

Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Interações não-mínimas da gravitação com o eletromagnetismo

Angelo E. S. Hartmann

Rio Grande
2019

Convoquemos todos cientistas e mestres a que dediquem seus trabalhos a uma vida melhor e mais significativa a serviço da humanidade em toda parte - ao bem estar comum - e em consequência, a uma mudança radical das condições que moldam a ciência atual, que se caracteriza sob muitos aspectos como instrumento de dominação nas mãos das forças opressivas dos senhores do mundo.

— J. LEITE LOPES, *Ciência e Libertação*, 1979.

Resumo

O presente trabalho é um retorno à discussão dos acoplamentos diretos da gravitação com o tensor de Faraday. A nossa abordagem consiste em investigá-los não enquanto correção à propagação local de fótons, ainda que possa servir a tal propósito, mas como modos de interação gravitacional responsáveis por distribuições de energia dependentes da curvatura, em cenários tipo Friedman. A dependência explícita do tensor de energia com funções da curvatura requer uma reinterpretação do tensor de energia da teoria geral da relatividade. Examina-se como requisito à fonte total de energia a compatibilidade com a representação de fluido perfeito. Em cenários distintos de universo magnético, encontram-se situações nas quais a radiação eletromagnética pode ser responsável pela aceleração cósmica a tempos tardios e a topologia do sistema dinâmico pode variar com o tempo. Na geometria WIST, a hipótese de equipartição de energia implica o limite riemanniano e a era de radiação da teoria.

Palavras-chave: acoplamentos não-mínimos, relatividade geral, aceleração cósmica, constante cosmológica, geometria WIST.

Abstract

Non minimal interactions of gravity with the electromagnetic field are investigated in Friedman scenarios. The explicit dependence of the energy tensor with functions of the curvature requires to reinterpret the energy tensor of the general theory of relativity. For distinct solutions of magnetic universe there are situations in which the electromagnetic radiation can be responsible for the cosmic acceleration in late times and the topology of dynamic systems can change with time. Another context, in WIST geometry, the hypothesis of equipartition of energy implies the riemannian limit of the theory and its radiation era.

Key words: non minimal couplings, general theory of relativity, cosmic acceleration, WIST geometry.

SUMÁRIO

Convenções	1
Introdução	2
Capítulo I: O campo eletromagnético na cosmologia	8
Capítulo II: Aceleração cósmica	23
Capítulo III: Bifurcações no Universo	39
Capítulo IV: Geometria WIST	50
Considerações finais	57
Bibliografia	60
Apêndice A: Cálculo da média	63
Apêndice B: Cálculo dos parâmetros óticos	73

CONVENÇÕES

TGR: Teoria Geral da Relatividade.

Igualdade por definição: $:=$

Igualdade sob o princípio variacional: \doteq

Assinatura da métrica: $(+ ---)$.

Índices gregos variam de 0 a 3.

Índices latinos variam de 1 a 3.

Simetria dos índices: $A_{(\mu\nu)} := A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}$.

Antissimetria dos índices: $A_{[\mu\nu]} := A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$.

Tensor de Levi-Civita: $\eta^{\alpha\beta\mu\nu} := -\frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$,

onde $g := \det(g_{\mu\nu})$ e $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ é o símbolo completamente antissimétrico de Levi-Civita.

Derivada covariante de um campo vetorial covariante v_μ : $v_{\mu;\nu} := v_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha v_\alpha$.

Tensor curvatura de Riemann-Christoffel: $v_{\alpha;\mu;\nu} - v_{\alpha;\nu;\mu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} v^\beta$.

Constante de Einstein: $\kappa := 4\pi G_N/c^4$.

INTRODUÇÃO

Por acoplamento mínimo, no contexto da Teoria Geral da Relatividade, entende-se o procedimento matemático pelo qual a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ é substituída pela métrica de espaços curvos $g_{\mu\nu}$ e as derivadas parciais ∂_μ são substituídas por derivadas covariantes D_μ compatíveis com uma conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, ou seja,

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \longrightarrow D_\mu. \quad (1)$$

Esse foi o caminho trilhado por Einstein para conquistar um novo grau de universalidade da física relativística: a covariância das equações na geometria de Minkowski, com respeito ao Grupo de Lorentz, é estendida a qualquer referencial não inercial na geometria de Riemann. O princípio da covariância geral é a exigência de que há uma constituição objetiva da realidade física¹.

A hipótese que sustenta tal interpretação reside na possibilidade de se elaborar uma descrição covariante da gravitação que, localmente, a elimina da descrição dos processos gravitacionais. Consequentemente, abre-se um caminho pelo qual a física relativística dos espaços de Minkowski é compatível com a construção geométrica de espaços tangentes a cada ponto de uma variedade riemanniana \mathcal{M} , sobre os quais a massa inercial e a massa gravitacional de um corpo \mathbb{A} são indistinguíveis. Tal hipótese é conhecida como o princípio de equivalência.

É compreensível, por conseguinte, que a representação da interação gravitacional seja o próprio tensor curvatura de Riemann-Christoffel $R_{\alpha\mu\beta\nu}$ ², definido pela anticomutação das derivadas de segunda ordem de um 4-vetor v_μ ,

$$v_{\alpha;\mu;\nu} - v_{\alpha;\nu;\mu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} v^\beta, \quad (2)$$

onde o ponto e vírgula denota a derivada covariante com relação à conexão de Levi Civita $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha := \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu \ \nu \end{smallmatrix} \right\}$. Pelo Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana, há uma única conexão sobre uma variedade riemanniana que é livre de torção e compatível com a métrica, a saber a Conexão de Levi Civita.

O tensor de Riemann-Christoffel pode ser escrito em termos da conexão e sua derivada parcial simples, pela relação

$$R_{\mu\beta\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\beta,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\beta}^\alpha + \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\epsilon. \quad (3)$$

¹Choquet-Bruhat, 2015, §III.2, nota 2.

²Novello, 2010, cap. 1.

Prosseguindo a trilha por meio do formalismo variacional, o acoplamento mínimo da gravitação com o campo eletromagnético é descrito pela ação \mathcal{S}_{min} ,

$$\mathcal{S}_{min} = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{c^2}{4} F \right) d^4x. \quad (4)$$

onde denota-se por $F := F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$ é o tensor antissimétrico de Faraday, definido em termos do 4-potencial A_μ pela expressão usual

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}. \quad (5)$$

A dinâmica contida na ação \mathcal{S}_{min} é obtida pelo princípio de Hamilton,

$$\delta\mathcal{S}_{min} = 0, \quad (6)$$

tal que $g_{\mu\nu}$ e A_μ são os campos independentes cujas respectivas variações $\delta g^{\mu\nu}$ e δA_μ são nulas sobre a fronteira³.

A variação da ação com relação à métrica, $\delta g^{\mu\nu}$, é dada, a menos de um termo de superfície, por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa E_{\mu\nu}, \quad (7)$$

sendo $E_{\mu\nu}$ a distribuição de energia gerada pelo campo eletromagnético, na forma⁴

$$E_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu + \frac{1}{4} F g_{\mu\nu}. \quad (8)$$

Ou seja, o papel que o princípio de acoplamento mínimo exerce sobre a dinâmica dos processos gravitacionais consiste em não envolver explicitamente a intensidade da curvatura na fonte de energia.

Pela variação da ação com relação a A_μ , obtêm-se as equações de Maxwell no vazio,

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (9)$$

De imediato, constata-se que as equações de campo para a métrica e para o campo eletromagnético, (7) e (9) respectivamente, retornam às expressões da teoria restrita da relatividade sob o

³O presente trabalho não examina as condições e possíveis contribuições de fronteira geradas por interações gravitacionais mínimas e não-mínimas.

⁴ Eddington, 1923, §77.

limite (1). Torna-se possível, portanto, arquitetar uma teoria da gravitação preservando a física relativística local dos referenciais inerciais.

Naturalmente, a conclusão nos coloca diante da sua antítese: é o princípio de acoplamento mínimo válido em todas as situações descritas no interior da TGR? A resposta - *negativa* - é conhecida desde os primórdios da própria teoria.

Vamos considerar as equações de Maxwell na presença de uma 4-corrente J^μ , gerada por campos de matéria externa. Basta, para tanto, introduzir à ação S_{min} o termo de matéria

$$\mathcal{L}_{mat} = \frac{\sqrt{-g}}{2} e J^\mu A_\mu, \quad (10)$$

onde a carga elétrica e caracteriza a intensidade da interação mínima da corrente com o potencial A^μ . Assim, as equações (9) retornam

$$F^{\mu\nu}{}_{;v} = \frac{e}{c^2} J^\mu. \quad (11)$$

Em 1923, Arthur Eddington mostrou em seu tratado *The Mathematical Theory of Relativity*, que ao escrevermos a equação de onda para $F_{\mu\nu}$, em espaços curvos, nos deparamos com uma situação que não está contida na dinâmica regida pelo princípio de acoplamento mínimo. Isto é, uma equação de onda para o tensor de Faraday implica a dependência explícita e direta de $F_{\mu\nu}$ com o tensor de Riemann-Christoffel. Vamos rever brevemente essa situação.

A equação de onda para $F_{\mu\nu}$ em uma variedade riemanniana \mathcal{M} 4-dimensional consiste em uma expressão para $\square F_{\mu\nu}$, onde $\square := g^{\mu\nu}(\cdot)_{;\mu;\nu}$ denota o operador d'Alembertiano. De imediato, constata-se que $\square F_{\mu\nu}$ contém derivadas covariantes de terceira ordem do campo eletromagnético A_μ .

A partir das equações de Maxwell na presença de matéria e pelas definições de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$, equações (2) e (5), escreve-se⁵

$$\begin{aligned} J_{\mu;\nu} &= F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha;\nu} = g^{\alpha\beta} (A_{\mu;\beta;\alpha;\nu} - A_{\beta;\mu;\alpha;\nu}) \\ &= g^{\alpha\beta} (A_{\mu;\beta;\nu;\alpha} - A_{\beta;\mu;\nu;\alpha}) - g^{\alpha\beta} (R^{\epsilon}{}_{\mu\alpha\nu} A_{\epsilon\beta} + R^{\epsilon}{}_{\beta\alpha\nu} A_{\mu\epsilon} - R^{\epsilon}{}_{\beta\alpha\nu} A_{\epsilon\mu} - R^{\epsilon}{}_{\mu\alpha\nu} A_{\beta\epsilon}) \\ &= g^{\alpha\beta} (A_{\mu;\beta;\nu} - A_{\beta;\mu;\nu})_{;\alpha} - g^{\alpha\beta} (R^{\epsilon}{}_{\mu\alpha\nu} F_{\epsilon\beta} + R^{\epsilon}{}_{\beta\alpha\nu} F_{\mu\epsilon}) \\ &= g^{\alpha\beta} (A_{\mu;\nu;\beta} - A_{\beta;\mu;\nu} - R^{\epsilon}{}_{\mu\beta\nu} A_{\epsilon})_{;\alpha} - R^{\epsilon}{}_{\mu\alpha\nu} F_{\epsilon}{}^{\alpha} - R^{\epsilon}{}_{\nu} F_{\mu\epsilon}. \end{aligned} \quad (12)$$

⁵Cf. Eddington, 1923, §74. Nota-se, porém, que a convenção de sinal do tensor de Riemann-Christoffel usada por Eddington, equação (34.3) do referido tratado, é distinta da nossa.

Procedendo similarmente para $J_{\nu;\mu}$ e combinando-o com $J_{\mu;\nu}$, encontramos

$$\begin{aligned} J_{\mu;\nu} - J_{\nu;\mu} &= g^{\alpha\beta} (F_{\mu\nu})_{;\beta;\alpha} + g^{\alpha\beta} [(R^\varepsilon_{\beta\mu\nu} + R^\varepsilon_{\nu\beta\mu} + R^\varepsilon_{\mu\nu\beta})A_\varepsilon]_{;\alpha} \\ &\quad - 2R^\varepsilon_{\mu\alpha\nu}F_\varepsilon{}^\alpha - R^\varepsilon_\mu F_{\nu\varepsilon} + R^\varepsilon_\nu R_{\mu\varepsilon}. \end{aligned} \quad (13)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (13) corresponde à definição do operador d'Alembertiano; o segundo, escrito com fator comum A_ε , é a Identidade de Bianchi de primeiro tipo,

$$R^\varepsilon_{\beta\mu\nu} + R^\varepsilon_{\nu\beta\mu} + R^\varepsilon_{\mu\nu\beta} = 0. \quad (14)$$

Os últimos dois termos da relação (13) podem ser combinados pela antissimetria em μ, ν ,

$$R^\varepsilon_{[\mu}F_{\nu]\varepsilon} := R^\varepsilon_\mu F_{\nu\varepsilon} - R^\varepsilon_\nu R_{\mu\varepsilon}. \quad (15)$$

Segue-se que a equação de onda para o tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ é descrita por

$$\square F_{\mu\nu} = J_{[\mu;\nu]} + 2R^\varepsilon_{\mu\nu\alpha}F_\varepsilon{}^\alpha - R^\varepsilon_{[\mu}F_{\nu]\varepsilon}. \quad (16)$$

Nas palavras de Eddington⁶,

o resultado (16) é, penso eu, inesperado. Ele mostra que as equações de propagação do campo eletromagnético envolve o tensor de Riemann-Christoffel; e que, portanto, esse não é um dos fenômenos para os quais as equações galileanas ordinárias podem ser imediatamente generalizadas pelo princípio de equivalência. Isso naturalmente nos deixa desconfortáveis quanto ao fato de termos feito certo ao adotar as equações invariantes de propagação da luz ($ds = 0$, $\delta \int ds = 0$) como verdadeiras em todas as circunstâncias.

Tal resultado, contudo, não se traduziu em uma crítica da dinâmica expressa pela interação gravitacional mínima. Ao contrário, foi considerado tão somente como uma regra que cerceia a dinâmica convencional da gravitação até derivadas covariantes de segunda ordem dos campos $g_{\mu\nu}$ e A_μ .

Somos, no entanto, conduzidos a questionar o alcance da dinâmica contida na ação \mathcal{S}_{min} : a dependência explícita da curvatura nos processos gravitacionais envolve, inevitavelmente, derivadas de ordem superior? Se não, é o acoplamento mínimo responsável por exaurir todos os

⁶Eddington, 1923, pp.176-7.

modos da interação gravitacional com o campo eletromagnético? Essa é a questão de princípio que suscita a presente investigação.

Uma crítica da dinâmica convencional da gravitação nos conduz a uma ação total \mathcal{S} que, além de \mathcal{S}_{min} , passa a compor uma ação não mínima \mathcal{S}_{nm} , a saber

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{min} + \mathcal{S}_{nm}. \quad (17)$$

Os possíveis modos de interação – da gravitação com o eletromagnetismo linear de Maxwell – contidos em \mathcal{S}_{nm} , as respectivas dinâmicas e algumas de suas propriedades são discutidos no Capítulo 1.

A fonte de energia total $T_{\mu\nu}$ responsável pela curvatura do espaço-tempo deixa de ser apenas a contribuição de Maxwell $E_{\mu\nu}$ e passa a compor uma fonte não mínima $Z_{\mu\nu}$, que contém explicitamente funções da curvatura, sob a forma geral

$$T_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} + \xi Z_{\mu\nu}, \quad (18)$$

onde ξ é a constante de acoplamento não mínimo, em geral dimensional. A TGR tradicional reside no limite em que ξ torna-se desprezível.

Examinam-se os acoplamentos diretos da gravitação com o tensor de Faraday não enquanto correção à propagação local de fótons, ainda que possa servir a tal propósito⁷, mas enquanto modos de interação gravitacional responsáveis por distribuições de energia dependentes da curvatura, em cenários tipo Friedman.

A questão crucial que perpassa tal investigação em cenários tipo Friedamn – examinada a partir do Capítulo 2 – consiste em mostrar que o tensor de energia gerado pela interação gravitacional não mínima pode ser reduzido a uma representação de fluido perfeito.

A resposta requer, entretanto, uma reinterpretação do que comumente se denomina tensor de energia, pois a interação não mínima, no contexto da TGR, é responsável por tornar indissociáveis a curvatura e o campo físico em interação.

A condição de compatibilidade de $Z_{\mu\nu}$ com a métrica isotrópica e homogênea depende do mesmo procedimento de média do campo eletromagnético, introduzido por Tolman e Ehrenfest em 1930⁸ e aplicado à fonte de Maxwell $E_{\mu\nu}$ pela cosmologia padrão. Há interações gravitacionais, no entanto, que exigem uma hipótese adicional, envolvendo as derivadas parciais simples das componentes elétrica e magnética, como será discutido no Capítulo 3.

Uma vez obtido o tensor de energia sob média, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, passa-se ao estudo de cenários cosmológicos nos quais, por hipótese, apenas a componente magnética $\mathcal{B}^2(t)$ do tensor de Faraday

⁷Deser e van Nieuwenhuizen, 1974; Drummond e Hathrell, 1980.

⁸Tolman e Ehrenfest, 1930.

sobrevive. Essa classe de soluções é amplamente encontrada na literatura sob o nome de Universos magnéticos⁹.

Ainda no Capítulo 2 obtém-se, de forma inesperada, que a radiação eletromagnética interagindo tão somente com a gravitação pode ser responsável pela aceleração cósmica a tempos tardios.

Seguimos no Capítulo 3 por um caminho pouco explorado na cosmologia, a saber, a ocorrência de pontos de bifurcação no interior da TGR. Em continuidade aos estudos dos Professores Mario Novello e Ligia Rodrigues¹⁰, mostramos, com poucos elementos da análise qualitativa de sistemas dinâmicos, que a fonte de energia da forma (18), sob a representação de fluido perfeito, exhibe pontos de bifurcação.

A novidade em relação aos trabalhos de Novello e Ligia Rodrigues reside no fato de o sistema dinâmico que descreve a solução cosmológica ser caracterizado, não pela viscosidade, mas pela constante de interação não mínima ξ .

O Capítulo 4, por sua vez, é um breve comentário sobre o procedimento de média do campo eletromagnético na Geometria WIST. Mostramos que a hipótese de equipartição de energia entre as partes elétrica $\mathcal{E}^2(t)$ e magnética $\mathcal{B}^2(t)$ do tensor de Faraday contraído conduz à era de radiação no limite riemanniano da teoria.

⁹Novello e Bergliaffa, 2008, §4.5.1

¹⁰Novello, 1982; Novello e Rodrigues, 1984.

Capítulo 1

O CAMPO ELETROMAGNÉTICO NA COSMOLOGIA

Escondido atrás da "matéria" diretamente revelada a nós pelos órgãos sensoriais está, porém, o campo. Para descobrir as suas próprias leis e as leis pelas quais o campo determina a magnitude da energia, a teoria de Maxwell é o primeiro brilhante começo.
H. Weyl, 1923, §27.

