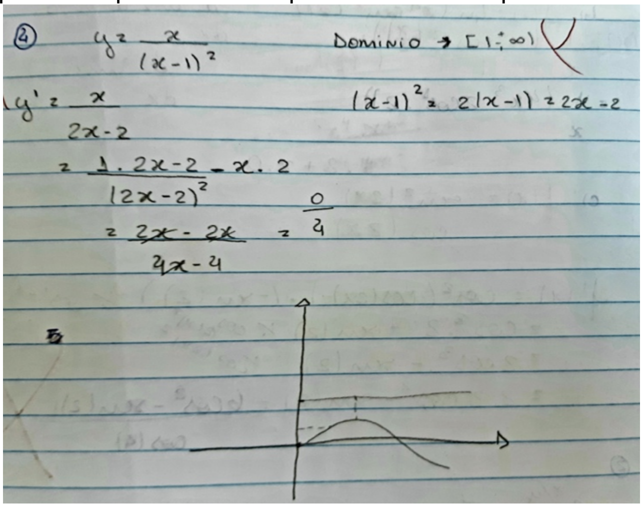
Dessa forma, as situações aqui propostas não são resolvidas com apenas um conceito e o conceito de derivada vai adquirindo sentido em função da multiplicidade de problemas aos quais o estudante responde. Como exemplo de mapeamento dos conhecimentos dos alunos a respeito do conceito de derivada e suas aplicações, vamos classificar os níveis de resposta da questão 4 da Avaliação 3, que transcrevo logo abaixo:

Construa gráfico da função $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. *Paar isso, encontre o domínio da função, os pontos de intersecção com os eixos, os pontos críticos, os intervalos de crescimento e decrescimento, os máximos e mínimos relativos, a concavidade e os pontos de inflexão e as assíntotas verticais e horizontais. Mostre cada passo do seu trabalho.*

Para a resolução correta dessa questão, o estudante deveria dominar praticamente todo campo conceitual do Cálculo Diferencial, o qual envolve os conceitos de função, limite e derivada, além de vários outros conceitos dos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. Aqui a classificação por níveis SOLO se torna um pouco mais complexa, contudo faremos uma sugestão logo abaixo:

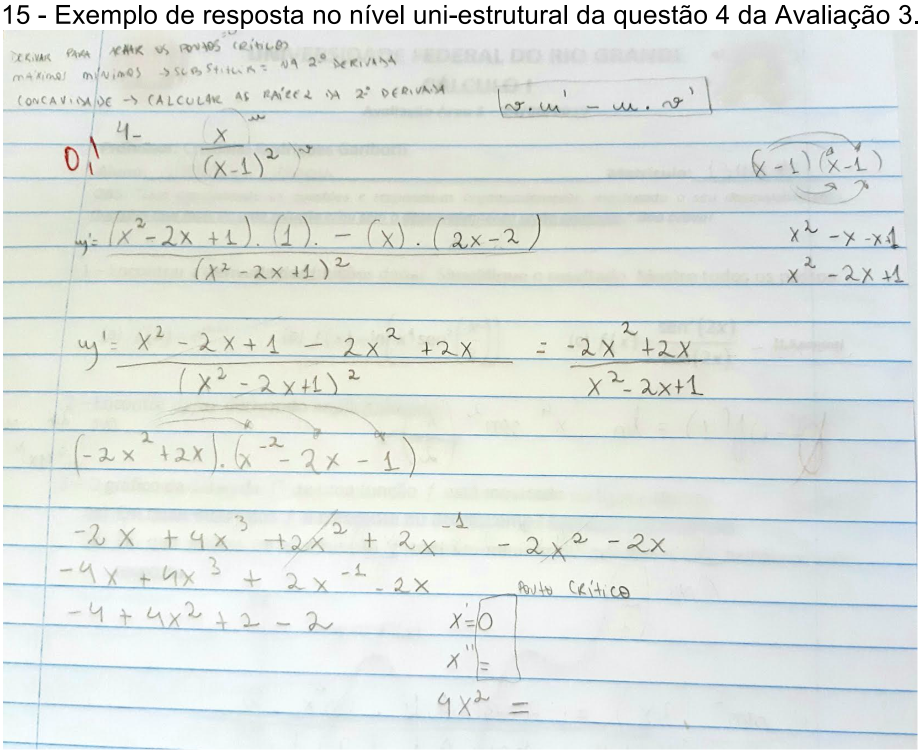
- **Nível pré-estrutural**: Conforme anteriormente explicitado, colocaríamos aqui aquelas respostas em branco e as que não tem nenhum sentido lógico. Talvez, tais estudantes estejam ainda no nível pré-estrutural das funções e, ainda, não conseguiram construir os invariantes operatórios para lidarem com esse tipo de conceito. Como exemplo de uma resposta que julgamos no nível pré-estrutural, trazemos a imagem da Figura 14, a qual mostra que o estudante encontrou o domínio de forma equivocada. Além disso, a derivada também foi calculada de forma errada e, logo a seguir, o estudante apresentou um gráfico que não representa a função do problema.

Figura 14 - Exemplo de resposta no nível pré-estrutural da questão 4 da Avaliação 3.