Se considerarmos interações de primeira ordem na curvatura e de segunda ordem no campo eletromagnético, somos conduzidos a um conjunto de sete acoplamentos não-mínimos da gravitação com o eletromagnetismo linear de Maxwell, a saber¹

$$I_1 = R A_\mu A^\mu \quad (1.1)$$

$$I_2 = R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \quad (1.2)$$

$$I_3 = R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.3)$$

$$I_4 = R F_{\mu\nu} \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

$$I_5 = R_{\mu\nu} F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} \quad (1.5)$$

$$I_6 = R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

$$I_7 = \overset{*}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} . \quad (1.7)$$

Enquanto as interações I_1 e I_2 se caracterizam por conter a dimensão² correta da densidade lagrangiana, $[\mathcal{L}] = M \cdot L^{-3}$, e quebrar a invariância de calibre, as interações I_3, \dots, I_7 possuem dimensão de $[\mathcal{L}] = M \cdot L^{-5}$ e preservam a invariância de calibre.

Ambos os modos de interação I_1 e I_2 , da curvatura com o campo de Maxwell A_μ , são capazes de produzir, a partir da teoria clássica linear, processos eletrodinâmicos não-lineares. A solução Novello-Salim³ mostra que I_1 pode gerar um cenário tipo Friedman de fótons não-lineares e com fator de escala mínimo; ao passo que I_2 não admite solução isotrópica e homogênea⁴.

¹ Novello, 1987, p.275; Novello e Bergliaffa, 2008, §4.3.

² Denota-se por M a dimensão de massa e L a de comprimento.

³ Novello e Salim, 1979; Novello, Salim e Ruckert, 1983; Novello e Romero, 1987.

⁴ Uma revisão da solução NS é feita no trabalho de Oliveira, 1988, cap. 4 e, mais recentemente, por Novello e Bergliaffa, 2008, §4.4.

Soluções simetricamente esféricas da interação I_1 são estudadas por von Rückert, 1982. O exame de dinâmicas associadas à interação I_1 via princípio variacional de Palatini é realizado por Alves, 1986. Uma revisão detalhada da solução NS e das soluções cosmológicas em geometrias tipo WIST é feita no trabalho de Oliveira, 1988. A análise qualitativa da solução NS, por meio de sistemas dinâmicos, é realizada por Romero, 1988.

O conjunto de interações I_3, \dots, I_7 foram desconsiderados do exame de cenários tipo Friedman pela constatação (correta) de que o campo $F_{\mu\nu}$ quebra a simetria espacial ao determinar direções preferenciais de propagação; atribuiu-se a tal fato (de forma incorreta) a impossibilidade de construir cenários cósmicos tipo Friedman⁵. Tal conclusão pode ser revista a partir dos próprios caminhos convencionais da cosmologia padrão.

O presente trabalho é um retorno⁶ à discussão dos acoplamentos diretos da gravitação com o tensor de Faraday. A nossa proposta consiste em investigá-los enquanto modos de interação gravitacional responsáveis por distribuições de energia dependentes da curvatura. Trata-se, de fato, de uma reinterpretação do que comumente se denomina tensor de energia, pois a interação não mínima é responsável por tornar indissociável a curvatura e o campo físico em interação.

Pelo procedimento de média das partes elétrica e magnética do tensor $F_{\mu\nu}$, a obstrução acima - aparentemente final, definitiva - é dissolvida e o conjunto de acoplamentos I_3, \dots, I_7 é restituído ao exame de soluções isotrópicas e homogêneas. Tal procedimento será examinado no Capítulo 2.

Antes, porém, passamos às considerações de algumas propriedades do campo eletromagnético sob interação gravitacional não mínima.

As equações de Maxwell, na ausência de matéria, apresentam uma simetria interna sob o mapa global $\mathcal{R}(\alpha)$

$$F_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{R}(\alpha)} F'_{\mu\nu} = \cos\alpha F_{\mu\nu} + \text{sen}\alpha F^*_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

onde

$$F^{*\mu\nu} := \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}. \quad (1.9)$$

A implicação entre o campo eletromagnético e o tensor de energia associado é tal que se $F_{\mu\nu}$ é invariante sob o mapa dual (1.8), então $F_{\mu\nu}$ e $F'_{\mu\nu}$ possuem o mesmo tensor de energia $E_{\mu\nu}$ ⁷.

O tensor de Faraday satisfaz as seguintes identidades algébricas⁸

⁵Jorda, 1988, p.7.

⁶Novello, 1987; Jorda, 1988; Novello e Jorda, 1989; Novello, Oliveira e Salim, 1990; Novello, 1993.

⁷ Debever, 1958, §2.

⁸Detalhes do cálculo podem ser conferidos no trabalho de Jorda, 1988, pág.11.

$${}^*F^{\mu\alpha}{}^*F_{\alpha\nu} - F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}F\delta^\mu{}_\nu, \quad (1.10)$$

$${}^*F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} = -\frac{1}{4}G\delta^\mu{}_\nu, \quad (1.11)$$

com $G := F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}$.

Pela identidade (1.10), o tensor de energia de Maxwell assume a forma

$$2E_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu + {}^*F_{\mu\alpha}{}^*F^\alpha{}_\nu. \quad (1.12)$$

Sob o mapa dual (1.8) e considerando as identidades algébricas, tem-se

$$\begin{aligned} F'_{\mu\alpha}F'^\alpha{}_\nu &= (\cos\alpha F_{\mu\varepsilon} + \text{sen}\alpha {}^*F_{\mu\varepsilon}) (\cos\alpha F^\varepsilon{}_\nu + \text{sen}\alpha {}^*F^\varepsilon{}_\nu) \\ &= \cos^2\alpha F_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu + \text{sen}^2\alpha {}^*F_{\mu\alpha}{}^*F^\alpha{}_\nu + \text{sen}2\alpha {}^*F_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} {}^*F'_{\mu\alpha}{}^*F'^\alpha{}_\nu &= (\cos\alpha {}^*F_{\mu\varepsilon} - \text{sen}\alpha F_{\mu\varepsilon}) (\cos\alpha {}^*F^\varepsilon{}_\nu - \text{sen}\alpha F^\varepsilon{}_\nu) \\ &= \cos^2\alpha {}^*F_{\mu\alpha}{}^*F^\alpha{}_\nu + \text{sen}^2\alpha F_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu - \text{sen}2\alpha {}^*F_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Logo,

$$2E_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{R}(\alpha)} 2E'_{\mu\nu} = F'_{\mu\alpha}F'^\alpha{}_\nu + {}^*F'_{\mu\alpha}{}^*F'^\alpha{}_\nu = 2E_{\mu\nu}. \quad (1.15)$$

Perde-se a simetria (i.) na presença de corrente elétrica⁹ ou (ii.) se o ângulo de rotação torna-se um mapa local¹⁰ $\alpha = \alpha(x)$.

Tradicionalmente, a discussão acerca da rotação dual do campo eletromagnético está conectada ao exame de compatibilidade de monopólos magnéticos com a teoria quântica de campos, uma questão introduzida pelo trabalho seminal de Dirac, 1931. Restritos ao princípio de acoplamento mínimo, poderíamos ser levados a concluir que não há como restaurar a invariância dual de $F_{\mu\nu}$ em espaços curvos.

Tal questão, no entanto, pode ser novamente aberta se considerarmos o caminho dos acoplamentos não mínimos: sob quais condições a gravitação é capaz de recuperar a invariância dual do campo eletromagnético? A resposta está na possibilidade de a interação ser não mínima.

A propriedade de invariância dual do campo eletromagnético em espaços curvos tornou-se o ponto de partida do programa de geometrização do eletromagnetismo¹¹.

⁹Dirac, 1931.

¹⁰Novello e Bergliaffa, 2008, §4.6.2.

¹¹Como exemplo, os trabalhos de Rainich, 1925, Misner e Wheeler, 1957, Witten, 1959 e Novello, 1979b

Com um teste direto, nota-se que as interações não-mínimas (I_3, \dots, I_7) quebram a invariância dual do campo eletromagnético. Vamos considerar, por exemplo, a interação I_3 :

$$\begin{aligned} I_3 \xrightarrow{\mathcal{R}(\alpha)} I_3' &= R(\cos \alpha F_{\mu\nu} + \text{sen} \alpha F_{\mu\nu}^*) (\cos \alpha F^{\mu\nu} + \text{sen} \alpha F^{\mu\nu*}) \\ &= \cos 2\alpha I_3 + \text{sen} 2\alpha I_4. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Similarmente, a interação I_5 sob (1.8) implica

$$\begin{aligned} I_5 \xrightarrow{\mathcal{R}(\alpha)} I_5' &= R_{\mu\nu} (\cos \alpha F^{\mu\varepsilon} + \text{sen} \alpha F^{*\mu\varepsilon}) (\cos \alpha F_{\varepsilon}{}^\nu + \text{sen} \alpha F_{\varepsilon}^{*\nu}) \\ &= R_{\mu\nu} (\cos^2 \alpha F^{\mu\varepsilon} F_{\varepsilon}{}^\nu + \text{sen}^2 \alpha F^{*\mu\varepsilon} F_{\varepsilon}^{*\nu} + \text{sen} 2\alpha F^{\mu\varepsilon} F_{\varepsilon}^{*\nu}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

As identidades algébricas implicam

$$\begin{aligned} I_5 \xrightarrow{\mathcal{R}(\alpha)} I_5' &= (\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) R_{\mu\nu} F_{\alpha}{}^{\mu} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \alpha R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \text{sen} 2\alpha R G \\ &= I_5 + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \alpha I_3 - \frac{1}{4} \text{sen} 2\alpha I_4. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Há, no entanto, uma combinação dos acoplamentos não-mínimos I_3 e I_5 que restaura a invariância do campo $F_{\mu\nu}$ sob a rotação global $\mathcal{R}(\alpha)$ em espaços curvos, a saber¹²

$$\mathcal{D} := I_5 + \frac{1}{4} I_3 = C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

onde $\Phi_{\mu\nu} := F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha}$ e $C_{\mu\nu}$ é o tensor da gravitação livre de traço¹³,

$$C_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

o mesmo objeto com o qual nove dos quatorze invariantes de Debever¹⁴ são construídos. A demonstração é diretamente concluída pelas relações (1.16) e (1.18).

Nota-se, além disso, a relação de equivalência

$$C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} = R_{\mu\nu} E^{\mu\nu}. \quad (1.21)$$

De imediato, questiona-se: a fonte de energia gerada pela interação não mínima \mathcal{D} preserva a invariância dual?

Vamos seguir a definição convencional do tensor de energia do campo eletromagnético, dada pela expressão (8).

¹² Novello, 1987, §6; Novello e Bergliaffa, 2008, §4.6.2.

¹³ Introduzido por Einstein, 1919.

¹⁴ Debever, 1964.

A densidade lagrangiana \mathcal{L} da interação \mathcal{D} depende, por conseguinte, de uma constante de acoplamento ζ , de dimensão L^2 . Além disso, o fator $1/2$ deve ser introduzido para compatibilizar o tensor de energia gerado por \mathcal{D} com o tensor de Maxwell. A expressão de \mathcal{L} é, portanto,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \frac{\zeta}{2} C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

A variação métrica de \mathcal{L} em relação ao campo $g^{\mu\nu}$ retorna:

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}) &= \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} C_{\alpha\beta} \Phi^{\alpha\beta} \delta g^{\mu\nu} + \Phi^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta \Phi^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \delta(RF) \right) \\ &= \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\sigma} \Phi^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} RF) \delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta \Phi^{\mu\nu} + \frac{1}{4} R \delta F \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} F R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Calcula-se, a seguir, termo a termo. A variação de $\Phi^{\mu\nu}$ escreve-se

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} \delta \Phi^{\mu\nu} &= R_{\rho\sigma} \delta (F^{\rho\alpha} F_{\alpha}{}^{\sigma}) \\ &= R_{\rho\sigma} (F_{\mu}{}^{\alpha} F_{\alpha}{}^{\sigma} \delta g^{\mu\rho} + F_{\beta}{}^{\rho} F_{\alpha}{}^{\sigma} \delta g^{\beta\alpha} + F^{\rho\alpha} F_{\alpha\nu} g^{\nu\sigma}) \\ &= (R_{\sigma\nu} \Phi_{\mu}{}^{\sigma} + R^{\rho\sigma} F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} + R_{\rho\mu} \Phi_{\nu}{}^{\rho}) \delta g^{\mu\nu} \\ &= (R_{\varepsilon(\mu} \Phi_{\nu)}{}^{\varepsilon} + R^{\rho\sigma} F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma}) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

O termo com a variação métrica de F é

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} R \delta F &= \frac{1}{4} R (F_{\mu\nu} F_{\alpha}{}^{\nu} \delta g^{\alpha\mu} + F_{\mu\nu} F_{\beta}{}^{\mu} \delta g^{\beta\nu}) \\ &= -\frac{1}{4} R (F_{\mu\nu} F_{\alpha}{}^{\nu} \delta g^{\mu\alpha} + F_{\nu\mu} F_{\beta}{}^{\mu} \delta g^{\nu\beta}) \\ &= -\frac{1}{2} R \Phi_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Por sua vez, a variação métrica do Tensor de Ricci, combinado ao Tensor de Maxwell, escreve-se

$$\begin{aligned} E^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= E^{\mu\nu} (-\delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu;\alpha} + \delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha;\nu}) \\ &= (E^{\mu\nu}{}_{;\alpha} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa} \delta^{\nu}{}_{\alpha}) \delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} \\ &= (E^{\mu\nu}{}_{;\alpha} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa} \delta^{\nu}{}_{\alpha}) \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\delta g_{\beta\mu;\nu} + \delta g_{\beta\nu;\mu} - \delta g_{\mu\nu;\beta}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Abrindo cada variação:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(E^{\mu\nu}{}_{;\alpha} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa} \delta^{\nu}{}_{\alpha}) g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\mu;\nu} &= -\frac{1}{2}(E^{\mu\nu}{}_{;\alpha;\nu} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa;\nu} \delta^{\nu}{}_{\alpha}) g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\mu} \\
&= -\frac{1}{2}(E^{\mu\nu}{}_{;\alpha;\nu} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa;\alpha}) (-g_{\beta\mu} \delta g^{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2}(E_{\beta}{}^{\nu}{}_{;\alpha;\nu} - E_{\beta}{}^{\kappa}{}_{;\kappa;\alpha}) \delta g^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}(E_{\nu}{}^{\varepsilon}{}_{;\mu;\varepsilon} - E_{\nu}{}^{\kappa}{}_{;\kappa;\mu}) \delta g^{\mu\nu}. \tag{1.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(E^{\mu\nu}{}_{;\alpha} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa} \delta^{\nu}{}_{\alpha}) g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\nu;\mu} &= -\frac{1}{2}(E^{\mu\nu}{}_{;\alpha;\mu} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa;\mu} \delta^{\nu}{}_{\alpha}) g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\nu} \\
&= -\frac{1}{2}(E^{\mu\nu}{}_{;\alpha;\mu} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa;\mu} \delta^{\nu}{}_{\alpha}) (-g_{\beta\nu} \delta g^{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2}(E^{\mu}{}_{\beta;\alpha;\mu} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa;\mu} g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}(E^{\varepsilon}{}_{\nu;\mu;\varepsilon} - E^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho} g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}. \tag{1.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(E^{\mu\nu}{}_{;\alpha} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa} \delta^{\nu}{}_{\alpha}) g^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\nu;\beta} &= +\frac{1}{2}(E^{\mu\nu}{}_{;\alpha;\beta} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa;\beta} \delta^{\nu}{}_{\alpha}) g^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\nu} \\
&= +\frac{1}{2}(\square E^{\mu\nu} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa;\beta} g^{\nu\beta}) \delta g_{\mu\nu} \\
&= +\frac{1}{2}(\square E^{\mu\nu} - E^{\mu\kappa}{}_{;\kappa}{}^{;\nu}) (-g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}) \\
&= -\frac{1}{2}(\square E_{\alpha\beta} - E_{\alpha}{}^{\kappa}{}_{;\kappa;\beta}) \delta g^{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}(\square E_{\mu\nu} - E_{\mu}{}^{\kappa}{}_{;\kappa;\nu}) \delta g^{\mu\nu}, \tag{1.29}
\end{aligned}$$

onde o d'Alembertiano \square é definido como

$$\square M_{\mu\nu} := g^{\gamma\delta} M_{\mu\nu;\gamma;\delta}. \tag{1.30}$$

Coletando os resultados, a expressão (1.26) retorna

$$\begin{aligned}
E^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (E_{\nu}{}^{\varepsilon}{}_{;\mu;\varepsilon} - E_{\nu}{}^{\kappa}{}_{;\kappa;\mu} + E_{\nu;\mu;\varepsilon}^{\varepsilon} - E^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho} g_{\mu\nu} - \square E_{\mu\nu} + E_{\mu}{}^{\kappa}{}_{;\kappa;\nu}) \delta g^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} (2E_{\mu;\nu;\varepsilon}^{\varepsilon} - E^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho} g_{\mu\nu} - \square E_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} \\
&= (E_{\mu;\nu;\varepsilon}^{\varepsilon} - \frac{1}{2} E^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \square E_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} \\
&= (\Phi_{\mu;\nu;\varepsilon}^{\varepsilon} + \frac{1}{4} F_{;\nu;\mu} - \frac{1}{2} \Phi^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho} g_{\mu\nu} - \frac{1}{8} \square F g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \square \Phi_{\mu\nu} - \frac{1}{8} \square F g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} \\
&= (\frac{1}{2} \Phi_{(\mu;\nu);\varepsilon}^{\varepsilon} + \frac{1}{4} F_{;\mu;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Phi^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho} + \frac{1}{2} \square F) - \frac{1}{2} \square \Phi_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Logo, a fonte de energia $\mathcal{Z}_{\mu\nu}$ gerada pelo acoplamento (1.22) resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{\mu\nu} &\doteq -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\sigma} \Phi^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} R F) + R_{\varepsilon(\mu} \Phi_{\nu)}{}^{\varepsilon} + R^{\rho\sigma} F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} R \Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{4} F R_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2} \Phi_{(\mu;\nu);\varepsilon}^{\varepsilon} + \frac{1}{4} F_{;\mu;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Phi^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho} + \frac{1}{2} \square F) - \frac{1}{2} \square \Phi_{\mu\nu}, \tag{1.31}
\end{aligned}$$

O traço de $\mathcal{Z}_{\mu\nu}$ se reduz a

$$\mathcal{Z} = C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} - E^{\mu\nu}{}_{;\mu;\nu}. \tag{1.32}$$

Conclui-se, por inspeção direta dos termos com derivadas de $F_{\mu\nu}$, que a fonte não mínima $\mathcal{Z}_{\mu\nu}$ quebra a invariância dual do campo eletromagnético.

No limite em que a métrica de espaço curvo $g_{\mu\nu}$ tende para a métrica de espaço plano $\eta_{\mu\nu}$, $\mathcal{Z}_{\mu\nu}$ é não nulo,

$$\lim_{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \mathcal{Z}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Phi_{(\mu;\nu);\varepsilon}^{\varepsilon} + \frac{1}{4} F_{;\mu;\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\Phi^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho} + \frac{1}{2} \square F) - \frac{1}{2} \square \Phi_{\mu\nu}, \tag{1.33}$$

com

$$\square F := \frac{1}{\sqrt{-\eta}} (\eta^{\mu\nu} F_{,\mu})_{,\nu}. \tag{1.34}$$

A variação de \mathcal{L} em relação ao campo A_{μ} escreve-se

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g} \frac{\zeta}{2} C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}) &\doteq \frac{\sqrt{-g}}{2} \zeta [C^{\mu\nu} (\delta F_{\mu\alpha}) F^{\alpha}{}_{\nu} + C^{\mu\nu} F_{\mu}{}^{\alpha} \delta F_{\alpha\nu}] \\
&= \sqrt{-g} \zeta [-C^{\mu\varepsilon} F_{\varepsilon}{}^{\nu} - F^{\mu}{}_{\varepsilon} C^{\varepsilon\nu}] \delta(A_{\mu;\nu}). \tag{1.35}
\end{aligned}$$

Introduzindo a contribuição de Maxwell, a variação da ação em relação a A_μ retorna:

$$\begin{aligned} \delta_{A_\mu} \int \mathcal{L} d^4x &= \int \sqrt{-g} [F^{\mu\nu}_{;\nu} + \zeta (C^\mu_\varepsilon F^{\varepsilon\nu} + F^\mu_\varepsilon C^{\varepsilon\nu})_{;\nu}] \delta A_\mu d^4x \\ &\quad - \int \left\{ (\sqrt{-g} F^{\mu\nu} \delta A_\mu)_{;\nu} + \zeta [\sqrt{-g} (C^{\mu\varepsilon} F_\varepsilon{}^\nu + F^\mu_\varepsilon C^{\varepsilon\nu}) \delta A_\mu]_{;\nu} \right\} d^4x. \end{aligned} \quad (1.36)$$

A segunda integral acima equivale a um termo de superfície, sobre o qual a variação δA_μ é nula. A dinâmica de A_μ é descrita por

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} + \zeta (C^\mu_\varepsilon F^{\varepsilon\nu} + F^\mu_\varepsilon C^{\varepsilon\nu})_{;\nu} = 0. \quad (1.37)$$

Vamos examinar algumas propriedades do campo eletromagnético sob a interação $\zeta C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}$.

A divergência da fonte de Maxwell¹⁵ implica

$$\begin{aligned} E^{\mu\nu}_{;\nu} &= F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu}_{;\nu} + F^\mu_{\alpha;\nu} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta;\nu} \\ &= F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu}_{;\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\gamma\delta} (F_{\nu\gamma;\delta} + F_{\delta\nu;\gamma} + F_{\gamma\delta;\nu}) \\ &= -\zeta F^\mu_\alpha (C^\alpha_\beta F^{\beta\nu} + F^\alpha_\beta C^{\beta\nu})_{;\nu}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

Ou seja, na ausência de corrente externa J^μ , o tensor de Maxwell se conserva apenas no limite para campo gravitacional fraco.

Por outro lado, se tomarmos a divergência das equações (1.37) na presença de correntes geradas por matéria, têm-se

$$F^{\mu\nu}_{;\nu;\mu} + \zeta (C^\mu_\varepsilon F^{\varepsilon\nu} + F^\mu_\varepsilon C^{\varepsilon\nu})_{;\nu;\mu} = J^\mu_{;\mu}. \quad (1.39)$$

O primeiro termo é identicamente nulo, visto que

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}_{;\nu;\mu} &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu}_{;[\nu;\mu]} = \frac{1}{2} (F^{\mu\nu}_{;\nu;\mu} - F^{\mu\nu}_{;\mu;\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (R^\mu_{\varepsilon\nu\mu} F^{\varepsilon\nu} + R^\nu_{\varepsilon\nu\mu} F^{\mu\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2} (-R_{\varepsilon\nu} F^{\varepsilon\nu} + R_{\varepsilon\mu} F^{\mu\varepsilon}) = 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

¹⁵ Dirac, 1975, §29.

Pela regra de Leibniz, a eq.(1.39) retorna

$$\begin{aligned}
J^\mu_{;\mu} &= \zeta(C^\mu_{\varepsilon;\nu} F^{\varepsilon\nu} + C^\mu_{\varepsilon} F^{\varepsilon\nu}_{;\nu} + F^\mu_{\varepsilon;\nu} C^{\varepsilon\nu} + F^\mu_{\varepsilon} C^{\varepsilon\nu}_{;\nu})_{;\mu} \\
&= \zeta(R^\mu_{\varepsilon;\nu} F^{\varepsilon\nu} - \frac{1}{4} R_{,\nu} F^{\mu\nu} + R^\mu_{\varepsilon} F^{\varepsilon\nu}_{;\nu} - \frac{1}{4} R F^{\mu\nu}_{;\nu} \\
&\quad + F^\mu_{\varepsilon;\nu} R^{\varepsilon\nu} - \frac{1}{4} R F^{\mu\nu}_{;\nu} + F^\mu_{\varepsilon} R^{\varepsilon\nu}_{;\nu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} R_{,\nu})_{;\mu} \\
&= \zeta(R^\mu_{\varepsilon;\nu} F^{\varepsilon\nu} + R^\mu_{\varepsilon} F^{\varepsilon\nu}_{;\nu} + F^\mu_{\varepsilon;\nu} R^{\varepsilon\nu} + F^\mu_{\varepsilon} R^{\varepsilon\nu}_{;\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2} R F^{\mu\nu}_{;\nu} - \frac{1}{2} R_{,\nu} F^{\mu\nu})_{;\mu}. \tag{1.41}
\end{aligned}$$

Abrindo a segunda derivada covariante,

$$\begin{aligned}
J^\mu_{;\mu} &= \zeta(R^\mu_{\varepsilon;\nu;\mu} F^{\varepsilon\nu} + R^\mu_{\varepsilon;\nu} F^{\varepsilon\nu}_{;\mu} + R^\mu_{\varepsilon;\mu} F^{\varepsilon\nu}_{;\nu} + R^\mu_{\varepsilon} F^{\varepsilon\nu}_{;\nu;\mu} \\
&\quad + F^\mu_{\varepsilon;\nu;\mu} R^{\varepsilon\nu} + F^\mu_{\varepsilon;\nu} R^{\varepsilon\nu}_{;\mu} + F^\mu_{\varepsilon;\mu} R^{\varepsilon\nu}_{;\nu} + F^\mu_{\varepsilon} R^{\varepsilon\nu}_{;\nu;\mu} \\
&\quad - \frac{1}{2} R_{,\mu} F^{\mu\nu}_{;\nu} - \frac{1}{2} R F^{\mu\nu}_{;\nu;\mu} - \frac{1}{2} R_{,\nu;\mu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{,\nu} F^{\mu\nu}_{;\mu}). \tag{1.42}
\end{aligned}$$

Embora a segunda derivada do campo $F_{\mu\nu}$, com índices contraídos, se anule, o mesmo não ocorre sem a contração dos índices, pois

$$\begin{aligned}
F^{\mu\varepsilon}_{;\nu;\mu} &= \frac{1}{2} F^{\mu\varepsilon}_{;[\nu;\mu]} = \frac{1}{2} (F^{\mu\varepsilon}_{;\nu;\mu} - F^{\mu\varepsilon}_{;\mu;\nu}) \\
&= \frac{1}{2} (R^\mu_{\alpha\nu\mu} F^{\alpha\varepsilon} + R^\varepsilon_{\alpha\nu\mu} F^{\mu\alpha}) \\
&= \frac{1}{2} (-R_{\alpha\nu} F^{\alpha\varepsilon} + R^\varepsilon_{\alpha\nu\mu} F^{\mu\alpha}). \tag{1.43}
\end{aligned}$$

Segue que a equação de continuidade pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
J^\mu_{;\mu} &= \zeta(R^{\varepsilon[\nu} F^{\mu]}_{\varepsilon;\nu;\mu} + F^{\varepsilon[\nu} R^{\mu]}_{\varepsilon;\nu;\mu} + R^\mu_{\varepsilon;(\nu} F^{\varepsilon\nu}_{;\mu)} \\
&\quad + F^\mu_{\varepsilon;(\nu} R^{\varepsilon\nu}_{;\mu)} - \frac{1}{2} R_{,(\mu} F^{\mu\nu}_{;\nu)} - \frac{1}{2} R_{,\nu;\mu} F^{\mu\nu}). \tag{1.44}
\end{aligned}$$

A criação de cargas ocorre em regiões nas quais a curvatura é não nula.

A possibilidade de geração de carga no universo tornou-se uma das questões cruciais para a elaboração de cenários cosmológicos alternativos. Raymond Lyttleton e Hermann Bondi¹⁶

¹⁶Lyttleton e Bondi, 1959.

sugeriram, no final dos anos 1950, que a pequena diferença de magnitude observada entre a carga do elétron e a do próton pode ter dado origem a uma força cósmica de natureza repulsiva. Tal força poderia ser, assim, a causa da expansão do universo. LB mostraram, então, que uma modificação da lagrangiana de Maxwell, pela adição de um termo de massa da forma $\varepsilon A_\mu A^\mu$, seria suficiente para quebrar a conservação de carga e, com isso, explicar a sua hipótese.

A solução cosmológica obtida por LB é de um cenário preenchido de fótons não-lineares, conhecida como a solução de estado estacionário, configuração equivalente à encontrada por de Sitter¹⁷.

Em seguida, Fred Hoyle e Jayant Narlikar¹⁸ mostraram que a modificação sugerida por LB é equivalente à introdução de um fluido com energia negativa, que pode ser construído com um campo escalar C e uma constante cosmológica λ , pelas equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa(E_{\mu\nu} - f(C_\mu C_\nu - \frac{1}{4}C^2 g_{\mu\nu})). \quad (1.45)$$

O campo- C é responsável pela criação contínua de matéria.

Consequentemente, instalou-se um impasse entre o efeito da eletrodinâmica modificada de Lyttleton e Bondi e a conjectura de criação contínua de matéria, de Hoyle¹⁹.

Em contexto diverso, a interação não mínima da gravitação com o campo eletromagnético sugere outro caminho para tal discussão. Em regiões nas quais a curvatura exibe intensidade não desprezível, a gravitação em interação direta com o campo eletromagnético torna-se responsável pela geração de cargas²⁰. As equações de campo para a métrica são descritas por

$$(1 + \beta A)[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}] - \beta \square A g_{\mu\nu} + \beta A_{;\mu;\nu} + \beta R A_\mu A_\nu = -\kappa(E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^m),$$

onde $A := A_\mu A_\nu$.

Examina-se, a seguir, a propagação de descontinuidades do campo eletromagnético interagindo não minimamente com a gravitação.

Seja Σ uma superfície de descontinuidade do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$, satisfazendo a condição $\Sigma(x) = \text{constante}$. Por hipótese, o campo $F_{\mu\nu}$ é contínuo sobre Σ e sua primeira derivada contém uma descontinuidade finita. Denotando por²¹

$$(J)_\Sigma := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (J|_{\Sigma+\delta} - J|_{\Sigma-\delta}) \quad (1.46)$$

¹⁷de Sitter, 1917.

¹⁸Hoyle e Narlikar, 1964. Uma revisão crítica é feita por Narlikar, 2006.

¹⁹Novello e Salim, 1983, p.217.

²⁰Novello e Salim, 1979.

²¹Novello e Goulart, 2010, §1.5.

a descontinuidade de uma função arbitrária J , podemos supor que

$$(F_{\mu\nu})_{\Sigma} = 0; \quad (1.47)$$

$$(\partial_{\lambda} F_{\mu\nu})_{\Sigma} = f_{\mu\nu} \kappa_{\lambda}, \quad (1.48)$$

onde $f_{\mu\nu}$ é a intensidade da descontinuidade e κ_{λ} o campo gradiente de Σ .

A questão que está posta é: a interação não-mínima, $\zeta C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}$ altera a propagação de descontinuidades do campo eletromagnético na descrição de Maxwell?

Abrindo as equações de campo (1.37), têm-se

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \zeta (C^{\mu}{}_{\varepsilon;\nu} F^{\varepsilon\nu} + C^{\mu}{}_{\varepsilon} F^{\varepsilon\nu}{}_{;\nu} + F^{\mu}{}_{\varepsilon;\nu} C^{\varepsilon\nu} + F^{\mu}{}_{\varepsilon} C^{\varepsilon\nu}{}_{;\nu}) = 0. \quad (1.49)$$

Tomando a curvatura como um campo externo à interação eletromagnética, o campo $F_{\mu\nu}$, sob as condições (1.47) e (1.48), exhibe as seguintes descontinuidades:

$$f^{\mu\nu} \kappa_{\nu} + \zeta (C^{\mu}{}_{\varepsilon} f^{\varepsilon\nu} + f^{\mu}{}_{\varepsilon} C^{\varepsilon\nu}) \kappa_{\nu} = 0, \quad (1.50)$$

ou ainda,

$$f_{\varepsilon\alpha} \kappa_{\nu} \Psi^{\varepsilon\alpha} = 0, \quad (1.51)$$

com

$$\Psi^{\varepsilon\alpha} := \delta^{\varepsilon}{}_{\mu} \delta^{\alpha}{}_{\nu} + \zeta (C^{\varepsilon}{}_{\mu} \delta^{\alpha}{}_{\nu} + C^{\varepsilon}{}_{\nu} \delta^{\alpha}{}_{\mu}). \quad (1.52)$$

A propriedade de simetria do campo EM revela, pela contração com κ^{ν} , que

$$(f_{\varepsilon\alpha} \kappa_{\nu} + f_{\alpha\nu} \kappa_{\varepsilon} + f_{\nu\varepsilon} \kappa_{\alpha}) \kappa^{\nu} \Psi^{\varepsilon\alpha} = 0. \quad (1.53)$$

Visto que o primeiro termo é nulo, segue-se que

$$f_{\varepsilon\alpha} \Psi^{\varepsilon\alpha} (\kappa_{\nu} \kappa^{\nu}) = 0. \quad (1.54)$$

Consequentemente, a evolução de descontinuidades da interação não-mínima \mathcal{D} , sob a hipótese de que a curvatura exerce o papel de um campo externo, preserva as descontinuidades da eletrodinâmica de Maxwell. Dito de outro modo, a propagação de descontinuidades do campo eletromagnético sob a interação \mathcal{D} segue curvas geodésicas na métrica $g_{\mu\nu}$.

Por fim, vamos tomar as equações de campo (1.37) na presença de corrente externa J_μ . Por definição, escreve-se o primeiro termo na forma

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} &:= (A^{\mu;\nu} - A^{\nu;\mu})_{;\nu} = A^{\mu;\nu}{}_{;\nu} - A^{\nu;\mu}{}_{;\nu} \\ &= \square A^\mu - A^\nu{}_{;\nu}{}^{;\mu} + R^\varepsilon{}^\mu A_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Segue-se que a equação de onda para o Campo de Maxwell A_μ é dada por

$$\square A^\mu - A^\nu{}_{;\nu}{}^{;\mu} + R^\mu{}_\varepsilon A^\varepsilon = J^\mu - \zeta (C^\mu{}_\varepsilon F^{\varepsilon\nu} + F^\mu{}_\varepsilon C^{\varepsilon\nu})_{;\nu}. \quad (1.56)$$

O termo $\square A^\mu - A^\nu{}_{;\nu}{}^{;\mu}$ é o *operador de Rham* de espaços curvos.

Antes de prosseguirmos com algumas soluções cosmológicas das interações RF e $C_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu}$, vamos analisar alguns aspectos das interações gravitacionais representadas pelo tensor de Weyl.

O tensor curvatura de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ pode ser decomposto em suas partes irredutíveis na forma²²

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + M_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{6}Rg_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (1.57)$$

onde $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor de Weyl, $M_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, definido por

$$2M_{\alpha\beta\mu\nu} := R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} \quad (1.58)$$

e

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}. \quad (1.59)$$

O tensor de Riemann possui 20 componentes independentes, estando 10 associadas à parte de Weyl, 9 ao tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e uma ao escalar de curvatura R .

De modo similar à rotação de $F_{\mu\nu}$, o mapa dual $\mathcal{R}(\theta)$ atua sobre o tensor de Weyl na forma²³

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{R}(\theta)} \widetilde{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = \cos\theta W_{\alpha\beta\mu\nu} + \text{sen}\theta W_{\alpha\beta\mu\nu}^*, \quad (1.60)$$

Segue-se que o "super-tensor" de energia de Bel $T_{\alpha\beta\mu\nu}$, associado ao tensor de Weyl pela expressão²⁴

²²Narlikar e Karmarkar, 1949;Géhéniau e Debever, 1956.

²³Debever, 1958, §14.

²⁴Bel, 1960.

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} = 2(W_{\alpha\kappa\nu\lambda} W_{\beta\mu}^{\kappa\lambda} + W_{\alpha\kappa\nu\lambda}^* W_{\beta\mu}^{*\kappa\lambda}) \quad (1.61)$$

é invariante sob rotação dual²⁵.

A demonstração é direta. Pela identidade de Debever (1958),

$$W_{\alpha\rho\mu\sigma} W_{\beta\nu}^{\rho\sigma} - W_{\alpha\rho\mu\sigma}^* W_{\beta\nu}^{*\rho\sigma} = Ag_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}, \quad (1.62)$$

com

$$A := \frac{1}{8} W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}, \quad (1.63)$$

escrevem-se

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\alpha\kappa\nu\lambda} \widetilde{W}_{\beta\mu}^{\kappa\lambda} &= (\cos\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda} + \text{sen}\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda}^*) (\cos\theta W_{\beta\mu}^{\kappa\lambda} + \text{sen}\theta W_{\beta\mu}^{*\kappa\lambda}) \\ &= \cos^2\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda} W_{\beta\mu}^{\kappa\lambda} + \text{sen}^2\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda}^* W_{\beta\mu}^{*\kappa\lambda} + \text{sen}2\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda} W_{\beta\mu}^{*\kappa\lambda} \\ &= W_{\alpha\kappa\nu\lambda} W_{\beta\mu}^{\kappa\lambda} - \text{sen}^2\theta Ag_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + \text{sen}2\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda} W_{\beta\mu}^{*\kappa\lambda} \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\alpha\kappa\nu\lambda}^* \widetilde{W}_{\beta\mu}^{*\kappa\lambda} &= (\cos\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda}^* + \text{sen}\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda}^{**}) (\cos\theta W_{\beta\mu}^{*\kappa\lambda} + \text{sen}\theta W_{\beta\mu}^{**\kappa\lambda}) \\ &= \cos^2\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda}^* W_{\beta\mu}^{*\kappa\lambda} + \text{sen}^2\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda} W_{\beta\mu}^{\kappa\lambda} - \text{sen}2\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda}^* W_{\beta\mu}^{\kappa\lambda} \\ &= W_{\alpha\kappa\nu\lambda}^* W_{\beta\mu}^{*\kappa\lambda} + \text{sen}^2\theta Ag_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \text{sen}2\theta W_{\alpha\kappa\nu\lambda}^* W_{\beta\mu}^{\kappa\lambda}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Logo, $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ é invariante pela ação do mapa (1.60),

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta\mu\nu} = T_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (1.66)$$

A trilha aberta por Géhéniau e Debever sugere prosseguirmos com a questão: a gravitação, acoplada não minimamente ao campo $F_{\mu\nu}$ pelo tensor de Weyl, é capaz de restaurar a invariância dual do eletromagnetismo?

Com uma inspeção direta, pode-se mostrar que a interação

$$I = W_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}, \quad (1.67)$$

²⁵Debever, 1958, §11.

sob as transformações (1.8) e (1.60), satisfaz a rotação de dualidade sob o vínculo $\theta = -2\alpha$.