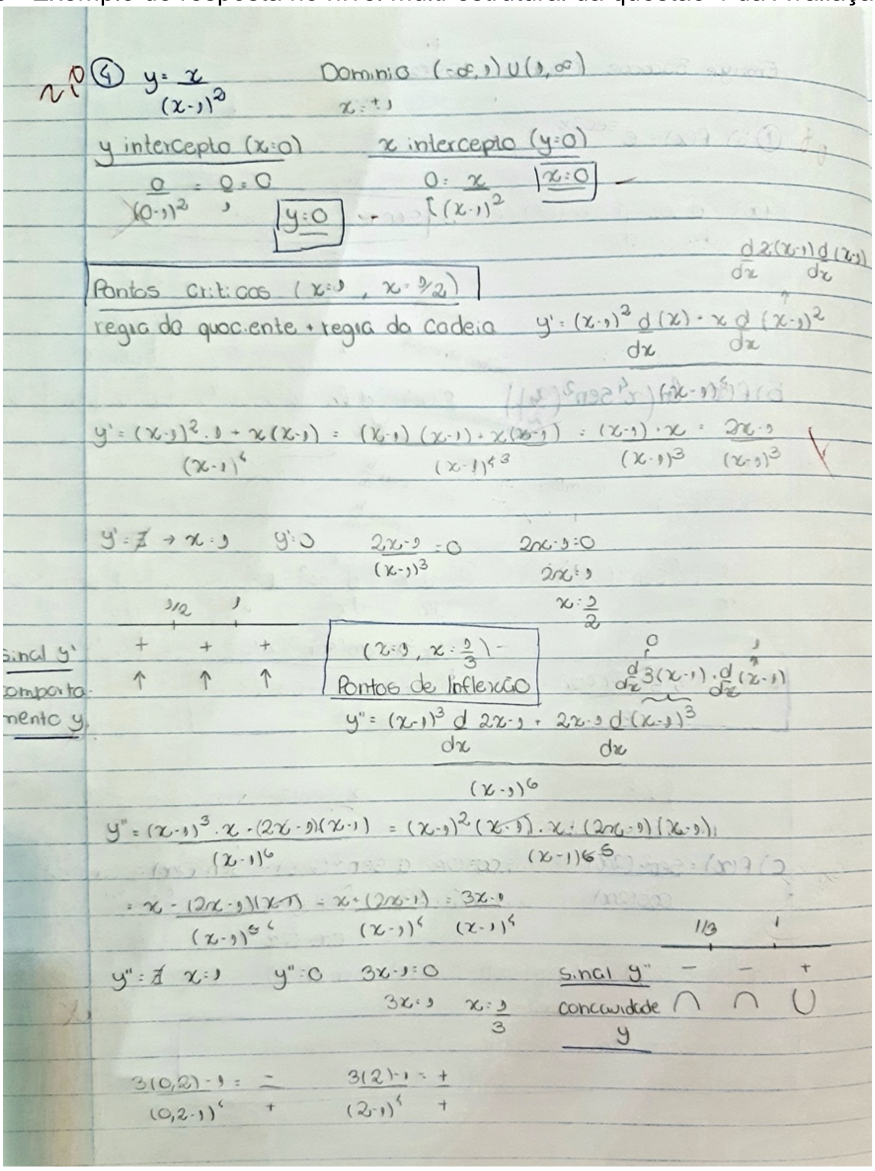
- **Nível uni-estrutural**: Neste nível de classificação poderíamos incluir as respostas dos estudantes que dominam somente alguns conceitos, porém não conseguem fazer ligações entre eles. Como exemplo, apresentamos a resposta mostrada na Figura 15, abaixo. Na tentativa de resolver o problema, o estudante enuncia a regra de derivação do quociente e a aplica corretamente, entretanto não consegue simplificar a expressão racional de forma correta, o que o leva a um resultado errado. Além disso, não tentou calcular assíntotas, domínio, etc.

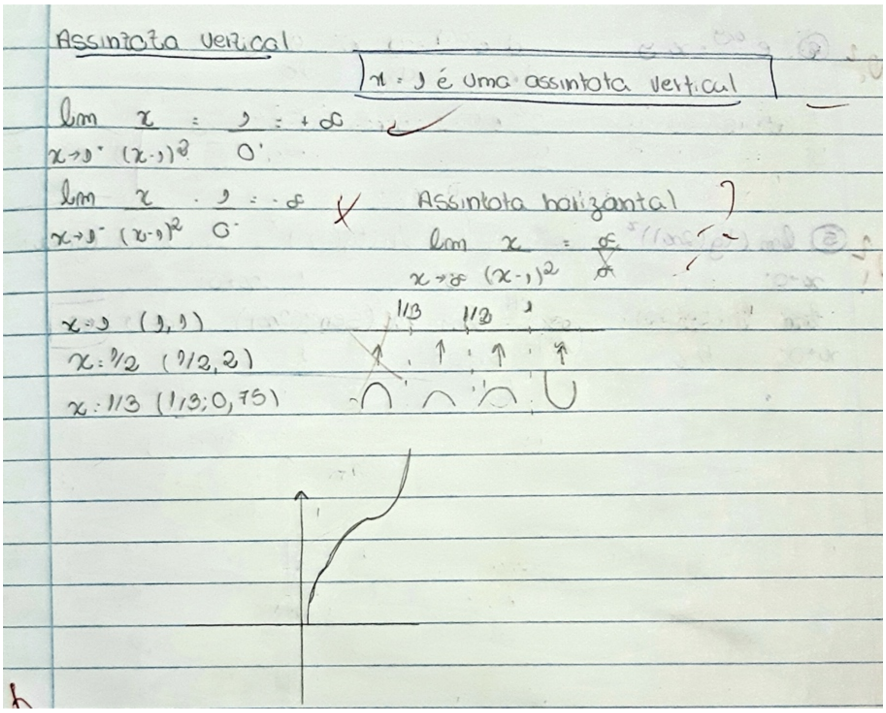
Figura 15 - Exemplo de resposta no nível uni-estrutural da questão 4 da Avaliação 3.



- **Nível Multi-estrutural:** Aqui esperam-se respostas para todos os itens enunciados no problema separadamente (domínio da função, os pontos de intersecção com os eixos, os pontos críticos, os intervalos de crescimento e decrescimento, os máximos e mínimos relativos, a concavidade e os pontos de inflexão e as assíntotas verticais e horizontais). Todavia, não se espera que o estudante faça o gráfico corretamente, o qual representaria a ligação entre todos os conhecimentos. Assim sendo, na resposta mostrada na Figura 16 abaixo, o estudante cumpriu todos os requisitos, porém, no momento montar o gráfico, conseguiu ter uma visão totalmente unificada dos seus resultados preliminares.