Pode-se afirmar a seguinte conclusão²⁶: a invariância dual de I ocorre se o ângulo de rotação para o campo de spin 2, representado pelo tensor de Weyl, for exatamente duas vezes o ângulo de rotação do campo de spin 1, representado pelo tensor de Faraday.

Consequentemente, a invariância do tensor de Weyl sob o mapa (1.60) generaliza o conteúdo físico da transformação dual de ambos os campos. As rotações – introduzidas separadamente sob ângulos distintos α e θ – geram, por meio do acoplamento não-mínimo, uma única transformação, pela condição $\theta = -2\alpha$. Tal resultado sugere que a determinação da rotação de $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ é restrita a espaços curvos vazios sob a premissa de acoplamento mínimo a outros campos.

Com o tensor livre de traço $C_{\mu\nu}$ e o tensor de Weyl, Debever construiu, por meio das contrações

$$D_{\mu\nu} := W_{\mu\alpha\nu\beta} C^{\alpha\beta}, \quad (1.68)$$

$${}^*D_{\mu\nu} := {}^*W_{\mu\alpha\nu\beta} C^{\alpha\beta}, \quad (1.69)$$

um conjunto de quatorze invariantes da gravitação pura²⁷.

Surge, então, a questão: uma vez que $C_{\mu\nu}$ e o tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ restauram a invariância global e local do eletromagnetismo por rotação dual, que ocorre com os invariantes puros de Debever sob interação não-mínima com o campo eletromagnético?

Um cálculo semelhante ao realizado acima revela uma nova classe de invariantes da gravitação, sob as transformações duais (1.8) e (1.60), interagindo não-minimamente com o campo eletromagnético:

²⁶Hartmann e Novello, 2019.

²⁷Debever, 1964; Novello, 2010, cap.1.

$$\mathcal{D}_1 = C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} \quad (1.70)$$

$$\mathcal{D}_2 = W_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \quad (\theta = -2\alpha) \quad (1.71)$$

$$\mathcal{D}_3 = \overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \quad (\theta = -2\alpha) \quad (1.72)$$

$$\mathcal{D}_4 = W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} W_{\gamma\delta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \quad (\theta = -\alpha) \quad (1.73)$$

$$\mathcal{D}_5 = W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} \overset{*}{W}_{\gamma\delta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \quad (\theta = -\alpha) \quad (1.74)$$

$$\mathcal{D}_6 = W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} W_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon\zeta} W_{\varepsilon\zeta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \quad (\theta = -\frac{2}{3}\alpha) \quad (1.75)$$

$$\mathcal{D}_7 = W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} W_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon\zeta} \overset{*}{W}_{\varepsilon\zeta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \quad (\theta = -\frac{2}{3}\alpha) \quad (1.76)$$

$$\mathcal{D}_8 = D_{\mu}{}^{\alpha} D_{\alpha}{}^{\beta} D_{\beta}{}^{\gamma} D_{\gamma\nu} \Phi^{\mu\nu} \quad (\theta = -\frac{\alpha}{2}) \quad (1.77)$$

$$\mathcal{D}_9 = D_{\mu}{}^{\alpha} D_{\alpha}{}^{\beta} D_{\beta}{}^{\gamma} \overset{*}{D}_{\gamma\nu} \Phi^{\mu\nu} \quad (\theta = -\frac{\alpha}{2}). \quad (1.78)$$

Dimensionalidade	Invariantes duais	Dimensão de ξ
$M \cdot L^{-5}$	$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$	$L^4 \cdot T^{-2}$
$M \cdot L^{-7}$	$\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5$	$L^6 \cdot T^{-2}$
$M \cdot L^{-9}$	$\mathcal{D}_6, \mathcal{D}_7$	$L^8 \cdot T^{-2}$
$M \cdot L^{-19}$	$\mathcal{D}_8, \mathcal{D}_9$	$L^{18} \cdot T^{-2}$

Por fim, visto que combinações da curvatura de Riemann contraída - como $C_{\mu\nu}$, por exemplo - não afetam o mapa dual $\mathcal{R}(\theta)$, o conjunto de invariantes duais não-mínimos não é univocamente definido. Tal asserção pode ser testada pela inspeção direta da interação

$$\mathcal{D}' = D_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}, \quad (1.79)$$

cuja invariância dual é conquistada se $\theta = -2\alpha$, o mesmo vínculo do invariante \mathcal{D}_2 .

Capítulo 2

ACELERAÇÃO CÓSMICA

A história evolutiva do Universo é, por convenção, separada em diferentes eras, de acordo com a dependência que a distribuição de energia tem com o fator de escala de expansão $a(t)$. Vamos considerar um espaço isotrópico e homogêneo com curvatura nula. A métrica neste caso assume a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.1)$$

As componentes do Tensor de Ricci e o escalar de curvatura são descritos pelas relações

$$R_{00} = \dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2, \quad (2.2)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{3}(\dot{\theta} + \theta^2)g_{ij}, \quad (2.3)$$

$$R = 2\dot{\theta} + \frac{4}{3}\theta^2, \quad (2.4)$$

onde denota-se o fator de expansão por $\theta := 3\dot{a}/a$.

O conjunto de equações de campo da TGR¹ se reduz às relações de densidade ρ e conservação de energia²,

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} \quad (2.5)$$

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0. \quad (2.6)$$

A integral primeira da expressão (2.6) retorna

$$\rho = \rho_0 a^{-3(\lambda+1)}, \quad (2.7)$$

onde o vínculo λ entre a pressão isotrópica p e a densidade de energia ρ é expresso pela equação de estado

$$p = \lambda\rho. \quad (0 < \lambda < 1) \quad (2.8)$$

¹ Expressão (7) da Introdução.

² Novello, 2010, cap.7.

De imediato, obtém-se o fator de escala de expansão

$$a(t) = a_0 t^{2/[3(\lambda+1)]}. \quad (2.9)$$

Projetando as equações de campo da TGR sobre o referencial de um observador comóvel, caracterizado pelo vetor tangente à sua linha de Universo $v^\mu = \delta^\mu_0$ e normalizado, $v_\mu v_\nu g^{\mu\nu} = 1$,

$$R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = -T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu + \frac{T}{2}. \quad (2.10)$$

obtém-se a Equação de Raychaudhuri na métrica isotrópica e homogênea,

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p). \quad (2.11)$$

Sob o princípio de acoplamento mínimo, a distribuição de energia da TGR é a própria fonte de Maxwell $E_{\mu\nu}$, cuja compatibilidade com a métrica espacialmente isotrópica e homogênea depende de um procedimento de média estatística do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ sobre todo o espaço³.

Define-se a média espacial de uma quantidade $Q(t; \vec{x})$, a um instante de tempo t , como⁴

$$\langle Q \rangle := \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int \sqrt{-g} Q d^3x, \quad (2.12)$$

tal que $V = \int \sqrt{-g} d^3x$. Decorre que as partes elétrica \mathcal{E}_i e magnética \mathcal{B}_i do tensor de Faraday são compatíveis com a isotropia e homogeneidade do espaço se satisfazem o seguinte conjunto de relações:

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{B}_i \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{E}_i \mathcal{B}_j \rangle = 0, \quad (2.13)$$

$$\langle \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j \rangle = -\frac{1}{3} \mathcal{E}^2 g_{ij}, \quad (2.14)$$

$$\langle \mathcal{B}_i \mathcal{B}_j \rangle = -\frac{1}{3} \mathcal{B}^2 g_{ij}, \quad (2.15)$$

onde \mathcal{E} e \mathcal{B} dependem apenas do tempo.

Consequentemente, a fonte de Maxwell $E_{\mu\nu}$ se reduz à estrutura de fluido perfeito,

$$\langle E_{\mu\nu} \rangle = (\rho_\gamma + p_\gamma) v_\mu v_\nu - p_\gamma g_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

³ Tolman e Ehrenfest, 1930.

⁴ Novello e Goulart, 2010, cap.9.

com

$$\rho_\gamma = 3p_\gamma = \frac{1}{2}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2). \quad (2.17)$$

Pela conservação de energia, a densidade de radiação evolui com a^{-4} . Tal distribuição de energia dominada pelo campo eletromagnético é referida como a era de radiação. No caso de matéria incoerentemente distribuída, $\lambda = 0$, a densidade de energia depende de a^{-3} . A relevância da interação eletromagnética na expansão do Universo, pela abordagem convencional da cosmologia, reside na primeira era.

As recentes propostas de descrever a expansão do Universo em termos de uma fonte de energia desconhecida - denominada "energia escura" - reorienta esse primeiro esquema, sugerindo que novas formas de matéria possam ser responsáveis pela era aceleração cósmica⁵.

Assume-se, implicitamente, com tal sentença que o exame de todas as interações possíveis do campo eletromagnético com a gravitação se exauriu. O presente capítulo busca retornar a essa discussão mediante a seguinte questão: é possível descrever a era de aceleração cósmica, no interior da relatividade geral, apenas com a interação entre o campo eletromagnético e a gravitação? Ou ainda: é o campo eletromagnético responsável pela aceleração cósmica a tempos tardios? A resposta a essa questão depende do modo pelo qual o campo eletromagnético interage com a gravitação.

Vamos considerar a conjectura expressa pela densidade lagrangiana \mathcal{L} , na forma⁶

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{c^2}{4} F + \frac{\xi}{2} RF \right), \quad (2.18)$$

onde $F := F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ e ξ é a constante de acoplamento não-mínimo, que deve ter a dimensão $[\xi] := L^4 T^{-2}$. Daqui por diante, escreve-se $\kappa = 1 = c$.

A dinâmica de $g_{\mu\nu}$ é dada por⁷

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \xi Z_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

com

$$Z_{\mu\nu} := F(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) - 2R\Phi_{\mu\nu} - \square F g_{\mu\nu} + F_{;\mu;\nu}. \quad (2.20)$$

⁵Diversas propostas para resolver essa questão têm sido apresentadas. Um trabalho de revisão é feito por Sahni, 2005.

⁶Novello e Hartmann, 2019a.

⁷Os detalhes do cálculo podem ser encontrados, por exemplo, em Jorda, 1988.

O traço resulta

$$R = \xi(RF - 3\Box F). \quad (2.21)$$

A equação para o campo eletromagnético é

$$[(1 - 2\xi R)F^{\mu\nu}]_{;\nu} = 0. \quad (2.22)$$

Considera-se, a seguir, a dinâmica descrita pelas equações (2.19) no caso em que a métrica assume a forma (2.1). De acordo com o procedimento convencional, o exame da distribuição de energia em uma métrica isotrópica e homogênea requer a média estatística do campo eletromagnético.

A representação do campo eletromagnético pelo tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ pode ser decomposta em suas partes elétrica \mathcal{E}_μ e magnética \mathcal{B}_μ , com relação a v_μ , pela expressão irreduzível

$$F_{\mu\nu} = v_\mu \mathcal{E}_\nu - v_\nu \mathcal{E}_\mu + \eta_{\mu\nu\rho\sigma} v^\rho \mathcal{B}^\sigma, \quad (2.23)$$

tal que

$$\mathcal{E}_\mu = F_{\mu\alpha} v^\alpha, \quad (2.24)$$

$$\mathcal{B}_\mu = {}^*F_{\mu\alpha} v^\alpha = \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha\rho\sigma} v^\alpha F^{\rho\sigma}. \quad (2.25)$$

Assim, a decomposição do tensor dual ${}^*F_{\mu\nu}$ é obtida da equação (2.23) pela transformação de $\mathcal{E}_\mu \mapsto \mathcal{B}_\mu$ e de $\mathcal{B}_\mu \mapsto -\mathcal{E}_\mu$, ou seja,

$${}^*F_{\mu\nu} = v_\mu \mathcal{B}_\nu - v_\nu \mathcal{B}_\mu - \eta_{\mu\nu\kappa\lambda} v^\kappa \mathcal{E}^\lambda. \quad (2.26)$$

Vamos considerar, além disso, a hipótese de cenário quase-magnético⁸, pela qual a parte elétrica é proporcional à parte magnética,

$$\mathcal{E}^2 = \sigma^2 \mathcal{B}^2, \quad (2.27)$$

e denotar por $X := \mathcal{B}^2$ a componente magnética.

⁸ Novello e Bergliaffa, 2008, §4.5.1; Ducap, 2014.

Logo,

$$F = -2(\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) = -2(\sigma^2 - 1)X \quad (2.28)$$

e

$$\langle \Phi_{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)X v_\mu v_\nu + \frac{1}{3}(\sigma^2 - 2)X g_{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Nota-se: $g^{\mu\nu} \langle \Phi_{\mu\nu} \rangle = 2(\sigma^2 - 1)X = -F$.

Segue-se que a fonte de Maxwell, sob média, resulta

$$\langle E_{\mu\nu} \rangle = \langle \Phi_{\mu\nu} \rangle + \frac{1}{4}F g_{\mu\nu} = \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)X v_\mu v_\nu - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X g_{\mu\nu}. \quad (2.30)$$

O tensor de energia do campo eletromagnético, sob média, permanece livre de traço. A média da fonte não-mínima, por sua vez, é dada por

$$\langle Z_{\mu\nu} \rangle = F(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}) - \frac{4}{3}(\sigma^2 + 1)X R v_\mu v_\nu - \frac{2}{3}(\sigma^2 - 2)X R g_{\mu\nu} - \square F g_{\mu\nu} + F_{;\mu;\nu}, \quad (2.31)$$

cujo traço é inalterado sob média.

Uma teoria satisfaz a representação de fluido perfeito somente se o fluxo de calor e a pressão anisotrópica são nulos. Precisamos, assim, testar as quantidades irredutíveis associadas à decomposição de $Z_{\mu\nu}$ sob a métrica (2.1).

As quantidades irredutíveis associadas a um tensor de energia $Z_{\mu\nu}$ são construídas pela decomposição de $Z_{\mu\nu}$ na forma⁹

$$\langle Z_{\mu\nu} \rangle = (\rho_z + p_z) v_\mu v_\nu - p_z g_{\mu\nu} + q^{(z)}_{(\mu} v_{\nu)} + \pi_{\mu\nu}^{(z)}, \quad (2.32)$$

de modo que, por definição,

$$\rho_z := Z_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma, \quad (2.33)$$

$$p_z := -\frac{1}{3} Z_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma}, \quad (2.34)$$

$$q_\lambda^{(z)} := Z_{\rho\sigma} v^\sigma h^\rho_{\lambda}, \quad (2.35)$$

$$\pi_{\mu\nu}^{(z)} := Z_{\rho\sigma} h^\rho_{\mu} h^\sigma_{\nu} + p_z h_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

⁹ Novello, 1979a.

Os parâmetros de densidade de energia ρ_z e pressão isotrópica p_z respectivos são

$$\rho_z = 2(\sigma^2 - 1)\theta\dot{X} - 4\sigma^2 X\dot{\theta} - 2(\sigma^2 + \frac{1}{3})X\theta^2 \quad (2.37)$$

$$p_z = -2(\sigma^2 - 1)\ddot{X} - \frac{4}{3}(\sigma^2 - 1)\theta\dot{X} - \frac{4}{3}X\dot{\theta} + \frac{2}{9}(\sigma^2 - 5)\theta^2 X. \quad (2.38)$$

O fluxo de calor $q_\lambda^{(z)}$ associado a $Z_{\mu\nu}$ é dado por

$$q_\lambda^{(z)} = FR_{\lambda\beta}v^\beta - FR_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta v_\lambda + F_{;\lambda;\beta}v^\beta - F_{;\alpha;\beta}v^\alpha v^\beta v_\lambda, \quad (2.39)$$

cujas componentes na métrica isotrópica são nulas, $q_0 = 0 = q_i$.

Abrindo a expressão da pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu}^{(z)}$, tem-se

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu}^{(z)} &= Z_{\mu\nu} + Z_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta v_\mu v_\nu - Z_{\mu\beta}v^\beta v_\nu - Z_{\alpha\nu}v^\alpha v_\mu + p_z h_{\mu\nu} \\ &= F(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) - \frac{4}{3}(\sigma^2 + 1)XRv_\mu v_\nu - \frac{2}{3}(\sigma^2 - 2)XRg_{\mu\nu} - \square Fg_{\mu\nu} + F_{;\mu;\nu} \\ &\quad + F(R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00})v_\mu v_\nu - \frac{4}{3}(\sigma^2 + 1)XRv_\mu v_\nu - \frac{2}{3}(\sigma^2 - 2)XRv_\mu v_\nu - \square Fv_\mu v_\nu + F_{;0;0}v_\mu v_\nu \\ &\quad - F(R_{\mu\beta}v^\beta v_\nu - \frac{1}{2}Rv_\mu v_\nu) + \frac{4}{3}(\sigma^2 + 1)XRv_\mu v_\nu + \frac{2}{3}(\sigma^2 - 2)XRv_\mu v_\nu + \square Fv_\mu v_\nu - F_{;\mu;0}v_\nu \\ &\quad - F(R_{\alpha\nu}v^\alpha v_\mu - \frac{1}{2}Rv_\mu v_\nu) + \frac{4}{3}(\sigma^2 + 1)XRv_\mu v_\nu + \frac{2}{3}(\sigma^2 - 2)XRv_\mu v_\nu + \square Fv_\mu v_\nu - F_{;0;\nu}v_\mu \\ &\quad + \left[\frac{1}{6}RF + \frac{1}{3}FR_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta + \frac{2}{3}(\sigma^2 - 2)XR + \frac{2}{3}\square F + \frac{1}{3}F_{;\alpha;\beta}v^\alpha v^\beta \right] h_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

que resulta

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu}^{(z)} &= \left(\frac{2}{3}FR_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta + \frac{1}{3}RF + \frac{2}{3}F_{;\alpha;\beta}v^\alpha v^\beta + \frac{1}{3}\square F \right) v_\mu v_\nu \\ &\quad + \left(\frac{1}{3}FR_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta - \frac{1}{3}RF + \frac{1}{3}F_{;\alpha;\beta}v^\alpha v^\beta - \frac{1}{3}\square F \right) g_{\mu\nu} \\ &\quad + FR_{\mu\nu} - FR_{\mu\beta}v^\beta v_\nu - FR_{\alpha\nu}v^\alpha v_\mu + F_{;\mu;\nu} - F_{;\mu;\beta}v^\beta v_\nu - F_{;\alpha;\nu}v^\alpha v_\mu. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Na representação de fluido perfeito, as componentes o-o e o-j de $\pi_{\mu\nu}^{(z)}$ são nulas. Resta abrir a componente espacial:

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}^{(z)} &= FR_{ij} + F_{,i;j} + \left(\frac{1}{3}FR_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta - \frac{1}{3}RF + \frac{1}{3}F_{;\alpha;\beta}v^\alpha v^\beta - \frac{1}{3}\square F\right)g_{ij} \\
&= F(R_{ij} + \frac{1}{3}R_{oo}g_{ij} - \frac{1}{3}Rg_{ij}) + F_{,i;j} + \frac{1}{3}F_{,o;o}g_{ij} - \frac{1}{3}\square Fg_{ij} \\
&= \frac{F}{3} \left[(\dot{\theta} + \theta^2) + \left(\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3}\right) - (2\dot{\theta} + \frac{4}{3}\theta^2) \right] g_{ij} + \frac{1}{3}(\theta\dot{F} + \ddot{F} - \ddot{F} - \theta\dot{F})g_{ij} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Portanto, a fonte não mínima $Z_{\mu\nu}$ se reduz à representação de fluido perfeito,

$$\langle Z_{\mu\nu} \rangle = (\rho_z + p_z)v_\mu v_\nu - p_z g_{\mu\nu}, \tag{2.43}$$

com ρ_z e p_z descritos pelas expressões (2.37) e (2.38), respectivamente.

A primeira solução cosmológica que, de imediato, pode ser constatada é o *estado fundamental* da teoria, no qual o fator de expansão θ é constante,

$$\theta := \theta_o. \tag{2.44}$$

Pela expressão para a densidade de energia ρ , eq. (2.5), segue-se que $\rho = \rho_o$. Da conservação de energia, eq. (2.6), decorre $\rho + p = 0$. Com isso, temos

$$\rho + p = -\frac{1}{3}\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - 1}X + \xi \left\{ \ddot{X} - \frac{\theta_o}{3}\dot{X} + \frac{8}{9}\left(\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - 1}\right)\theta_o^2 X \right\} = 0. \tag{2.45}$$

Seja a solução da forma

$$X = A + X_o \exp \lambda t. \tag{2.46}$$

A parte temporal, representada pela exponencial, retorna

$$\lambda^2 - \frac{\theta_o}{3}\lambda + \left(\frac{8}{9}\theta_o^2 - \frac{1}{3\xi}\right)\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - 1} = 0, \tag{2.47}$$

com

$$\lambda = \frac{\theta_o}{6} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\left(8 - \frac{3}{\xi\theta_o^2}\right)\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - 1}} \right). \tag{2.48}$$

A parte constante da solução (2.46) retorna

$$\left(\frac{8}{9}\theta_0^2 - \frac{1}{3\xi}\right) \left[\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - 1}\right] A = 0 \quad (2.49)$$

$$\theta_0^2 = \frac{3}{8\xi}, \quad (2.50)$$

que implica

$$\lambda = \frac{\theta_0}{3} = \frac{1}{\sqrt{24\xi}}. \quad (2.51)$$

Logo,

$$X(t) = A + X_0 \exp\left(\frac{\theta_0}{3}t\right). \quad (2.52)$$

Pela equação de campo $\rho_0 = \theta_0^2/3$, tem-se o valor de A :

$$A = -\frac{4}{3} \frac{\theta_0}{\sigma^2 - 1}. \quad (2.53)$$

revela uma constante cosmológica, dependente da constante de acoplamento não mínimo ξ e do fator σ^2 , que relaciona as partes elétrica e magnética do campo $F_{\mu\nu}$, dada por

$$\Lambda = -\frac{1}{4}(\sigma^2 - 1)A = \frac{1}{8\xi} \quad (2.54)$$

$$X(t) = -\frac{4}{\sqrt{24\xi}} \frac{1}{\sigma^2 - 1} + X_0 \exp\left(\frac{t}{\sqrt{24\xi}}\right). \quad (2.55)$$

O segundo cenário cosmológico da teoria (2.18) consiste no caso $\sigma^2 = 0$, ou seja, quando apenas a componente magnética ao quadrado \mathcal{B}^2 sobrevive. Tal tipo de solução é conhecido na literatura como cenário de *Universo magnético*¹⁰.

Na vizinhança da condensação máxima do Universo, a matéria se comporta, com boa aproximação, como um plasma primordial. Fixar $\mathcal{E}^2 = 0$ equivale a eliminar termos de viscosidade na condutividade elétrica do plasma primordial¹¹.

¹⁰Novello e Bergliaffa, 2008, p. 4.5.1; Ducap, 2014.

¹¹*Idem.*

A combinação da fonte de Maxwell com a fonte não-mínima de energia, sob média, se reduz à expressão

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\rho + p) v_\mu v_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (2.56)$$

com densidade de energia total ρ e pressão isotrópica total p dadas por

$$\rho := \rho_\gamma + \xi \rho_z = \frac{1}{2} X - \xi (2\theta \dot{X} + \frac{2}{3} \theta^2 X), \quad (2.57)$$

$$p := p_\gamma + \xi p_z = \frac{1}{6} X + \xi (2\ddot{X} + \frac{4}{3} \theta \dot{X} - \frac{4}{3} \dot{\theta} X - \frac{10}{9} \theta^2 X). \quad (2.58)$$

A conservação de energia, eq.(2.6), resulta

$$\left(\frac{1}{2} \dot{X} + \frac{2}{3} \theta X \right) (1 - 4\xi \dot{\theta} - \frac{8}{3} \xi \theta^2) = 0. \quad (2.59)$$

A equação de conservação de energia nos conduz a duas equações diferenciais ordinárias independentes. Vamos examinar três caminhos distintos.

(I.) Solução exponencial:

Vamos considerar a dinâmica da geometria descrita por

$$1 - 4\xi \dot{\theta} - \frac{8}{3} \xi \theta^2 = 0, \quad (2.60)$$

que admite a solução exponencial

$$\theta(t) = \frac{3}{4} m \frac{e^{mt} + 1}{e^{mt} - 1}. \quad (2.61)$$

A evolução do campo magnético $X := \mathcal{B}^2$ é dada pela equação de campo $\rho = \theta^2/3$, que retorna

$$\dot{X} + f(t) X = g(t), \quad (2.62)$$

com

$$f(t) = \frac{1}{3} \theta - \frac{1}{4\xi \theta} \quad (2.63)$$

$$g(t) = -\frac{1}{6\xi} \theta. \quad (2.64)$$

Por uma integração direta, encontra-se

$$X = \frac{3}{4} m^2 \frac{1 + e^{mt}}{\sqrt{1 - e^{mt}}} F(1/4, 1/2, 5/4, e^{mt}), \quad (2.65)$$

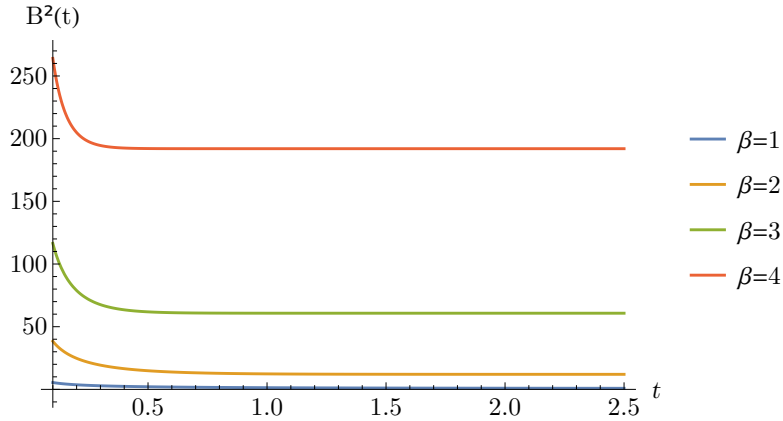
sendo $F(1/4, 1/2, 5/4, e^{mt})$ a função hipergeométrica e a constante m relacionada com a constante de interação ξ pela expressão

$$m^2 = \frac{2}{3\xi}. \quad (2.66)$$

A solução física está contida na raiz negativa de m ,

$$\mathcal{B}^2(t) = \frac{1}{2\xi} \frac{1 + e^{-\sqrt{2/(3\xi)} t}}{(1 - e^{-\sqrt{2/(3\xi)} t})^{1/2}} F(1/4, 1/2, 5/4, e^{-\sqrt{2/(3\xi)} t}). \quad (2.67)$$

Figura 2.1: Solução exponencial: evolução temporal do campo magnético $\mathcal{B}^2(t)$.



Da expressão para θ , eq.(2.61), obtém-se a expressão para o fator de escala do Universo $a(t)$,

$$a(t) = e^{-mt/4} \sqrt{1 - e^{mt}}. \quad (2.68)$$

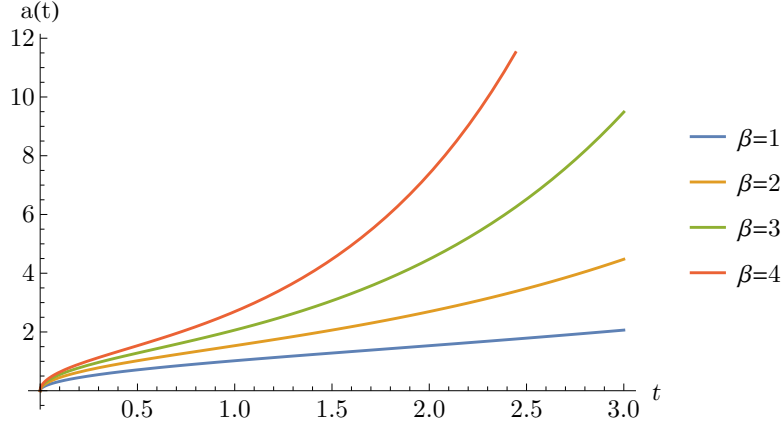
De acordo com a dinâmica do campo magnético, vamos considerar m negativo, tal que $m = -\beta^2$. Com isso, o fator de expansão $\theta(t)$ e o fator de escala do Universo $a(t)$ são, respectivamente, reescritos como

$$\theta(t) = \frac{3\beta^2 e^{\beta^2 t} + 1}{4 e^{\beta^2 t} - 1} \quad (2.69)$$

e

$$a(t) = e^{-\beta^2 t/4} \sqrt{e^{\beta^2 t} - 1}. \quad (2.70)$$

Figura 2.2: Solução exponencial: evolução do fator de escala do Universo $a(t)$ ($m < 0$).



Da variação temporal de θ ,

$$\dot{\theta} := 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] = -\frac{3\beta^4}{2} \frac{e^{\beta^2 t}}{(e^{\beta^2 t} - 1)^2} \quad (2.71)$$

decorre a aceleração do fluido cósmico¹²,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\beta^4}{16} \left[1 - \frac{4e^{\beta^2 t}}{(e^{\beta^2 t} - 1)^2} \right]. \quad (2.72)$$

Uma inspeção direta mostra que \ddot{a}/a muda de sinal no ponto $t_c = (3 \ln 5 \sqrt{\xi})/2$.

Notam-se as seguintes situações limites:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\beta^4}{16} \left[1 - \frac{4}{(1-1)^2} \right] \rightarrow -\infty \quad (2.73)$$

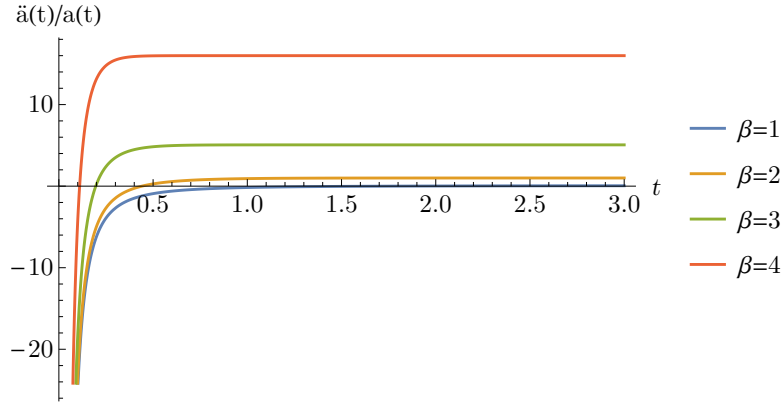
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta^4}{16} \left[1 - \frac{4}{2(e^{\beta^2 t} - 1)} \right] \approx \frac{\beta^4}{16}, \quad (2.74)$$

cuja expressão " $\stackrel{\text{L'H}}{=}$ " denota a regra de L'Hospital para levantar a indeterminação ∞/∞ .

Em termos da constante de acoplamento não mínimo ξ , implicada pela equação (2.60) tal que $m^2 = \beta^4 = 2/3\xi$, a aceleração a tempos tardios é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ddot{a}}{a} \approx \frac{\beta^4}{16} = \frac{1}{24\xi}. \quad (2.75)$$

¹² Novello e Hartmann, 2019a.

Figura 2.3: Solução exponencial: aceleração cósmica $\ddot{a}(t)/a(t)$.

O fator de expansão cósmica, a tempos tardios, é descrito por

$$\theta_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3\beta^2 e^{\beta^2 t} + 1}{4 e^{\beta^2 t} - 1} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{3}{4} \beta^2. \quad (2.76)$$

Tal resultado nos sugere que soma da densidade de energia total ρ com a pressão total p , na história tardia do Universo, tende a uma constante.

O fato de ρ e p envolverem a função hipergeométrica nos impede reconhecer, de imediato, a confirmação do resultado obtido. É possível, entretanto, tomar outro caminho possível na floresta.

A inspeção direta da eq.(2.60) revela que o escalar de curvatura, assim como na TGR, é constante, porém, diferentemente do caso com acoplamento mínimo "puro", é não nula, pois satisfaz a relação

$$R = \frac{1}{2\xi}. \quad (2.77)$$

Tal resultado é dependente do procedimento de média do campo eletromagnético, assim como ocorre na teoria tradicional. Logo, surge a questão: o valor constante do escalar de curvatura R é compatível com a dinâmica de $F_{\mu\nu}$? De fato, se o escalar da curvatura satisfaz a relação (2.77), então pela eq.(2.22), o campo eletromagnético segue, tal como na TGR, descrito pelas equações de Maxwell no vázio¹³.

Portanto, a fonte de energia responsável pela dinâmica da geometria, a tempos tardios, é compatível com uma constante cosmológica Λ , na forma

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.78)$$

¹³Equações (9) da Introdução.

de tal modo que Λ possui dependência com a constante de interação não mínima ξ ,

$$\Lambda = \frac{\theta_\infty^2}{3} = \frac{1}{8\xi}. \quad (2.79)$$

Por outro lado, a tempos primordiais, quando $\beta^2 t \ll 1$, a solução exponencial se comporta como no caso típico do acoplamento mínimo,

$$a(t) \approx \sqrt{t} \quad (2.80)$$

$$\theta(t) \approx \frac{3}{2t}. \quad (2.81)$$

Resta-nos, então, checar a seguinte questão: é a dinâmica de $\theta(t)$ compatível com a Equação de Raychaudhuri? Uma inspeção direta da eq.(2.60) retorna

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{4\xi} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p), \quad (2.82)$$

ou seja,

$$\rho = a^{-4} + \frac{1}{8\xi}, \quad (2.83)$$

$$p = \frac{1}{3}\rho - \frac{1}{6\xi}. \quad (2.84)$$

Em síntese, a solução exponencial para a evolução de θ implica que fluido cósmico se comporta como um gás de fótons quando o fator de escala do Universo é muito pequeno, $a \ll 1$, e evolui a tempos tardios dominado por uma constante cosmológica, quando $a \gg 1$. Conclui-se que a dinâmica de $\theta(t)$ é compatível com a Equação de Raychaudhuri.

Com relação à constante cosmológica, poderia-se considerar a seguinte objeção: a adição de uma nova constante λ ao fator de expansão $\theta(t)$ poderia anular o efeito de Λ ? Em outras palavras, o fator $1/8\xi$ é, de fato, uma constante cosmológica ou um resquício fictício, eliminável formalmente?

A resposta é diretamente reconhecida a partir da equação que governa a dinâmica de θ . Seja

$$\theta = \frac{3\beta^2 e^{\beta^2 t} + 1}{4 e^{\beta^2 t} - 1} + \lambda. \quad (2.85)$$

Demonstra-se, por um cálculo direto, que

$$1 - 4\xi\dot{\theta} - \frac{8}{3}\xi\theta^2 = 0, \quad (m^2 = \frac{2}{3\xi}, \quad \lambda = 0). \quad (2.86)$$

Logo, a adição de uma nova constante λ é incompatível com a dinâmica de θ descrita pela solução exponencial.

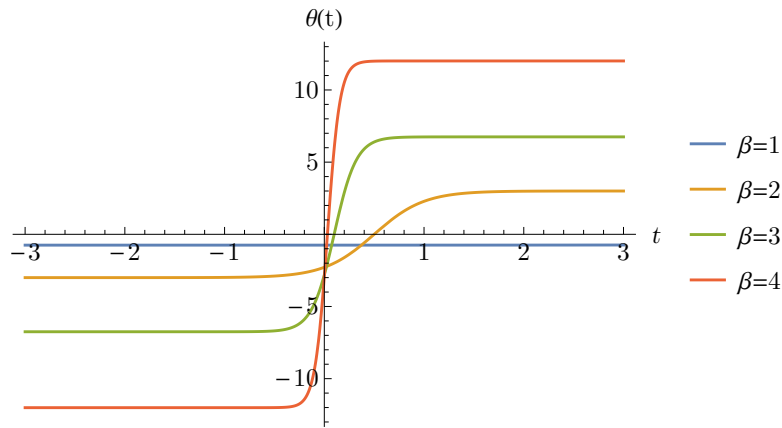
A não-linearidade da TGR implica a não unicidade das soluções às equações diferenciais. Indicamos brevemente, a seguir, outras duas soluções matematicamente admissíveis.

(II.) Solução hiperbólica:

Vamos reconsiderar a dinâmica de θ , obtida da conservação de energia. A expressão (2.60) admite a solução hiperbólica

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\xi}} \tanh\left(\frac{t - 12\xi}{\sqrt{6\xi}}\right). \quad (2.87)$$

Figura 2.4: Solução hiperbólica: fator de expansão $\theta(t)$.



A dinâmica do campo magnético provém da equação diferencial (2.62). Seguindo o mesmo caminho trilhado acima, encontra-se

Assim,

$$\mathcal{B}^2(t) = -\frac{i}{2\xi} \frac{1}{\cosh N^{1/2} \operatorname{csch} N} G[iN/2, 2] \quad (2.88)$$

sendo G a função elíptica e

$$N = \frac{t - 12\xi}{\sqrt{6\xi}}. \quad (2.89)$$

(III.) Solução $\theta = \theta(X)$:

A equação para a conservação de energia, no caso magnético, nos conduziu a duas dinâmicas da geometria que evoluem desacopladas do campo magnético. Tal situação, no entanto, não nos impede de considerarmos a seguinte questão: uma solução na qual a dinâmica da geometria é explicitamente dependente do campo magnético, $\theta = \theta(X)$, é compatível com as equações de campo obtidas no cenário magnético?