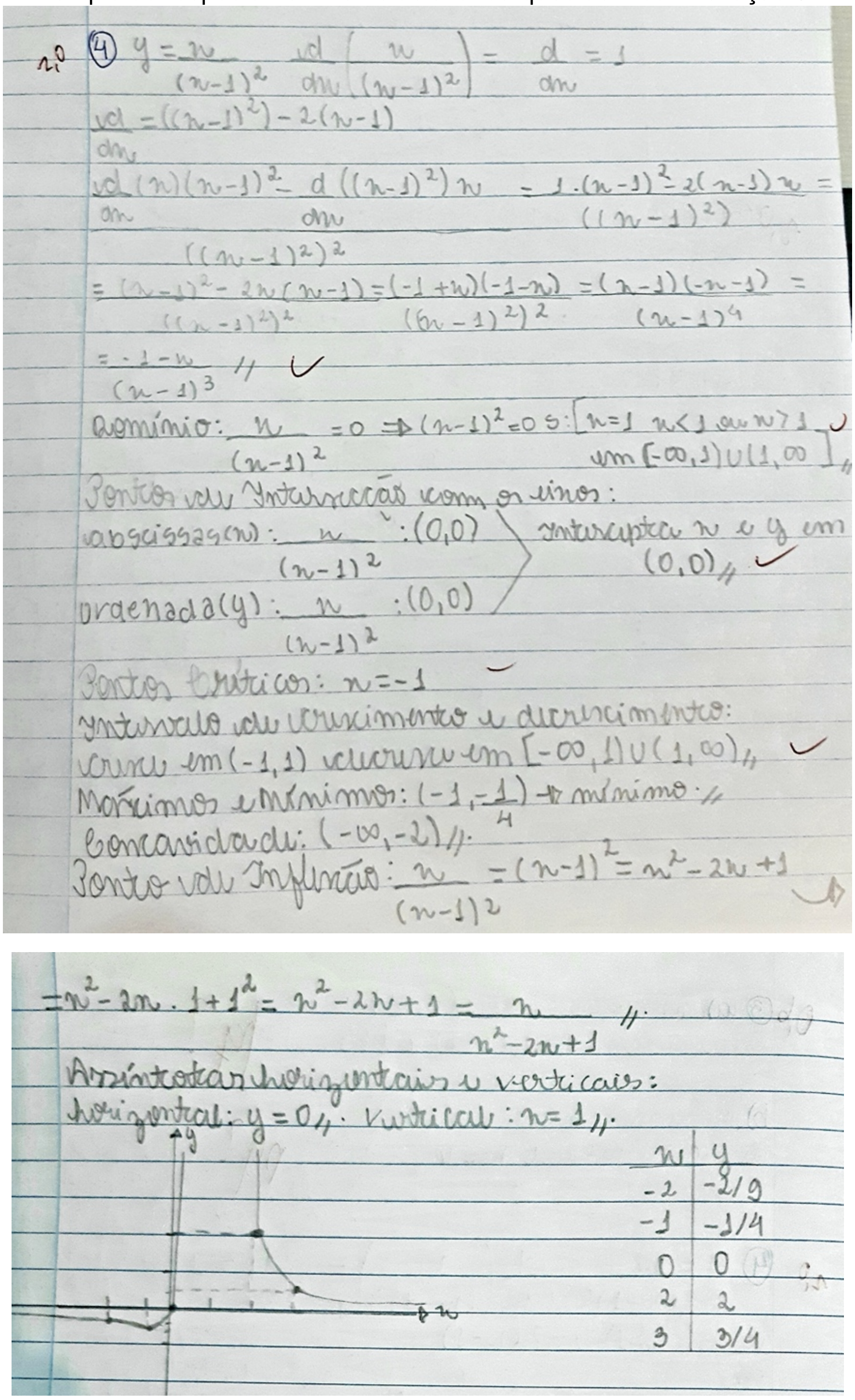
Figura 16 - Exemplo de resposta no nível multi-estrutural da questão 4 da Avaliação 3.





- **Nível relacional:** Neste nível, classificamos aquelas respostas corretas ou que se aproximaram muito disso exceto por pequenos erros de cálculo. São respostas que seguem a lógica, como por exemplo a resposta mostrada na Figura 17. Na Resposta, o estudante percorreu todos os caminhos e desenhou o gráfico de acordo como os seus cálculos anteriores. O gráfico não está perfeitamente desenhado, no entanto é uma aproximação muito boa da função.

Figura 17 - Exemplo de resposta no nível relacional da questão 4 da Avaliação 3.



4) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right) = \frac{d}{dx} = 1$

$\frac{d}{dx} = ((x-1)^2) - 2(x-1)$

$\frac{\frac{d}{dx}(x)(x-1)^2 - \frac{d}{dx}((x-1)^2)x}{((x-1)^2)^2} = \frac{1\cdot(x-1)^2 - 2(x-1)x}{((x-1)^2)^2} =$

$= \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{((x-1)^2)^2} = \frac{(-1+x)(-1-x)}{((x-1)^2)^2} = \frac{(x-1)(-x-1)}{(x-1)^4} =$

$= \frac{-1-x}{(x-1)^3}$ //

Domínio: $\frac{x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$ S: [$x=1$ $x<1$ ou $x>1$ em $[-\infty,1) \cup (1,\infty)$] //

Pontos de Intersecção com os eixos:

abscissas(x): $\frac{x}{(x-1)^2}$: (0,0)

ordenada(y): $\frac{x}{(x-1)^2}$: (0,0)

intercepta x e y em (0,0) //

Pontos Críticos: $x = -1$

Intervalo de crescimento e decrescimento:

cresce em $(-1,1)$ decresce em $[-\infty,1) \cup (1,\infty)$ //

Máximos e mínimos: $(-1, -\frac{1}{4}) \to$ mínimo //

Concavidade: $(-\infty,-2)$ //

Ponto de Inflexão: $\frac{x}{(x-1)^2} = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$= x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1 = \frac{x}{x^2-2x+1}$ //

Assíntotas horizontais e verticais:

horizontal: $y = 0$ // vertical: $x = 1$ //

x	y
-2	-2/9
-1	-1/4
0	0
2	2
3	3/4

- **Nível abstrato estendido:** Neste nível esperamos a resposta completamente correta com o estudante, acrescentando riquezas no gráfico e explicitando os conceitos utilizados. O aluno neste nível tem um bom domínio do campo conceitual do Cálculo Diferencial. Não tivemos nenhum estudante que se colocou nesse nível, nesta questão propriamente dita.

4.3 DIÁRIO DE CAMPO

Dentre as mais importantes anotações feitas no diário de campo, transcrevo algumas aqui:

Funções e inequações

1. A solução de inequações é tratada, de uma maneira geral, como solução de equações. Isso foi constatado claramente quando foi proposta a tarefa de resolver o problema $x^2 - 1 \leq 0$. Quase que a totalidade dos estudantes respondeu $x \leq \pm 1$. Falha no campo aditivo e multiplicativos, bem como falta de entendimento do conceito número real e conjunto solução.
2. Os estudantes apresentaram dificuldade de relacionar o gráfico com a fórmula matemática das funções. Parece que são duas coisas totalmente separadas. Por exemplo, eles sabem que o gráfico de uma equação do segundo grau é uma parábola, porém quando ela é escrita no formato de uma função, isto é, $f(x) = ax^2 + bx + c$, eles já não conseguem reconhecer isso e associar ao gráfico de uma parábola.
3. Um grande número de estudantes não sabe o significado da palavra "notação", apontando uma dificuldade com a língua vernácula. Isso traz consequências no entendimento de conceitos importantes. Quando percebi essa deficiência, pedi aos estudantes para que organizassem um glossário.
4. Os estudantes têm dificuldade de entender a variabilidade das funções. A terminologia utilizada de variável independente e variável dependente é enxergada como nome próprio e com isso está desprovida de significado. Se olhassem para essa expressão e utilizassem o significado das palavras de forma independente, a expressão se tornaria auto-explicativa. Mais um momento de déficit na linguagem vernácula impondo obstáculos no entendimento e apropriação de conceitos matemáticos.
5. Na aula de função inversa, um ponto de dificuldade foi a notação matemática, a saber, $f^{-1}(x)$, que leva o estudante a pensar que o sobrescrito (-1) é um expoente e, consequentemente ao pensamento de que a inversa de uma função seria $\frac{1}{f(x)}$, o que está completamente equivocado.