Seja a equação para X ,

$$\dot{X} + \frac{4}{3}\theta X = 0. \quad (2.90)$$

É possível isolar θ pela equação de campo (2.5), que retorna

$$\theta = \frac{-4\xi\dot{X} \pm \sqrt{16\xi^2\dot{X}^2 + \frac{8}{3}(1+2\xi X)X}}{\frac{4}{3}(1+2\xi X)} \quad (2.91)$$

A solução positiva satisfaz a expansão positiva. Substituindo na expressão para o campo magnético, eq.(2.90),

$$\dot{X} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} X \sqrt{\frac{X}{1-6\xi X}} \quad (2.92)$$

A aceleração cósmica é dada por

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{1+2\xi X} \left\{ \frac{X}{2} + \frac{14\xi^2\dot{X}^2}{1+2\xi X} - \frac{7\xi\dot{X}}{2(1+2\xi X)} \sqrt{16\xi^2\dot{X}^2 + \frac{8}{3}(1+2\xi X)X} \right. \quad (2.93)$$

$$\left. + \left[-3\sqrt{6}\xi + \frac{12\sqrt{6}\xi^2\dot{X}}{\sqrt{16\xi^2\dot{X}^2 + \frac{8}{3}(1+2\xi X)X}} \right] \sqrt{\frac{X}{1-6\xi X}} \left(\frac{1-4\xi X}{1-6\xi X} \right) \right. \quad (2.94)$$

$$\left. + \frac{(1+4\xi X)\dot{X}}{\sqrt{16\xi^2\dot{X}^2 + \frac{8}{3}(1+2\xi X)X}} \right\} \quad (2.95)$$

No limite em que $\xi \rightarrow 0$, recupera-se o acoplamento mínimo:

$$\dot{X} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} X \sqrt{X} \quad (2.96)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = \frac{\dot{X}}{\sqrt{\frac{8}{3}X}} + \frac{X}{2}. \quad (2.97)$$

Nota-se que as soluções (II.) e (III.) removem a singularidade da solução exponencial em $t = 0$. Diferentemente da solução hiperbólica, que não admite a interpretação física convencional do campo magnético, o caso $\theta(X)$ merece um exame mais detalhado.

Figura 2.5: Estimativa da evolução do fator de escala do Universo $a(t)$, para $\xi = -0.05$ e $X(0) = a(0) = 10^{-5}$.

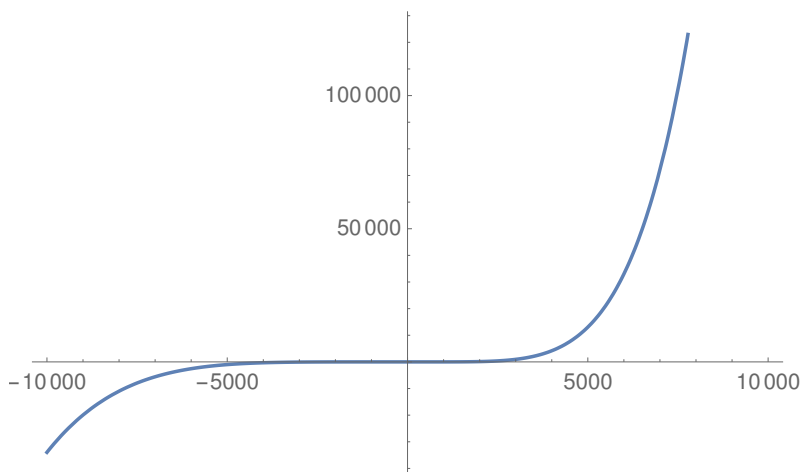
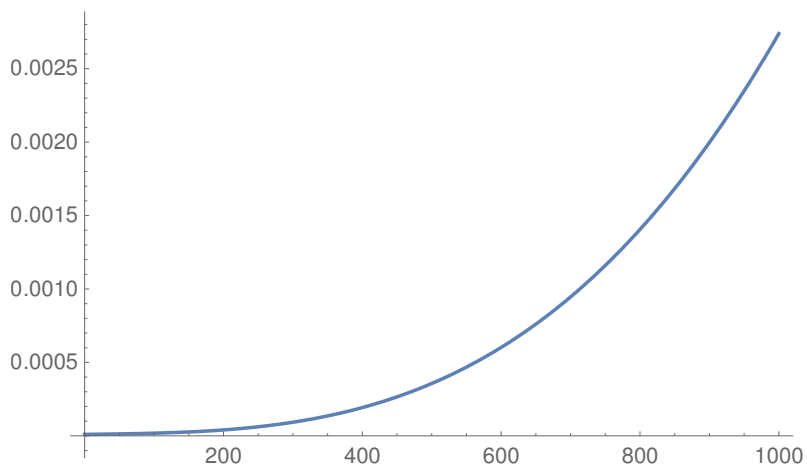


Figura 2.6: Estimativa da evolução do campo magnético $B^2(t)$, para $\xi = -0.05$ e $X(0) = a(0) = 10^{-5}$.



Capítulo 3

BIFURCAÇÕES NO UNIVERSO

No início dos anos 1980, os Professores Mario Novello e Ligia Rodrigues examinaram a possível ocorrência de bifurcações no interior da TGR, geradas a partir de um cenário cosmológico tipo Friedman com viscosidade¹.

Nesse tipo de descrição clássica do Universo, a pressão isotrópica do tensor momento-energia é escrita como um polinômio do fator de expansão θ ,

$$\tilde{p} = p + \alpha\theta + \beta\theta^2. \quad (3.1)$$

Consequentemente, processos dissipativos podem provocar pontos de bifurcação em equações diferenciais não-lineares e autônomas (independentes explicitamente do tempo).

O presente capítulo é um retorno a essa questão, tendo como orientação a combinação mínima e não mínima das teorias de Einstein e Maxwell, sob a forte restrição de fluido perfeito. O exame das propriedades globais do espaço-tempo sugere a questão: qual é o efeito sobre a descrição clássica convencional se o acoplamento do campo eletromagnético com a gravitação é não mínimo e contém funções da curvatura?

Seja a teoria expressa pela lagrangiana²

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{c^2}{4} F + \frac{\zeta}{2} C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} \right). \quad (3.2)$$

A dinâmica de $g_{\mu\nu}$ é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \zeta \mathcal{Z}_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

com a fonte não mínima³

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mu\nu} := & -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\sigma} \Phi^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} R F) + R_{\varepsilon(\mu} \Phi_{\nu)}^{\varepsilon} + R^{\rho\sigma} F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} R \Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{4} F R_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} \Phi_{(\mu;\nu)\varepsilon}^{\varepsilon} + \frac{1}{4} F_{;\mu;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Phi^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho} + \frac{1}{2} \square F) - \frac{1}{2} \square \Phi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

¹ Novello, 1982; Novello e Rodrigues, 1984.

² Hartmann e Novello, 2019.

³ Cf. Capítulo 1.

O traço das equações de campo (3.3) é

$$R = \zeta (C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} - E^{\mu\nu}{}_{;\mu;\nu}). \quad (1.32)$$

A fonte de energia $\mathcal{Z}_{\mu\nu}$, por conter termos de interação da curvatura com o campo eletromagnético, não é um tensor de energia-momento "puro", tal como o tensor de Maxwell $E_{\mu\nu}$. Por conter funções da curvatura e derivadas do campo eletromagnético, a interpretação de $\mathcal{Z}_{\mu\nu}$ em termos de fluido perfeito é, aparentemente, inviável. Com efeito, prosseguiremos pelo caminho percorrido no Capítulo 2.

Como hipótese adicional à média de Tolman, relações (2.13)-(2.15) do Capítulo 2, pressupõe-se que a derivada temporal comuta com a média dos campos ao quadrado, ou seja,

$$\partial_t \langle E_i E_j \rangle = \langle \partial_t E_i E_j \rangle, \quad (3.4)$$

$$\partial_t \langle B_i B_j \rangle = \langle \partial_t B_i B_j \rangle, \quad (3.5)$$

$$\partial_t \langle E_i B_j \rangle = \langle \partial_t E_i B_j \rangle. \quad (3.6)$$

A validade desta segunda hipótese é restrita à premissa expressa pela equação (2.12): o procedimento de média dos campos \mathcal{E} e \mathcal{B} é *espacial*, enquanto a dependência dos mesmos é apenas *temporal*, de tal modo que a integração sobre todo o espaço-tempo não atua sobre a variação temporal do campo.

Após um cálculo direto, a expressão geral de $\langle \mathcal{Z}_{\mu\nu} \rangle$ resulta⁴

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}_{\mu\nu} \rangle = & M g_{\mu\nu} + N v_\mu v_\nu + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1) X_{;\varepsilon;(\mu} v_{\nu)} v^\varepsilon + \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1) \theta X_{;(\mu} v_{\nu)} \\ & + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1) X R^\alpha{}_{(\mu} v_{\nu)} v_\alpha - \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1) X_{;(\mu;\nu)} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3) X R_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

com

$$M := -\frac{1}{6}(\sigma^2 + 1) \ddot{X} - \frac{5}{18}(\sigma^2 + 1) \theta \dot{X} - \frac{1}{18}(5\sigma^2 - 1) X \dot{\theta} - \frac{2}{9} \sigma^2 X \theta^2, \quad (3.8)$$

$$N := -\frac{1}{3}(\sigma^2 + 1) \ddot{X} - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1) \theta \dot{X} - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1) X \dot{\theta} - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1) X \theta^2. \quad (3.9)$$

O cálculo pode ser conferido, termo a termo, no Apêndice A.

⁴ Hartmann e Novello, 2019.

À semelhança da decomposição de $Z_{\mu\nu}$, equação (2.32) do Capítulo 2, obtêm-se as expressões gerais das quantidades irreduzíveis associadas, a saber: a densidade de energia

$$\begin{aligned} \rho_z = & M + N + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;\mu} v^\mu v^\varepsilon + \frac{4}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;\mu} v^\mu \\ & + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)XR_{\alpha\mu} v^\alpha v^\mu - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\mu;\nu} v^\mu v^\nu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\nu} v^\mu v^\nu, \end{aligned} \quad (3.10)$$

a pressão isotrópica

$$\begin{aligned} p_z = & -M + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\square X - \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)X_{;\rho;\sigma} v^\rho v^\sigma - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR \\ & + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma, \end{aligned} \quad (3.11)$$

o fluxo de calor

$$\begin{aligned} q_\lambda^{(z)} = & +\frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;\lambda} v^\varepsilon - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\lambda + \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;\lambda} \\ & - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;\beta} v^\beta v_\lambda + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)XR_{\varepsilon\lambda} v^\varepsilon - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)XR_{\varepsilon\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\lambda \\ & - \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\lambda;\beta)} v^\beta + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\beta} v^\beta v^\alpha v_\lambda \\ & + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\lambda\beta} v^\beta - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta v_\lambda, \end{aligned} \quad (3.12)$$

e pressão anisotrópica

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu}^{(z)} = & -\frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\nu)} - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\beta} v^\beta v^\alpha v_\mu v_\nu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\beta} v^\beta v^\alpha v_\mu v_\nu - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha(\mu} v_\nu) v^\alpha \\ & + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\beta)} v^\beta v_\nu + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\alpha;\nu)} v^\alpha v_\mu \\ & + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\square X h_{\mu\nu} - \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)X_{;\rho;\sigma} v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR h_{\mu\nu} + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

O cálculo encontra-se registrado no Apêndice B.

Na representação de fluido perfeito, as componentes de $q_\lambda^{(z)}$ são

$$\begin{aligned}
q_0^{(z)} &= +\frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\dot{X} + \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} \\
&\quad - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)XR_0^0 - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)XR_0^0 \\
&\quad - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\dot{X} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{00} - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{00} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$q_i^{(z)} = 0. \tag{3.15}$$

As componentes de $\pi_{\mu\nu}^{(z)}$, por sua vez, são escritas

$$\begin{aligned}
\pi_{00}^{(z)} &= -\frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{00} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{00} \\
&\quad - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} - \frac{2}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{00} + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\pi_{0i}^{(z)} = 0. \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}^{(z)} &= -\frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(i;j)} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{ij} \\
&\quad + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\square X g_{ij} - \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)X_{;0;0} g_{ij} \\
&\quad - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR g_{ij} + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR_{00} g_{ij} \\
&= -\frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)2\frac{\theta}{3}\dot{X} g_{ij} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)X \left[\frac{1}{3}(\dot{\theta} + \theta^2) g_{ij} \right] \\
&\quad + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1) [\ddot{X} + \theta\dot{X}] g_{ij} - \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} g_{ij} \\
&\quad - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)X \left[2\dot{\theta} + \frac{4}{3}\theta^2 \right] g_{ij} + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)X \left[\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} \right] g_{ij} \\
&= -\frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} g_{ij} + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} g_{ij} \\
&\quad + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)X \left[3\frac{1}{3}(\dot{\theta} + \theta^2) + \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} - 2\dot{\theta} - \frac{4}{3}\theta^2 \right] g_{ij} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto, como o fluxo de calor q_μ e a pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu}^{(z)}$ se anulam sob o procedimento de média, a fonte de energia-momento não mínima $\langle \mathcal{Z}_{\mu\nu} \rangle$ satisfaz a estrutura de fluido perfeito.

Consequentemente, a eq.(3.7) se reduz à forma

$$\langle \mathcal{Z}_{\mu\nu} \rangle = (\rho_z + p_z) v_\mu v_\nu - p_z g_{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

com

$$\rho_z = -\frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} + \frac{1}{3}\sigma^2 X\dot{\theta} - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X\theta^2, \quad (3.20)$$

$$p_z = \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} + \frac{1}{9}(2\sigma^2 + 1)X\dot{\theta} + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X\theta^2. \quad (3.21)$$

O traço de $\langle \mathcal{Z}_{\mu\nu} \rangle$ se reduz a

$$\langle \mathcal{Z} \rangle := g^{\mu\nu} \langle \mathcal{Z}_{\mu\nu} \rangle = -(\sigma^2 + 1) \left[\frac{1}{2}\ddot{X} + \frac{7}{6}\theta\dot{X} + \frac{1}{3}X\dot{\theta} + \frac{2}{3}X\theta^2 \right]. \quad (3.22)$$

A partir da representação de fluido perfeito, as equações de campo de densidade e conservação de energia assumem a forma já conhecida,

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} \quad (2.5)$$

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0, \quad (2.6)$$

uma vez que a densidade total ρ e a pressão total p contêm as contribuições de Maxwell (ρ_γ, p_γ) e da fonte não-mínima (ρ_z, p_z) , ou seja,

$$\rho := \rho_\gamma + \zeta \rho_z, \quad (3.23)$$

$$p := p_\gamma + \zeta p_z. \quad (3.24)$$

Com isso, pela substituição das expressões de ρ_z e p_z obtidas, as equações (2.5)-(2.6) resultam

$$3X + \zeta \left(-\theta\dot{X} + \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + 1} \dot{\theta}X - \theta^2 X \right) = \frac{\theta^2}{3} \quad (3.25)$$

$$3\dot{X} + \frac{2}{3}\theta X + \zeta \left(\frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + 1} X\ddot{\theta} + \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \dot{X}\dot{\theta} + \frac{4\sigma^2 - 1}{3\sigma^2 + 1} X\theta\dot{\theta} \right) = 0. \quad (3.26)$$

Antes de passar ao exame de algumas soluções cosmológicas, vamos tratar das condições formais para a existência de pontos de bifurcação.

Sejam p e q duas variáveis que caracterizam um sistema físico - descrito no plano de fase (p, q) - cuja evolução no tempo t é dado pelo sistema autônomo planar de equações diferenciais⁵

$$\begin{aligned} \dot{p} &= f(p, q, \lambda) \\ \dot{q} &= h(p, q, \lambda), \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde f e h são, em geral, funções não-lineares. O sistema é chamado *autônomo* porque o lado direito do par de equações (3.27) não contém dependência explícita com o tempo t . O parâmetro λ , com domínio no eixo real, caracteriza interações especiais entre as partes do sistema físico⁶.

Os estados de equilíbrio do sistema (3.27) são dados pelos pontos no plano de fase (p, q) , nos quais f e h são simultaneamente aniquilados. Um estado de equilíbrio múltiplo é denominado um *ponto de bifurcação* se, para um dado valor do parâmetro livre λ_0 , o comportamento topológico das curvas integrais varia descontinuamente quando passa pelo valor λ_0 .

A existência de um ponto de bifurcação no sistema dinâmico é testada por meio do Teorema de Bendixson, segundo o qual o índice de Poincaré - que é um tipo de medida das propriedades topológicas na vizinhança do ponto singular - de um estado de equilíbrio múltiplo é dado pela relação

$$I_p = \frac{E - H}{2} + 1, \tag{3.28}$$

em que E e H representam, no plano de fase, o número dos setores elíptico e hiperbólico, respectivamente.

A modificação abrupta do comportamento dinâmico das curvas integrais no plano de fase implica a perda do caráter determinístico nas propriedades métricas do Universo, mesmo em uma descrição clássica.

Por estado fundamental do Universo, internamente à teoria da gravitação, denomina-se a compatibilidade das equações de campo com uma solução cosmológica à expansão constante,

$$\theta := \theta_0. \tag{3.29}$$

Vamos considerar a seguinte questão: é possível \mathcal{L} , interpretada como fluido perfeito, gerar uma situação à expansão constante, na qual a soma da densidade total de energia com a pressão isotrópica total seja nula, isto é, uma situação tal que

$$\rho_\gamma + p_\gamma + \zeta(\rho_z + p_z) = 0? \tag{3.30}$$

⁵Andronov et al., 1973, cap.3.

⁶Novello e Rodrigues, 1984.

De fato, a combinação das expressões (3.20) e (3.21), à θ constante, nos conduz à dinâmica⁷

$$4X + \zeta (\ddot{X} + \theta_0 \dot{X}) = 0, \quad (3.31)$$

A solução analítica é imediata, dispensando do ponto de vista formal o exame da ED 3.31 sob outros caminhos que a matemática dispõe. A solução exponencial, por exemplo,

$$X(t) = A_0 + X_0 e^{mt} \quad (3.32)$$

é admissível se

$$m = -\frac{\theta_0}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4^2/\zeta}). \quad (3.33)$$

No entanto, a riqueza das questões que a cosmologia suscita nos conduz à busca de uma propriedade que não está contida na solução analítica. Se considerarmos a análise qualitativa de sistemas dinâmicos, podemos abordar a seguinte questão: é possível a topologia do sistema dinâmico descrevendo tal solução cosmológica variar com o tempo?

Com um exame simples e direto, a ED (3.31) torna-se o sistema dinâmico autônomo planar

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= -\frac{4}{\zeta} X - \theta_0 Y. \end{aligned} \quad (3.34)$$

A matriz associada $\Delta = \partial(\dot{X}, \dot{Y})/\partial(X, Y)$ retorna

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4/\zeta & -\theta_0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

O determinante é positivo quando $\zeta > 0$. Nesse caso, o ponto de equilíbrio é focal, estável para θ_0 positivo e instável para θ_0 negativo (cf. Figura 3.1a). Quando a constante de interação não mínima é negativa, o determinante é negativo e o ponto de equilíbrio é uma sela (cf. Figura 3.1b).

Se $\det \Delta \neq 0$, há um único ponto crítico na origem do sistema, $(X, Y) = (0, 0)$. O caso

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \det \Delta = 0 \quad (3.36)$$

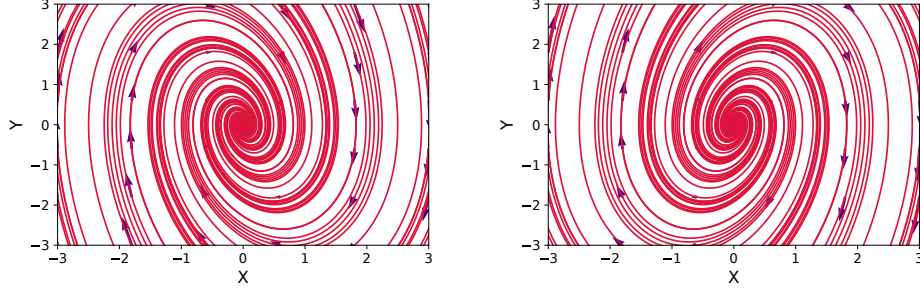
implica linhas inteiras de pontos singulares.

O estado fundamental de \mathcal{L} implica, portanto, ponto de bifurcação (Fig. 3.1).

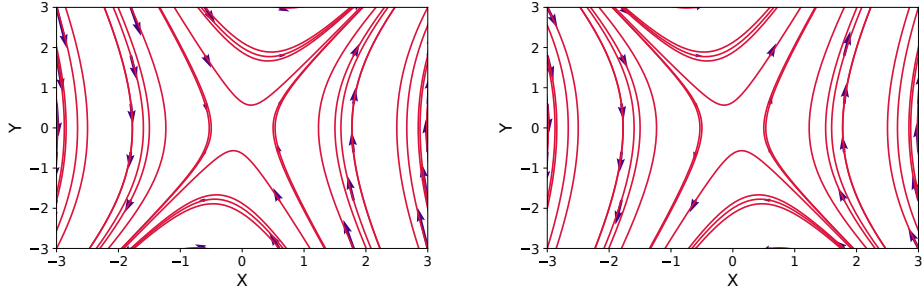
⁷ Hartmann e Novello, 2019.

Figura 3.1: Caso $\rho + p = 0$, com $\theta_0 > 0$ (à esq.) e $\theta_0 < 0$ (à dir.).

(a) $\det \Delta > 0$:



(b) $\det \Delta < 0$:



Com efeito, a conjectura sob investigação, enunciada pela lagrangiana (3.2), assimila a estrutura de fluido perfeito e revela, em seu estado fundamental subjacente, a configuração estacionária tipo de Sitter. Ocorre que, se a soma da distribuição de energia total e da pressão anula-se, então pela equação de Raychaudhuri,

$$\dot{\rho} = 0, \quad (3.37)$$

ou seja, o tensor energia-momento equivale à densidade de energia constante,

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 g_{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

De imediato, instala-se a questão: qual é a origem da expansão (constante) do fluido cósmico? É exatamente aqui que entra em cena o desafio apresentado por de Sitter. Ainda que a distribuição total da "matéria-do-mundo"⁸ seja nula, é possível obter uma descrição compatível com as equações de Einstein – desde que o princípio de Mach seja abandonado. A compatibilidade, por sua vez, repousa sobre uma nova quantidade, introduzida por Einstein⁹ sem contrapartida na física tradicional, que caracteriza a evolução global do Universo – trata-se da *constante cosmológica*.

⁸Termo com o qual de Sitter, 1917, caracteriza a proposta de Einstein, guiada pelo princípio de Mach. A posição de Einstein, em defesa de (i.) um Universo estático e (ii.) preenchido de matéria, é frequentemente aventada em suas cartas a Weyl, Felix Klein e Gustav Mie, Einstein, 1914-1917.

⁹Einstein, 1917.

Cabe, dessa forma, examinar sob quais condições a solução cosmológica fundamental, obtida da relação (3.30), é compatível com uma constante cosmológica, responsável pela evolução dinâmica do Universo.

Uma condição necessária à compatibilidade da potencial constante cosmológica Λ com a solução estacionária está na possibilidade de a dinâmica admitir uma solução a $X := \mathcal{B}^2$ constante.

Da condição (3.30), a parte constante da solução exata (3.32) anula-se, tornando a questão sob exame *prima facie* contestável. Curiosamente, se tomarmos a segunda equação da métrica,

$$\rho_0 = \frac{\theta_0^2}{3} \quad (2.5)$$

a parte constante da solução (3.32) revela:

$$\left(1 - \frac{\zeta}{3}\theta_0^2\right) \frac{\sigma^2 + 1}{2} A_0 = \frac{\theta_0^2}{3}. \quad (3.39)$$

É notável o fato de todas as propriedades da solução constante dependerem da constante de acoplamento não mínimo ζ e do parâmetro σ^2 , que relaciona as partes elétrica e magnética do campo eletromagnético (sob média).

Em síntese, uma nova constante cosmológica $\Lambda = \Lambda(\zeta)$, descrita pela relação

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\zeta}{3}\theta_0^2\right) (\sigma^2 + 1) A_0, \quad (3.40)$$

emerge do fluido cósmico em seu estado de vazio.

Caracteriza-se, portanto, a solução cosmológica encontrada por Willem de Sitter¹⁰, isto é, a configuração de Universo estacionário.

Estados de supressão da energia

O fluido cósmico descrito pelas equações de campo sob média contém potencialmente, à expansão constante, um estado no qual a energia total gerada pela combinação dos acoplamentos mínimo e não mínimo não rege a gravitação¹¹. Como isso é possível?

¹⁰de Sitter, 1917.

¹¹Hartmann e Novello, 2019.

Considere a situação sob as seguintes condições: i) a soma da densidade de energia da parte minimamente acoplada ρ_γ com a parte não-minimamente acoplada ρ_z é nula; ii) a soma da pressão da parte minimamente acoplada p_γ com a parte não-minimamente acoplada p_z é nula; ou seja,

$$\text{i) } \rho_\gamma + \zeta \rho_z = 0, \quad (3.41)$$

$$\text{ii) } p_\gamma + \zeta p_z = 0. \quad (3.42)$$

A dinâmica do fluido cósmico, sob as condições de supressão de energia, é descrita pelo sistema de equações diferenciais

$$3X - \zeta(\theta_0 \dot{X} + \theta_0^2 X) = 0, \quad (3.43)$$

$$X + \zeta(\ddot{X} + 2\theta_0 \dot{X} + \theta_0^2 X) = 0. \quad (3.44)$$

A compatibilidade das equações é satisfeita mediante uma solução do tipo exponencial, $X(t) = X_0 \exp mt$. Da condição i), tem-se que

$$m = \frac{3 - \zeta \theta_0^2}{\zeta \theta_0}, \quad (3.45)$$

cuja combinação com a condição ii) retorna

$$\theta_0^2 = -\frac{9}{\zeta}, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{B}^2(t) = \mathcal{B}_0 \exp\left(-\frac{4}{3}\theta_0 t\right). \quad (3.47)$$

Podemos afirmar a seguinte conclusão: a combinação dos acoplamentos mínimo e não-mínimo da gravitação com o campo eletromagnético pode aniquilar o efeito do campo eletromagnético sobre a gravitação em um Universo à expansão constante.

Quem é responsável por conduzir a gravitação? Poderia ser uma constante cosmológica, dependente da constante de acoplamento não mínimo ζ ? Um olhar atento à equação de campo

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} \quad (??)$$

revela, pela condição i), que a constante cosmológica em questão deve ser nula,

$$\rho_\gamma + \zeta \rho_z = \frac{\theta_0^2}{3} = -\frac{3}{\zeta} = 0. \quad (3.48)$$

De fato, essa situação demonstra explicitamente que gravitação gera gravitação. Ou seja, a natureza não linear da interação gravitacional é responsável pela compatibilidade de tal processo.

Nota-se que, ao fixar a relação entre o fator de expansão θ_0 e a constante de acoplamento não-mínimo ζ , perde-se o caráter indeterminado do sistema. Em outras palavras, não há bifurcações em tais estados de supressão de energia.

Um inspeção direta da equação diferencial (3.44) implica o sistema dinâmico

$$\dot{X} = Y, \quad (3.49)$$

$$\dot{Y} = -\left(\theta_0^2 + \frac{1}{\zeta}\right)X - 2\theta_0 Y, \quad (3.50)$$

do qual resulta o determinante positivo $8\theta_0^2/9$. Logo, não existe ponto de bifurcação no estado de energia suprimida.

A propriedade de aniquilação da energia do campo gravitacional, acoplado mínima e não-minimamente com outro campo, não é restrita ao campo eletromagnético. A combinação de acoplamentos mínimo e não-mínimo do campo escalar¹² com a gravitação também exhibe estados que violam o princípio de ação e reação.

¹²Novello e Hartmann, 2019b.

Capítulo 4

GEOMETRIA WIST

A Teoria Geral da Relatividade foi arquitetada a partir da hipótese segundo a qual a estrutura do espaço-tempo pode ser representada por uma variedade riemanniana 4-dimensional. A relação entre o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e a conexão de Levi Civita¹ $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu \nu \end{smallmatrix} \right\}$ é expressa pela condição de metricidade²

$$g_{\mu\nu;\alpha} := g_{\mu\nu,\alpha} - \left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \mu \alpha \end{smallmatrix} \right\} g_{\beta\nu} - \left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \nu \alpha \end{smallmatrix} \right\} g_{\mu\beta} = 0. \quad (4.1)$$

Ocorre que metricidade e afinidade são conceitos geométricos independentes³. O primeiro compreende medidas de comprimentos, ângulos, áreas e volumes; enquanto o segundo refere-se às propriedades que permanecem invariantes sob translações, como a de paralelismo.

Por conseguinte, a associação entre conexão e métrica - da forma $\Gamma = \Gamma(g, \partial g)$ - não é univocamente definida. De fato, a constatação de tal premissa conduziu Élie Cartan a trilhar outro caminho na formulação de uma teoria da gravitação. Em sua monografia de 1924, Cartan introduz uma conexão não-métrica por meio do cálculo exterior de formas diferenciais⁴.

A possibilidade de construir a relação entre conexão e métrica, no contexto da TGR, via princípio variacional passou a ser discutida em 1925, quando Einstein atribui a Palatini⁵ o seguinte caminho metodológico: a ação $\hat{S} := S[g, \Gamma]$ pode ser tratada como um funcional de dois campos dinamicamente independentes - o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, de tal modo que a variação $\delta S = 0$ implica $\delta g_{\mu\nu} = 0$ e $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$ separadamente.

Vamos reconsiderar a ação da gravitação acoplada minimamente ao campo eletromagnético⁶,

$$\hat{S} = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{c^2}{4} F \right) d^4x. \quad (4.2)$$

A variação δS requer duas variações de campo independentes, $\delta g_{\mu\nu}$ e $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, a saber

$$\begin{aligned} \delta \hat{S} = & \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) + E_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ & + \int \sqrt{-g} \left[(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{\parallel\alpha} - \frac{1}{2} (\sqrt{-g} g^{\mu\epsilon})_{\parallel\epsilon} \delta^\nu_\alpha - \frac{1}{2} (\sqrt{-g} g^{\epsilon\nu})_{\parallel\epsilon} \delta^\mu_\alpha \right] \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha d^4x, \end{aligned} \quad (4.3)$$

¹Neste capítulo, as gamas $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ denotam uma conexão afim de um caso especial da geometria de Weyl.

²Novello, 2010, cap. 1.

³Weyl, 1923, cap.2.

⁴Uma discussão da geometria de Cartan é feita, por exemplo, por Novello, 1979b.

⁵Palatini, 1919.

⁶Capítulo 1, eq.(4).

onde a dupla barra denota a derivação covariante com relação à $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$.

A dinâmica de $g_{\mu\nu}$ é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\kappa E_{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

A relação entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, por sua vez, é deduzida da variação $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, que implica

$$(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{\parallel\alpha} - \frac{1}{2}(\sqrt{-g} g^{\mu\epsilon})_{\parallel\epsilon} \delta^\nu_\alpha - \frac{1}{2}(\sqrt{-g} g^{\epsilon\nu})_{\parallel\epsilon} \delta^\mu_\alpha = 0. \quad (4.5)$$

Esta, por sua vez, é satisfeita somente se

$$(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{\parallel\alpha} = 0. \quad (4.6)$$

Portanto,

$$g_{\mu\nu\parallel\alpha} = 0, \quad (4.7)$$

ou seja, $g_{\mu\nu}$ satisfaz a condição de metricidade (4.1). Em síntese, pela variação à Palatini, a interação gravitacional mínima com o campo eletromagnético implica a variedade riemanniana. As equações de campo (4.4) coincidem com a expressão (7), obtida pelo procedimento usual da TGR, denominado na literatura de princípio variacional métrico.

Conquista-se, assim, uma nova compreensão acerca da estrutura do espaço-tempo: a questão acerca de como caracterizar a geometria do espaço-tempo deixa de ser fixada por livre escolha e passa a depender da sua *origem dinâmica*⁷.

Conseqüentemente, somos confrontados pela seguinte questão: o que ocorre com a dedução da estrutura do espaço-tempo a partir da ação de Einstein-Hilbert ao se introduzir, por exemplo, a interação da geometria com a matéria? A resposta depende do modo pelo qual matéria e campo estão acoplados⁸.

Se a lagrangiana descreve uma interação gravitacional mínima, então a variação via Palatini implica a métrica riemanniana. Tal resultado, como mostrado acima, é direto e esperado, visto que a variação $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ incide unicamente sobre a ação da gravitação.

A situação torna-se distinta se a lagrangiana descreve uma interação não mínima da gravitação com a matéria.

⁷Novello e Bergliaffa, 2008, §3.2.

⁸Novello, 2010.

Vamos considerar a interação gravitacional não mínima descrita pela ação

$$\hat{S} = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{c^2}{4} F + \frac{\xi}{2} RF \right) d^4x. \quad (4.8)$$

A dinâmica de $g_{\mu\nu}$, via Palatini, é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \xi \hat{Z}_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

com

$$\hat{Z}_{\mu\nu} := \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) F - 2R\Phi_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

A variação $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, por sua vez, requer

$$(\sqrt{-g} \Omega g^{\mu\nu})_{\parallel\alpha} = 0, \quad (4.11)$$

sendo

$$\Omega := 1 + \xi F. \quad (4.12)$$

A relação (4.11) mostra que, ao contrário da condição de metricidade (4.1), a derivada covariante da métrica $g_{\mu\nu}$ é não nula e satisfaz a condição geral de não-metricidade⁹

$$g_{\mu\nu\parallel\alpha} := g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\varepsilon g_{\varepsilon\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\varepsilon g_{\mu\varepsilon} = g_{\mu\nu} w_\alpha, \quad (4.13)$$

tal que

$$w_\alpha := -(\ln \Omega)_{,\alpha}. \quad (4.14)$$

O vetor w_α é conhecido como vetor de Weyl¹⁰ e constitui condição necessária e suficiente para a definição de uma extensão da geometria de Riemann denominada¹¹ *Espaço-Tempo Integrável de Weyl*.

⁹Novello, 2010, §4.6.

¹⁰Weyl, 1923.

¹¹*Weyl Integrable Space-Time* (WIST), cf. Novello e Heintzmann, 1983; Novello e Bergliaffa, 2008, §3.2.1; Scholz, 2018.

A estrutura WIST é conformalmente riemanniana¹², ou seja,

$$ds_{WIST}^2 = f^2(x) ds_{Riem}^2. \quad (4.15)$$

Pela soma das permutações cíclicas dos índices na equação (4.13), a relação explícita da conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \ \nu \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} (\delta^\alpha_\mu w_\nu + \delta^\alpha_\nu w_\mu - g_{\mu\nu} w^\alpha). \quad (4.16)$$

O Tensor Curvatura de Riemann $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$, na Geometria WIST, é definido em termos da derivada covariante com respeito a $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, ou seja, na forma¹³

$$v^\alpha_{\parallel\mu\parallel\nu} - v^\alpha_{\parallel\nu\parallel\mu} := R^\alpha_{\beta\mu\nu} v^\beta, \quad (4.17)$$

de tal modo que

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\varepsilon} \Gamma^\varepsilon_{\nu\mu}. \quad (4.18)$$

Assim, para descrevermos $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$ na Geometria Riemanniana, basta combinar a curvatura de Riemann, eq. (4.18), com a expressão (4.16) da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, que resulta

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\mu\beta\nu} = & \bar{R}^\alpha_{\mu\beta\nu} + \frac{1}{2} \delta^\alpha_\mu w_{[\nu;\beta]} + \frac{1}{2} w_{\mu;[\beta} \delta^\alpha_{\nu]} + \frac{1}{2} w^\alpha_{;[\nu} g_{\beta]\mu} \\ & + \frac{1}{4} \delta^\alpha_{[\nu} w_{\beta]} w_\mu + \frac{1}{4} \delta^\alpha_{[\beta} g_{\nu]\mu} w_\sigma w^\sigma + \frac{1}{4} g_{\mu[\beta} w_{\nu]} w^\alpha, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde

$$\bar{R}^\alpha_{\mu\beta\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \ \beta \end{matrix} \right\}_{|\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \ \nu \end{matrix} \right\}_{|\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu \ \gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu \ \beta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \ \varepsilon \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \nu \ \mu \end{matrix} \right\}. \quad (4.20)$$

Tomando a primeira contração, obtém-se para o Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ a expressão

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} w_{\nu;\mu} - \frac{3}{2} w_{\mu;\nu} - \frac{1}{2} w_\mu w_\nu - \frac{1}{2} (w^\alpha_{;\alpha} - w_\alpha w^\alpha) g_{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

Contraindo novamente, escreve-se o escalar de curvatura R ,

$$R = \bar{R} - 3w^\alpha_{;\alpha} + \frac{3}{2} w_\alpha w^\alpha. \quad (4.22)$$

¹²Novello e Heintzmann, 1983.

¹³Oliveira, 1988, cap. 3.

A partir dessas expressões gerais, vamos reescrever o Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e seu escalar R em termos da estrutura riemanniana associada, na representação de fluido perfeito.

Na métrica isotrópica e homogênea, o vetor de Weyl escreve-se

$$w_{\mu} := (-\ln \Omega)_{,\mu} = -\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \delta_{\mu}^0. \quad (4.23)$$

As componentes da derivada covariante¹⁴ do vetor de Weyl, na geometria de Riemann, são

$$w_{0;o} = w_{o;o} = -\left[\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right] \quad (4.24)$$

$$w_{i;j} = -\left\{ \begin{matrix} o \\ i \ j \end{matrix} \right\} w_o = -\left(-\frac{\theta}{3} g_{ij} \right) \left[-\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \delta_o^o \right] = -\frac{\theta}{3} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} g_{ij}. \quad (4.25)$$

Logo,

$$w_{\mu;\nu} = \left[-\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 + \frac{\theta}{3} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] \delta_{\mu}^o \delta_{\nu}^o - \frac{\theta}{3} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} g_{\mu\nu}. \quad (4.26)$$

De acordo com as expressões (4.21) e (4.22), obtêm-se

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \left[\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \frac{\theta}{3} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] v_{\mu} v_{\nu} + \left[\frac{1}{2} \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{5}{6} \theta \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] g_{\mu\nu} \quad (4.27)$$

e

$$R = \bar{R} + 3 \left[\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 + \theta \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right]. \quad (4.28)$$

O lado direito das equações de campo (4.9) é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} := \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{\mu\nu} + \bar{Y}_{\mu\nu}, \quad (4.29)$$

com

$$\bar{Y}_{\mu\nu} = \left[\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \frac{\theta}{3} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] v_{\mu} v_{\nu} + \left[-\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \frac{2}{3} \theta \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] g_{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

A fonte de energia da interação não-mínima $\hat{Z}_{\mu\nu}$, por sua vez, é descrita na Geometria Riemanniana pela expressão

$$\hat{Z}_{\mu\nu} = \bar{Z}_{\mu\nu} + F \bar{Y}_{\mu\nu} - 6 \left[\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 + \theta \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] \Phi_{\mu\nu}. \quad (4.31)$$

¹⁴Denotada por ponto e vírgula, como nos capítulos anteriores.