Limites

1. Ideia de aproximação bem assimilada.
2. Um pouco confusos com a notação e representação simbólica, pois o sinal de igualdade confunde a ideia de aproximação e acaba remetendo ao cálculo do valor da função no ponto em questão.

Derivadas

1. Muitos estudantes não sabem o significado matemático das palavras taxa e razão, o que implica numa dificuldade do entendimento do conceito de derivada. Tendo sido constatada essa dificuldade, situações foram propostas para sanar essa lacuna.

De maneira geral, pode-se perceber que a grande maioria dos estudantes ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais não carregava consigo uma bagagem de conhecimentos matemáticos prévios bem consolidada. Muitos não dominam completamente o campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas e, portanto, encontraram uma grande dificuldade em responder as questões do teste de conhecimentos prévios. Essa falta de domínio de conceitos básico, se refletiu diretamente na construção do campo conceitual do Cálculo Diferencial, que é um campo híbrido que se utiliza constantemente de conceitos presentes no campo das estruturas aditivas e multiplicativas. Também se percebeu ao longo do processo educativo uma dificuldade com a linguagem vernácula, que contribuiu para dificuldade apropriação de conceitos novos pelos estudantes, bem como para a explicitação de tais conceitos. As representações simbólicas (notação matemática) dos conceitos do campo conceitual do Cálculo Diferencial também se mostrou um obstáculo extra aos estudantes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo do anseio em compreender as causas dos altos índices de reprovação e na disciplina de Cálculo I dos alunos ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais na Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Campus Santo Antônio da Patrulha, esta pesquisa propôs ferramentas possíveis para o mapeamento dos conhecimentos matemáticos desses alunos, com o objetivo de auxiliar o professor na condução dos estudantes ao sucesso na apropriação dos conceitos do Cálculo Diferencial. Tais ferramentas, teste diagnóstico de conhecimentos prévios e avaliações escritas, foram elaboradas a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, com o auxílio da Taxonomia SOLO.

O teste de conhecimentos prévios, realizado por meio do *website* “Teste Diagnóstico de Conhecimentos Matemáticos", visou mapear os conhecimentos matemáticos dos alunos matriculados na disciplina de Cálculo I. Os resultados embasaram o professor à respeito das dificuldades matemáticas para que o mesmo pudesse planejar ações didáticas que seriam necessárias para a construção do campo conceitual do Cálculo Diferencial para as turmas em estudo. Os resultados, analisados sob a ótica da TCC, com o auxílio da taxonomia SOLO, mostraram que os estudantes chegaram à Universidade com um déficit significativo de conhecimentos matemáticos considerados essenciais. Indicaram também em quais áreas os estudantes têm mais dificuldades, as quais analisadas sob a ótica da TCC, se podem concluir que a grande maioria dos estudantes não tem o domínio dos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. É a partir dos conhecimentos prévios que devem ser construídos os novos conceitos que fazem parte do Campo Conceitual do Cálculo Diferencial. Sendo assim, é tarefa do professor prover situações aos alunos para que os mesmos possam desenvolver seus esquemas dentro da ZDP.

As avaliações escritas serviram como um tipo de avaliação formativa, durante o processo educativo do aluno, pois tiveram a função de dar um feedback da aprendizagem, tanto para o professor quanto para o aluno. Nesse tipo de avaliação, foi possível mapear as habilidades dos estudantes e saber exatamente, onde estão as lacunas ou rupturas que não foram superadas. Com a ajuda da Taxonomia SOLO, foi possível identificar o nível onde o aluno estava operando e em que nível ele estava cometendo seus erros e equívocos. A partir da análise dos erros dos estudantes, foi possível, também, interferir no processo educativo, retomando explicações e propondo novas situações, que envolviam os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação mal construídos pelos estudantes.

Para além, foi feito um diário de campo para se ter um relato das situações enriquecedoras de sala de aula e, assim, poder refletir sobre elas com base na TCC. Este diário foi muito importante no andamento do curso, pois gerou uma reflexão a respeito da prática docente, fazendo com que “erros” não fossem cometidos novamente e acertos e situações de sucesso fossem mais frequentes.

Julgamos que a pesquisa foi relevante no sentido de promover as avaliações com diferentes aspectos. Avaliamos para identificar os conceitos prévios dos alunos e trabalhar a partir deles; avaliamos para conhecer as dificuldades dos alunos e, assim, propor situações apropriadas para ajudá-los a superá-las; avaliamos para identificar se os alunos aprenderam o que nós propomos; e nos auto-avaliamos, constantemente, para identificar onde poderíamos melhorar nosso papel de mediadores do processo educativo dos estudantes.

A TCC constitui-se em uma teoria facilitadora para a compreensão do processo de conceitualização, promovendo o agrupamento de situações, conceitos e suas representações em unidades úteis de estudo, no caso em questão, o Campo Conceitual do Cálculo Diferencial. O que permitiu a criação dos Quadros 1, 2 e 3, que tentam explicitar o campo conceitual em questão, relacionando o conceito com suas situações, invariantes operatórios possíveis de serem construídos pelos estudantes e suas diferentes representações simbólicas.

Apesar dos avanços teóricos e organizacionais supracitados, faz-se necessário ainda avançar na busca de novas metodologias de ensino que promovam a construção do Campo Conceitual do Cálculo Diferencial de forma mais eficaz e rápida, promovendo um maior envolvimento dos estudantes. Com respeito ao processo de sondagem dos conhecimentos prévios, pode-se evoluir no sentido de incorporar um campo, ao final de cada questão, para que o estudante explique como chegou na resposta. Isso já estimularia a explicitação dos teoremas-em-ação e conceitos-em-ação em teoremas e conceitos científicos, bem como traria uma visão mais aproximada do nível em que o aluno está operando.

Tendo em vista a complexidade dos fatores causadores dos altos índices de reprovação e evasão na disciplina de Cálculo I, buscamos avançar na compreensão desses fatores, fazendo uso da TCC e Taxonomia SOLO para o mapeamento dos conhecimentos matemáticos dos estudantes, de maneira a propiciar ferramentas que facilitem o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D.P. **The psychology of meaningful verbal learning: An introduction to school learning**. 1 ed. New York and London: Grune and Stratton. 255p, 1963.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de aula invertida – uma metodologia ativa de aprendizagem**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BIGGS, J.B.; COLLIS, K.F. **Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy**. 1st. ed. New York: Academic Press Inc, 1982.

BIGGS, J.B. **Constructive Alignment**. [20-?]. Disponível em: <http://www.johnbiggs. com.au/academic/>. Acesso em: 10 jul. 2019.

CARIELLO, D.; JUNIOR, P. C. E. R.; CARVALHO, T. M. M. Aplicações de cálculo diferencial às ciências naturais e humanas: exercícios de reflexão e curiosidades. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 2010, Salvador/BA. **Anais**... Salvador: 10., 2010. 1 CD-ROM.

CARVALHO JR., G. D.; AGUIAR JR., O. Os Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. **Cad. Bras. Ens. Fis.**, v. 25, n.2: p. 207-227, ago. 2008.

CENTER FOR TEACHING INOVATION. **Active Learning**. [2018?]. Disponível em: <https:// www.cte.cornell.edu/teaching-ideas/engaging-students/active-learning.html>. Acesso em: 01 ago. 2018.

CUNHA, M. C. A avaliação formativa: estratégia didática para o ensino-aprendizagem da língua materna. **Moara**. Belém: EDUFPA, n.9, 1998. p. 105-133.

CURY, H. N. Pesquisas em análise de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In: FROTA, M.C.R. E NASSER, L (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates: Recife: SBEM, 2009. p.265.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia** - Saberes necessária à prática educativa. 25. Ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002 (Coleção Leitura).

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 41. ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 2005.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GASPARIN, P. P.; KESTRING, F. B. F.; WEBER, P. E. Diagnóstico da proficiência de matemática em alunos ingressantes de engenharias e licenciaturas da UTFPR - Medianeira. In: V SEMINÁRIO NACIONAL INTERDISCIPLINAR EM

EXPERIÊNCIAS EDUCATIVAS, 2015, Francisco Beltrão. **Anais**... Francisco Beltrão: [s.n], 2015. p. 1175-1185.

GROSSI, E. P. **O que é Aprender? O Iceberg da conceitualização**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017. (Coleção Teoria dos Campos Conceituais).

HADJI, Charles. **Avaliação desmistificada.** Porto Alegre: Artmed, 2001.

KIELT, E. D. **Utilização integrada do *Just-in-time teaching* e *Peer Instruction* como ferramentas de ensino de mecânica no ensino médio mediadas por *App*.** 2017. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2017.

LIMA, G. L. O ensino do cálculo no brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Retrospectivas e Perspectivas, 2013, Curitiba/PR. **Anais...** Curitiba:10., 2013. 1 CD-ROM.

LIMA, M. S.; SANTOS, J. V. C. **A teoria dos campos conceituais e o ensino de cálculo**. 1. ed. Curitiba: Appris, 2015.

MALTA, I. Linguagem, leitura e matemática. In: CURY, H. N. (Org). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 44-45.

MASOLA, W. D. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na Educação Superior. **Rev. Brasilaira de Ensino Superior**, v.2, n. 1, jan.-mar. 2016. p. 64-74.

MASOLA, W. D. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. **Educação Matemática em Debate**, v.3, n. 7, jan.-abr. 2019. p. 52-67.

MAZUR, E. **Peer instruction: A user’s manual**. Pap/Dskt ed. [S.1.] Prentice-Hall Inc., 1997.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. **Metodologia da Pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

MOREIRA, M. A. O Iceberg da conceitualização: Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa Nesta Área In: GROSSI, E. P. (Org.). **O que é aprender? O Iceberg da Contextualização**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017. (Coleção Teoria dos Campos Conceituais).

MOREIRA, M. A. Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa Nesta Área*. Investigações em Ensino de Ciências*, v.7, n.1.

2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>. Acesso em: 17 dez. 2017.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M.C.R. E NASSER, L (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates: Recife: SBEM, 2009. p. 43-58.

NASSER, L.; SOUSA, G. A.; TORRACA, M. A. A. Aprendizagem de cálculo: Dificuldades e sugestões para a superação. XIV CIAEM-IACME, Tuxtla Gutierrez, 2015: **Anais**…. México D.F.: CIAEM-IACME, 2015. p. 25-35.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar**. Lisboa: APM; IIE, 1991. (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

NOVAK, G. M.; PATTERSON, E. T.; GRAVIN, Andrew D.; WOLFGANG, Christian. **Just-in-time teaching: blending active learning with web technology**. Upper Saddle River, N.J. Prentice-Hall, 1999. 188p.

PAIS, G. L. R. Ensinar e aprender matemática. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

PALIS, G. A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010. Salvador. **Anais Eletrônicos**... Salvador: SBEM, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra4.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2017.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética**; tradução de Álvaro Cabral; 2.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

POLYDORO, S. A. **O trancamento de matrícula na trajetória acadêmica no universitário: condições de saída e de retorno à instituição**. 2000. 145 f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, 2000.

RAFAEL, R. C.; ECHER, M. A. Evasão, baixo rendimento e reprovações em Cálculo Diferencial e Integral: uma questão a ser discutida. In: VII ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015. Juiz de Fora. **Anais**... Juiz de Fora: UFJF. 2015.

REZENDE, W. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, 2003.

SANTANA, E.; ALVES, A. A.; NUNES, C.B.; A Teoria dos Campos Conceituais num Processo de Formação Continuada de Professores. *Bolema*, v.29, n.53. 2015.

STEWART, J. **Cálculo: Volume 1**. 6 ed. Americana. São Paulo: Cengage Learning, 2001.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-Ação**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1986.

VERGNAUD, G. A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In. T. Carpenter; T. Romberg; J. Moser (Eds.). **Addition and Subtraction**: a cognitive Perspective. New Jerssey: Lawrense Erlbaun, 1982. p. 39–59.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: Lesh, R.; Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.) 1º SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1993. Rio de Janeiro. **Anais**... Rio de Janeiro: [s.n]. 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, v.52, 2009. p. 83-94.

VERGNAUD, G. Conceptual development and learning. *Revista Qurriculum*, v.26, 2013. p. 39-59.

VERGNAUD, G. A Didática é uma Provocação: Ela é um desafio. In: GROSSI, E. P. (Org.). **Piaget e Vygotsky em Gérard Vergnaud**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017a. (Coleção Teoria dos Campos Conceituais).

VERGNAUD, G. O que é aprender? Por que a teoria dos campos conceituais? In: GROSSI, E. P. (Org.). **O que é aprender? O Iceberg da Contextualização.** Porto Alegre: GEEMPA, 2017b. (Coleção Teoria dos Campos Conceituais).

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

APÊNDICE A – QUESTÕES DO *WEBSITE*

1 – Encontre a equação da reta que passa nos pontos $(5,3)$ e $(-1,6)$.

a) $y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$

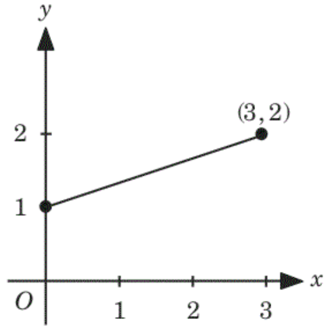
b) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$

c) $y=3x+8$

d) $y=-2x+4$

e) Nenhuma das anteriores.

2 – O segmento de reta mostrado na figura abaixo é a porção de uma reta cuja equação é



a) $y=3x+3$

b) $y=3x+1$

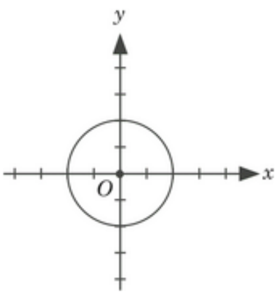
c) $y=\frac{2}{3}x+1$

d) $y=\frac{1}{3}x+3$

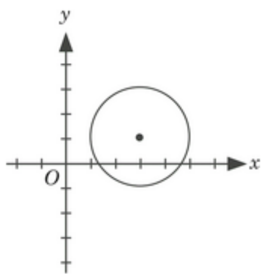
e) $y=\frac{1}{3}x+1$

3 – Qual dos seguintes poderia ser o gráfico da equação $x^2-6x+y^2+2y+6=0$?

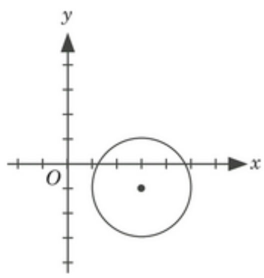
a)



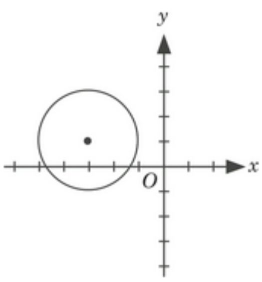
b)



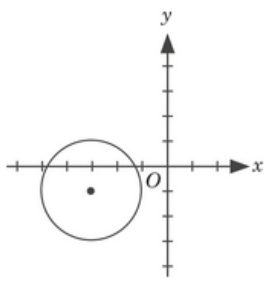
c)



d)



e)



4 – $2\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)=$

a) $\frac{22}{24}$

b) $\frac{11}{6}$

c) $\frac{6}{7}$

d) $\frac{6}{14}$

e) $\frac{4}{7}$

5 – Expresse $\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x^2y}+\frac{1}{x^2y^3}$ como uma fração simples:

a) $\frac{x^2y+2y^2+1}{x^2y^3}$

b) $\frac{4}{x^4y^6}$

c) $\frac{x+2y}{x^2y^3}$

d) $\frac{x^2+3y}{x^2y^2}$

e) $\frac{x^4y^4+2xy^5+x^2}{x^4y^6}$

6 – Simplifique $\frac{\left(2xy^2\right)^3}{\left(x^2y\right)^2}$

a) $6xy^4$

b) $8x^7y^8$

c) $\frac{6y^3}{x}$

d) $\frac{8y^3}{x}$

e) $\frac{8y^4}{x}$

7 – Se $\cos x=\sqrt{3}/2$ e $-\pi/2\leq x\leq 0$, então o valor exato de x, em radianos, é

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{6}$

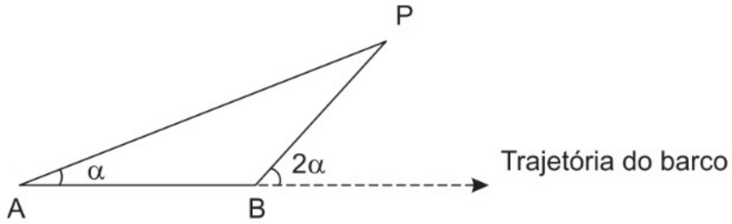
d) $-\frac{\pi}{3}$

e) Nenhuma das anteriores

8 – Conforme x cresce de $\pi/4$ à $3\pi/2$, o valor de $\text{sen}(x)$:

a) Cresce primeiro, então decresce
b) Cresce ao longo de todo intervalo
c) Decresce ao longo de todo intervalo
d) Decresce primeiro, então cresce
e) Nenhuma das anteriores

9 – (Enem - 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura a seguir ilustra essa situação. Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar no ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será



a) 1000 m
b) $1000\sqrt{3}$ m
c) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
d) 2000 m
e) $2000\sqrt{3}$ m

10 – Qual é o valor de x se $\log_5 x = -2$

a) 10
b) 0,1
c) 25
d) 0,04
e) -25

11 – Se $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$, então $x =$

a) 4, -2
b) 4
c) -2
d) 2, -4
e) Nenhuma das anteriores

12 – A equação para a magnitude de um terremoto é $M = \log\left(\frac{I}{K}\right)$, onde I é a intensidade do terremoto e K é uma constate. A magnitude de um terremoto no ano de 1995 foi 9,0 e a magnitude de um terremoto no ano de 2004 foi 7,0. Qual das seguintes opções compara a intensidade do terremoto de 1995, I_{1995}, com a intensidade do terremoto de 2004, I_{2004}?

a) $I_{1995} = 100 I_{2004}$
b) $I_{1995} = 2 I_{2004}$
c) $I_{1995} = I_{2004} + 2$
d) $I_{1995} = I_{2004} + 100$
e) $I_{1995} = 2 I_{2004} + 100$

13 – Se $f(x) = x^2 - 4x$, então $f(x+h) - f(x) =$

a) $2hx + h^2 - 8x + 4h$
b) $h^2 - 4h$
c) h
d) $f(h)$
e) $2hx + h^2 - 4h$

14 – Uma escada de 3 metros de comprimento está apoiada em uma parede de maneira que o topo da escada está a uma altura de h metros na parede. Uma expressão para a distância da base da escada até a parede é:

a) $h-3$
b) $3-h$
c) $\sqrt{9-h^2}$
d) $\sqrt{h^2-9}$
e) Nenhuma das anteriores

15 – Uma bola é chutada para cima no tempo $t = 0$. Enquanto a bola está no ar, a sua altura acima do solo depois de t segundos é $-16t^2 + 40t$ cm. Quantos segundos depois de a bola ser chutada ela voltará a encontrar o solo?

a) 2,5
b) 1,25
c) 0,4
d) 0

e) -2,5

16 – Uma função quadrática tem raízes em -5 e 4. Se a função corta o eixo dos y em -60, então o coeficiente líder (isto é, o coeficiente de x^2) é

a) 3
b) 2
c) 5
d) 1
e) -2

17 – Quais das seguintes são raízes de $x^2 - 5x - 2 = 0$

a) $\dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$
b) $\dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
c) $\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$
d) $\dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$
e) $\dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$

18 – Um fator de $3x^2 + 11x - 4$ é

a) $3x + 1$
b) $x - 4$
c) $3x - 1$
d) $x - 2$
e) $3x + 4$

19 – A desigualdade $|x - 4| > 3$ é equivalente a

a) $-3 < x < 3$
b) $1 < x < 7$
c) $x < -7$ ou $x > 7$
d) $x < -1$ ou $x > 7$
e) $x < 1$ ou $x > 7$

20 – Um plano de telefone celular custa \$20 por mês e inclui 200 min livres. Cada minuto adicional custa 5 centavos. Assume que você usa seu celular por pelo menos 200 minutos em um mês. Se x é o número total de minutos por mês, então seu custo total C será dado por

a) $C = 10 + 0{,}05x$
b) $C = 20x + 0{,}05$
c) $C = 20 + 0{,}05x$
d) $C = 20{,}05x$
e) $C = 30 + 0{,}05x$

21 – Uma coleção de 15 moedas, consistindo somente de moedas de 5 centavos e 25 centavos, tem o valor de \$2,75. Se x representa o número de moedas de 5 centavos e y representa o número de moedas de 25 centavos, qual dos seguintes sistemas de equações pode ser usado para determinar x e y.

a) $\begin{cases} x+y=275 \\ 25x+5y=15 \end{cases}$

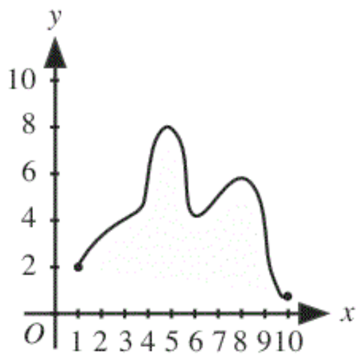
b) $\begin{cases} x+y=275 \\ 5x+25y=15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=30 \\ 5x+25y=275 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=15 \\ 25x+5y=275 \end{cases}$

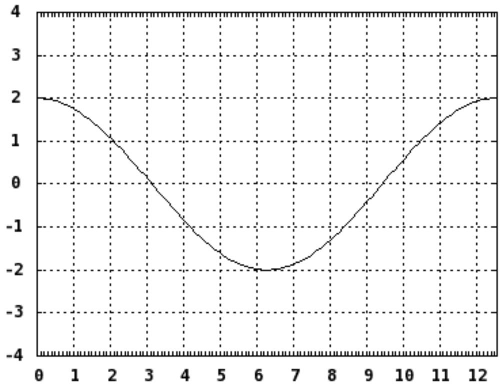
e) $\begin{cases} x+y=15 \\ 5x+25y=275 \end{cases}$

22 – O gráfico da função $y=f(x)$ é mostrado abaixo. Para exatamente quantos valores de x, $f(x)=3$?



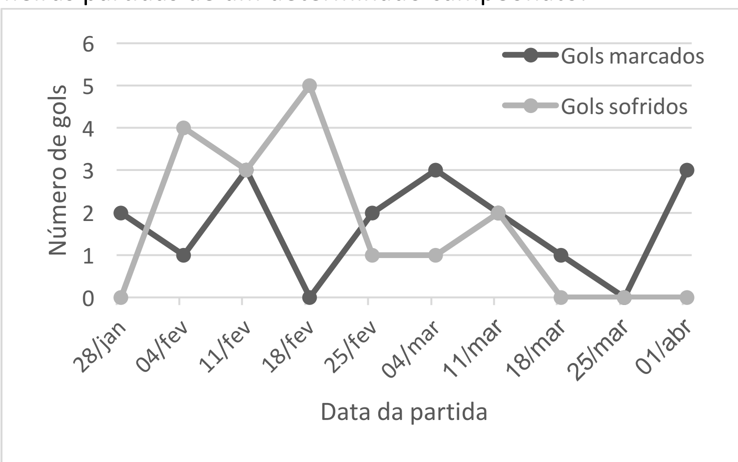
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

23 – Qual função está representada no gráfico abaixo



a) $y = 2\cos(2x)$
b) $y = \text{sen}(2x)$
c) $y = 2\text{sen}(x/2)$
d) $y = 2\cos(x)$
e) $y = 2\cos(x/2)$

24 – No gráfico a seguir estão representados os gols marcados e os gols sofridos por uma equipe de futebol, nas dez primeiras partidas de um determinado campeonato.



Considerando que, neste campeonato, as equipes ganham 3 pontos para cada vitória, 1 ponto por empate, e 0 ponto em caso de derrota, a equipe em questão, ao final da décima partida, terá acumulado um número de pontos igual a:

a) 15
b) 17
c) 18
d) 20
e) 24

Gabarito

Resposta correta	Tópico abordado na questão
1 – b	Geometria analítica
2 – d	Geometria analítica
3 – c	Geometria analítica
4 – b	Expressões Racionais
5 – a	Expressões Racionais
6 – e	Expressões Racionais
7 – e	Trigonometria
8 – a	Trigonometria
9 – b	Trigonometria
10 – d	Logaritmos/Exponencial
11 – b	Logaritmos/Exponencial
12 – a	Logaritmos/Exponencial
13 – e	Funções
14 – c	Funções
15 – a	Funções
16 – a	Polinômios
17 – a	Polinômios
18 – c	Polinômios
19 – e	Desigualdades
20 – c	Equações Lineares
21 – e	Equações lineares
22 – c	Gráficos de funções
23 – e	Gráficos de funções
24 – c	Gráficos de funções

APÊNDICE B – AVALIAÇÃO ESCRITA 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
CÁLCULO I

Avaliação Área 1 – 17/04/2019

Professor: Cristiano Rodrigues Garibotti

Aluno:____**Matrícula:**__________________

OBS: *"Leia atentamente as questões e responda-as organizadamente, mostrando o seu desenvolvimento.*

1 – Resolva as inequações em $\mathbb{R}$.

a) $\left(x^2-1\right)\left(x+4\right)\leq 0$

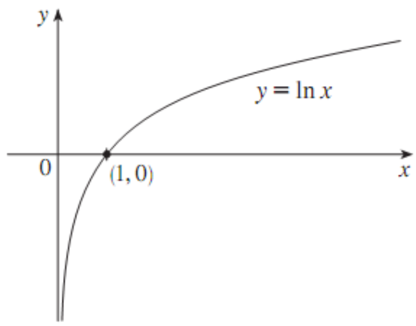
b) $|6+2x|<|4-x|$

2 – Esboce o gráfico de $2y=x^2$.

3 – Encontre as funções (a) $f\circ g$ (b) $g\circ f$ (c) $f\circ f$ (d) $g\circ g\circ g$ e seus domínios

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^2-1},\ g(x)=x+1$$

4 – A partir do gráfico da função $y=\ln\left(x\right)$, dado na figura abaixo, esboce o gráfico da função $y=\ln(x-2)-1$



5 – Dada a função abaixo, determine a função inversa, bem como os domínios de f e f^{-1}. Justifique sua resposta mostrando todos os passos.

$$f\left(x\right)=\sqrt{10-3x}$$

6 – Resolva a equação $e^{2x+3}-7=0$. Mostre todos os passos.

7 – Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias, f, após t horas é $f\left(t\right)=100\cdot 2^{t/3}$.

(c) Encontre a função inversa e explique seu significado

(d) Quando a população atingirá 50.000 bactérias?

APÊNDICE C – AVALIAÇÃO ESCRITA 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

CÁLCULO I

Avaliação Área 2 – 20/05/2019

Professor: Cristiano Rodrigues Garibotti

Aluno:____

Matrícula:__________________

OBS: *"Leia atentamente as questões e responda-as organizadamente, mostrando o seu desenvolvimento.*

1 – Seja $f(x) = 1 + |5x - 1|$. Calcule os limites indicados, se existirem.

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}^+} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}^-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}} f(x)$

Esboce o gráfico de $f(x)$.

2 – Determinar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da seguinte função

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x-3}}$$

3 – Usando o limite fundamental $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, determine os limites abaixo. Justifique sua resposta.

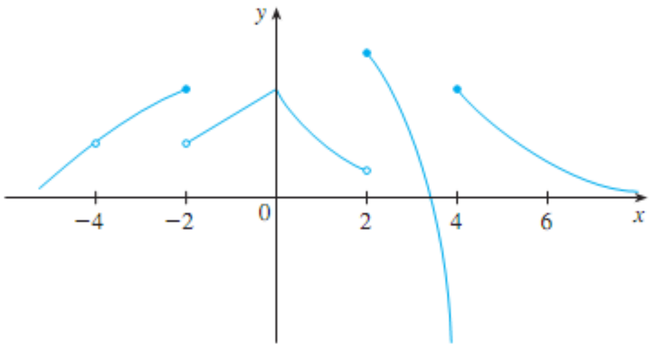
(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{8x}{3\operatorname{sen} x - x}$

4 – Determine, se existirem, os valores de $x \in D_f$, nos quais a função $f(x)$ não é contínua.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

5 – (a) Do gráfico de f, identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê.

(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



6 – Dada $f(x)=\sqrt{x}$, encontre $f'(x)$ usando a definição de derivada.

7 – Um fabricante produz peças de fazenda com largura fixa e o custo de produção de x metros desse material é $C=f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais suas unidades?

(b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1000)=9$?

Fórmulas Importantes

Limites fundamentais:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

Derivada de uma função num ponto:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(x_0)=\lim_{z\to x_0}\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}$$ quando estes limites existem.

Equação da reta tangente que passa no ponto $(x_1, f(x_1))$ e tem inclinação m:

$$y-f(x_1)=m(x-x_1)$$

Reta normal: Duas retas t e n são perpendiculares se

$$m_t\cdot m_n=-1$$

APÊNDICE D – AVALIAÇÃO ESCRITA 3

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
CÁLCULO I

Avaliação Área 3 – 24/06/2019

Professor: Cristiano Rodrigues Garibotti
Aluno:____
Matrícula:________________
OBS: *"Leia atentamente as questões e responda-as organizadamente, mostrando o seu desenvolvimento.*

1 – Encontrar a derivada das funções dadas. Simplifique o resultado. Mostre todos os passos.

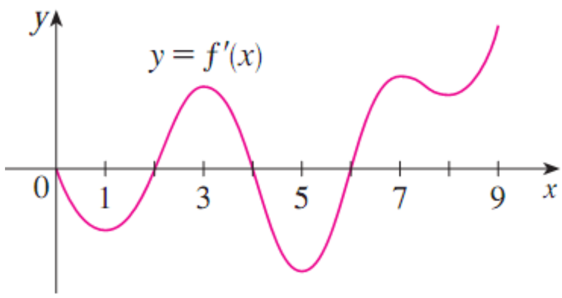
(a) $f(x)=e^{\sec 3x}$ (b) $f(x)=\ln\left(x^4\,\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ (c) $f(x)=\dfrac{\text{sen}^2(2x)}{\cos(2x)}$

2 – Encontre dy/dx derivando implicitamente.

$$e^{x/y}=x-y$$

3 – O gráfico da derivada f' de uma função f está mostrado na figura abaixo.

(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente? Explique sua resposta.
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local? Justifique sua resposta.



4 – Construa gráfico da função $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$. Par isso, encontre o domínio da função, os pontos de intersecção com os eixos, os pontos críticos, os intervalos de crescimento e decrescimento, os máximos e mínimos relativos, a concavidade e os pontos de inflexão e as assíntotas verticais e horizontais. Mostre cada passo do seu trabalho.

5 – Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\text{tg}(2x)\right)^x$. *(Dica1: com o auxílio de logaritmos transforme em uma indeterminação da forma* ∞/∞ *e, em seguida aplique a regra de L'Hôpital. Dica 2:* $\sec^2 x\to 1$ *quando* $x\to 0^+$ *).*

6 – Um fazendeiro tem 1200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem a maior área?