Seguindo o procedimento de média introduzido no Capítulo 2, encontramos por um cálculo direto que $\langle \hat{Z}_{\mu\nu} \rangle$ é redutível à representação de fluido perfeito, ou seja,

$$\langle \hat{Z}_{\mu\nu} \rangle = (\rho_z + p_z)v_\mu v_\nu - p_z g_{\mu\nu}, \quad (4.32)$$

com

$$\rho_z = -4\sigma^2 X \dot{\theta} - 2(\sigma^2 + \frac{1}{3})X\theta^2 - 3\sigma^2 X \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{3}{2}(3\sigma^2 - 1)X \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)^2 - 2(2\sigma^2 + 1)X\theta \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad (4.33)$$

$$p_z = -\frac{4}{3}X\dot{\theta} + \frac{2}{9}(\sigma^2 - 5)X\theta^2 - 2X \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)^2 + \frac{2}{3}(\sigma^2 - 4)X\theta \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad (4.34)$$

De imediato, constata-se que, da hipótese de equipartição de energia entre as partes elétrica $\mathcal{E}^2(t)$ e magnética $\mathcal{B}^2(t)$ do tensor de Faraday, decorre o limite riemanniano da teoria. Isto é, o caso $\sigma^2 = 1$ implica

$$F = 0 \implies \Omega = 1. \quad (4.35)$$

Logo, $g_{\mu\nu||\alpha} = 0$. Consequentemente, a densidade de energia ρ_z e a pressão p_z estão relacionados,

$$\rho_z = 3p_z = -4X\dot{\theta} - \frac{8}{3}X\theta^2. \quad (4.36)$$

As equações de campo para a métrica se reduzem à

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{R}g_{\mu\nu} = -\kappa \bar{T}_{\mu\nu} \quad (4.37)$$

com

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \frac{4}{3}\rho v_\mu v_\nu - \frac{1}{3}\rho g_{\mu\nu}, \quad (4.38)$$

e

$$\rho = \rho_\gamma + \xi\rho_z. \quad (4.39)$$

Somos, assim, conduzidos à seguinte questão: são as equações de campo compatíveis com tal resultado?

Da expressão para a conservação de energia (2.6), escreve-se

$$\dot{\rho} + \frac{4}{3}\rho\theta = 0, \quad (4.40)$$

que resulta

$$(\dot{X} + \frac{4}{3}X\dot{\theta})(1 - 4\xi\dot{\theta} - \frac{8}{3}\xi\theta^2) - 4\xi X\ddot{\theta} - \frac{8}{3}\xi X\theta^{2\bullet} = 0, \quad (4.41)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}(\ln X) = -\frac{d}{dt}[\ln(1 - 4\xi\dot{\theta} - \frac{8}{3}\xi\theta^2)] - \frac{4}{3}\theta. \quad (4.42)$$

A integral primeira é dada por

$$X(t) = \frac{1}{1 - 4\xi\dot{\theta} - \frac{8}{3}\xi\theta^2} \exp\left(-\frac{4}{3} \int \theta dt\right) \quad (4.43)$$

Da equação de campo $\rho = \theta^2/3$,

$$X(1 - 4\xi\dot{\theta} - \frac{8}{3}\xi\theta^2) = \frac{\theta^2}{3}. \quad (4.44)$$

Pela expressão (4.43), encontra-se de imediato a equação de Raychaudhuri,

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\rho. \quad (4.45)$$

Logo, $\rho = a^{-4}$.

Por fim, vamos mostrar um modo de interação gravitacional não mínima que, pelo procedimento à la Palatini, implica uma geometria não-riemanianna e não-WIST.

Seja a ação

$$\hat{S} = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{c^2}{4} F + \frac{\zeta}{2} C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} \right) d^4x. \quad (4.46)$$

A dinâmica de $g_{\mu\nu}$ é descrita por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} - \zeta \hat{Z}_{\mu\nu}, \quad (4.47)$$

com

$$\hat{Z}_{\mu\nu} := -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\sigma} \Phi^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} R F) + R_{\varepsilon(\mu} \phi_{\nu)}^{\varepsilon} + R^{\rho\sigma} F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} R \Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{4} F R_{\mu\nu}. \quad (4.48)$$

Da variação $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, obtém-se

$$g_{\mu\nu;\alpha} = -\zeta E_{\mu\nu;\alpha}. \quad (4.49)$$

Nesse caso, o lado direito da relação de não-metricidade não satisfaz à estrutura WIST, visto que $E_{\mu\nu;\alpha}$ não pode ser escrito em termos do vetor de Weyl w_{α} .

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Teoria Geral da Relatividade é, desde a sua concepção, uma teoria aberta: ainda que auto-consistente, requisito lógico para a compleição de uma teoria física, contém em si as condições para a autocrítica de seus princípios.

A investigação das interações gravitacionais não mínimas constitui uma trilha dessa autocrítica interna à TGR. É herdeira do programa de investigação iniciado em 1915¹⁵, pelo qual a TGR foi o primeiro passo na tentativa de elaborar uma descrição do universo testável empiricamente.

Podemos ressaltar alguns aspectos relevantes do presente trabalho.

(i.) A gravitação não minimamente acoplada ao campo eletromagnético gera uma fonte de energia que deixa de ser puramente eletromagnética e passa a ser uma combinação desta com a curvatura do espaço-tempo. Trata-se, portanto, de uma reinterpretação do tensor de energia convencional da cosmologia.

(ii.) A nova fonte de energia consiste tão somente de campos físicos conhecidos – o gravitacional e o eletromagnético.

(iii.) A interação da gravitação com o campo eletromagnético, por meio do acoplamento $I_3 = \xi RF$, torna-se responsável por gerar a aceleração do universo a tempos tardios, ou seja, a aceleração da presente época cósmica.

A questão que, de imediato, tal resultado coloca é: como sustentar, racionalmente, que a aceleração cósmica é causada por uma fonte de energia desconhecida – como a ‘energia escura’ –, se é possível afirmar que tal aceleração é gerada pela interação da gravitação com o campo eletromagnético?

(iv.) Por meio dos acoplamentos $C_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu}$ e $W_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}$, a gravitação torna-se responsável por eliminar a dependência local do campo eletromagnético sob ação de um mapeamento dual.

(v.) A dinâmica gerada pela interação não-mínima $\zeta C_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu}$ é compatível com a representação de fluido perfeito. O estado fundamental desse fluido, em um cenário magnético, possui como limite assintótico a configuração de espaço tipo de Sitter.

(vi.) A ocorrência de pontos de bifurcação internamente à TGR, combinada ao acoplamento $\zeta C_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu}$, é um exemplo concreto de que o comportamento do sistema dinâmico descrevendo a solução cosmológica não é absoluto. Ao contrário, a evolução do sistema dinâmico encontrado é suscetível à mudança, potencialmente múltiplo e necessariamente incompleto.

¹⁵Einstein, 1915.

O indeterminismo presente no sistema ocorre tão somente na vizinhança do ponto de bifurcação. O campo de Maxwell, protótipo de testabilidade da teoria clássica de campos, pode ser responsável, ao interagir diretamente com a gravitação, por romper com a ordem determinista de certas situações cosmológicas, mesmo sob a forte restrição de interpretarmos a fonte de energia total como fluido perfeito.

(vii.) O fluido perfeito gerado pela combinação da TGR com a interação $\zeta C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}$ é compatível com estados nos quais a energia do acoplamento mínimo (fótons convencionais) é anulada pela energia da interação não-mínima, de tal modo que a criação do campo gravitacional ocorre mediante a ação de uma nova constante cosmológica, gerada pela fonte não-mínima.

Consequentemente, há uma espécie de violação do princípio de ação e reação, visto que o campo gravitacional atua dinamicamente e as equações de movimento, por sua vez, não atuam sobre o campo gravitacional.

(viii.) A TGR é capaz de gerar dinamicamente a geometria do espaço-tempo, inclusive estruturas não-riemannianas. Qual é a geometria do espaço-tempo? Sob a perspectiva da variação à Palatini, a resposta passa a depender do modo pelo qual escolhemos representar a interação gravitacional.

O acoplamento ξRF , via Palatini, gera um caso especial da geometria de Weyl denominada WIST. A fonte de energia total é redutível à representação de fluido perfeito. Sob a hipótese de equipartição de energia das componentes elétrica e magnética, a estrutura WIST é reduzida à geometria riemanniana associada, que coincide exatamente com a era de radiação da teoria.

O presente trabalho não se constitui enquanto produção de uma teoria candidata à um novo paradigma, isto é, uma teoria que deve substituir o paradigma vigente na cosmologia. A razão é simples: o discurso paradigmático da atividade científica permite trilhar uma única trajetória de escape: a "física nova".

Considerar a possibilidade de existirem interações gravitacionais não mínimas com a radiação é realizar o movimento contrário àquele pretendido pela fixação de paradigmas, uma vez que se trata de uma descrição da evolução do universo tão somente a partir de campos físicos conhecidos – o gravitacional e o eletromagnético.

Se considerarmos que as condições para a refundação da física estão dadas na sua própria tradição racional¹⁶, talvez seja possível discutir o seu avanço para além da substituição de um paradigma por outro.

A cosmologia, forjada desde os filósofos gregos sob a tradição da crítica racional, é irredutível à atitude paradigmática. Ao manter abertos os caminhos já conhecidos, problematiza os princípios

¹⁶Hartmann, 2013, cap.1.

até então vigentes, revisita conclusões efêmeras e revitaliza a disposição humana à busca pela compreensão do universo.

BIBLIOGRAFIA

- Alves, G. A. (1986). “Fótons não lineares: uma solução cosmológica não singular”. Dissertação. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (ver p. 9).
- Andronov, A. A., E. A. Leontovich, I. Gordon e A. Maier (1973). *Qualitative Theory of Second Order Dynamic Systems*. New York: Wiley (ver p. 44).
- Bel, L. (1960). “La radiation gravitationnelle”. Em: *Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste* (12) (ver p. 19).
- Choquet-Bruhat, Y. (2015). *Introduction to General Relativity, Black Holes and Cosmology*. Oxford University Press (ver p. 2).
- de Sitter, W. (1917). “On the relativity of inertia: Remarks concerning Einstein’s latest hypothesis”. Em: *KNAW* 19, pp. 1217–1225 (ver pp. 17, 46, 47).
- Debever, R. (1958). “La super-énergie en relativité générale”. Em: *Bull.Soc. Math. Belg.* 10, pp. 112–147 (ver pp. 9, 19, 20).
- (1964). “Le rayonnement gravitationnel. Le tenseur de Riemann en relativité générale”. Em: *Cahiers Phys.* 168, p. 303 (ver pp. 11, 21).
- Deser, S. e P. van Nieuwenhuizen (1974). “One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields”. Em: *Phys. Rev. D* 10 (2), pp. 401–410 (ver p. 6).
- Dirac, P. A. M. (1931). “Quantised singularities in the electromagnetic field”. Em: *Proc. R. Soc. Lond. A* 133.821, pp. 60–72 (ver p. 10).
- (1975). *General Theory of Relativity*. New York - London: John Wiley e Sons (ver p. 15).
- Drummond, I. T. e S. J. Hathrell (1980). “QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons”. Em: *Phys. Rev. D* 22 (2), pp. 343–355 (ver p. 6).
- Ducap, C. E. L. (2014). “Estabilidade de modelos de Universo magnético”. Dissertação. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (ver pp. 26, 30).
- Eddington, A. S. (1923). *The Mathematical Theory of Relativity*. 1nd. Cambridge University Press (ver pp. 3–5).
- Einstein, A. (1914-1917). “The Berlin Years: Correspondance”. Em: *Collected Papers*. Vol. 8 (ver p. 46).
- (1915). “On the General Theory of Relativity”. Em: *Collected Papers* 6, pp. 98–107 (ver p. 57).
- (1917). “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie”. Em: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 142-152. (Ver p. 46).
- (1919). “Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle?” Em: *Sitz. der Preus. Akad. d. Wissenschaften*, pp. 349–356 (ver p. 11).

- Géhéniau, J. e R. Debever (1956). “Les quatorze invariants de courbure de l’espace riemannien à quatre dimensions”. Em: *Helv. Phys. Acta Suppl.* 4, p. 101 (ver p. 19).
- Hartmann, A. E. S. (2013). “O ‘mundo 3’ assombrado pelos demônios: Popper e o positivismo de Copenhagen”. Monografia. Universidade Estadual do Oeste do Paraná (ver p. 58).
- Hartmann, A. E. S. e M. Novello (2019). “A new bifurcation in the Universe”. Em: *ArXiv 1904.01525* (ver pp. 21, 39, 40, 45, 47).
- Hoyle, F. e J. V. Narlikar (1964). “A new theory of gravitation”. Em: *Proc. R. Soc. of London A* 282.1389, pp. 191–207 (ver p. 17).
- Jorda, S. D. (1988). “Os diversos modos de acoplamento não-mínimo entre Eletromagnetismo e Gravitação: suas propriedades gerais e consequências para a propagação da radiação eletromagnética”. Dissertação. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (ver pp. 9, 25).
- Lyttleton, R. e H. Bondi (1959). “Physical consequences of a general excess of charge”. Em: *Proc. of the Royal Soc. of London A* 252.1270, pp. 313–333 (ver p. 16).
- Misner, C. W. e J. A. Wheeler (1957). “Classical physics as geometry”. Em: *Annals of Physics* 2, pp. 525–603 (ver p. 10).
- Narlikar, J. V. (2006). “The quasi-stead-state cosmology”. Em: *Current issues in Cosmology*. Cambridge University Press, pp. 139–151 (ver p. 17).
- Narlikar, V. V. e K. R. Karmarkar (1949). “The scalar invariants of a general gravitational metric”. Em: *Proc. Ind. Acad. of Sci. A* 29.2, p. 92 (ver p. 19).
- Novello, M. (1979a). “Cosmologia Relativística”. Em: *IInd Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, pp. 203–359 (ver p. 27).
- (1979b). “Towards the Geometrization of Electromagnetism”. Em: *IInd Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, pp. 115–157 (ver pp. 10, 50).
- (1982). “Bifurcations in the cosmos”. Em: *Notas de Física / CBPF* 15 (ver pp. 7, 39).
- (1987). “The Program of an Eternal Universe”. Em: *Vth Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, pp. 245–343 (ver pp. 8, 9, 11).
- (1993). “Theoretical Cosmology”. Em: *VIIIth Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, pp. 297–414 (ver p. 9).
- (2010). *Cosmologia*. São Paulo: CBPF - Ed. Livraria da Física (ver pp. 2, 21, 23, 50–52).
- Novello, M. e S. E. P. Bergliaffa (2008). “Bouncing cosmologies”. Em: *Physics Report* 463, pp. 127–213 (ver pp. 7, 8, 10, 11, 26, 30, 51, 52).
- Novello, M. e E. Goulart (2010). *Eletrodinâmica Não Linear: Causalidade e Efeitos Cosmológicos*. São Paulo: CBPF - Ed. Livraria da Física (ver pp. 17, 24).
- Novello, M. e A. E. S. Hartmann (2019a). “Is the electromagnetic field responsible for the cosmic acceleration in late times?” Em: *Int. J. Mod. Phys. A* 34.16 (ver pp. 25, 33).
- (2019b). “The cosmological constant and a scalar field non minimally coupled to gravity”. Em: *Int. J. Theor. Phys.* (Ver p. 49).

- Novello, M. e H. Heintzmann (1983). “Weyl Integrable Space-Time: a model of our cosmos?” Em: *Physics Letters A* 98.1, pp. 10–11 (ver pp. 52, 53).
- Novello, M. e S. D. Jorda (1989). “Does there exist a cosmological horizon problem?” Em: *Mod. Phys. Lett. A* 04.19, pp. 1809–1813 (ver p. 9).
- Novello, M., L. A. Oliveira e J. M. Salim (1990). “Is the number of photons conserved in an expanding universe?” Em: *Classical and Quantum Gravity* 7, p. 51 (ver p. 9).
- Novello, M. e L. M. C. S. Rodrigues (1984). “Bifurcation in the early cosmos”. Em: *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)* 40 (10), pp. 317–320 (ver pp. 7, 39, 44).
- Novello, M. e C. Romero (1987). “Nonminimal gravitational coupling: the spectrum of cosmic solutions”. Em: *General Relativity and Gravitation* 19.10, pp. 1003–1011 (ver p. 8).
- Novello, M. e J. M. Salim (1979). “Nonlinear photons in the Universe”. Em: *Phys. Rev. D* 20 (2), pp. 377–383 (ver pp. 8, 17).
- (1983). “Non-equilibrium relativistic cosmology”. Em: *Fundamentals of Cosmic Physics* 8, pp. 201–341 (ver p. 17).
- Novello, M., J. M. Salim e E. Ruckert (1983). “Nonlinear photons in the Universe. II The anisotropic case”. Em: *Lett. Nuovo Cimento* 40 (8), pp. 232–234 (ver p. 8).
- Oliveira, L. A. (1988). “Acoplamento não-mínimo com a gravitação e espaços de Weyl integráveis”. Tese. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (ver pp. 8, 9, 53).
- Palatini, A. (1919). “Invariant Deduction of the Gravitational Equations from the Hamilton Principle”. Em: *Cosmology and Gravitation (1980)*. Ed. por A. Trautman, P. G. Bergmann e V. De Sabbata, pp. 477–488 (ver p. 50).
- Rainich, G. Y. (1925). “Electrodynamics in the General Relativity theory”. Em: *Trans. Amer. Math. Soc.* 27, pp. 106–136 (ver p. 10).
- Romero, C. (1988). “Análise Qualitativa de modelos cosmológicos na teoria de Brans-Dicke, soluções com acoplamento não-mínimo e Universos viscosos”. Tese. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (ver p. 9).
- Sahni, V. (2005). “Dark energy”. Em: *XIth Brazilian School of Cosmology and Gravitation* (ver p. 25).
- Scholz, E. (2018). “The unexpected resurgence of Weyl geometry in late 20-th century physics”. Em: *Beyond Einstein*. Birkhäuser, pp. 261–360 (ver p. 52).
- Tolman, R. C. e P. Ehrenfest (1930). “Temperature Equilibrium in a Static Gravitational Field”. Em: *Phys. Rev.* 36 (12), pp. 1791–1798 (ver pp. 6, 24).
- von Rückert, E. (1982). “Um estudo do Acoplamento Não-Mínimo entre a Gravitação e o Eletromagnetismo”. Diss. de mestrado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (ver p. 9).
- Weyl, H. (1923). *Raum Zeit Materie*. 5ª ed. Verlag von Julius Springer (ver pp. 8, 50, 52).
- Witten, L. (1959). “Geometry of Gravitation and Electromagnetism”. Em: *Phys. Rev.* 115, pp. 206–214 (ver p. 10).

Apêndice A

CÁLCULO DA MÉDIA

Seja a interação não mínima

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \frac{\zeta}{2} C_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

cuja fonte de energia é dada pela expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mu\nu} := & -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\sigma} \Phi^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} R F) + R_{\varepsilon(\mu} \Phi_{\nu)}^{\varepsilon} + R^{\rho\sigma} F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} R \Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{4} F R_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} \Phi^{\varepsilon}_{(\mu;\nu)\varepsilon} + \frac{1}{4} F_{;\mu;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Phi^{\rho\sigma}_{;\sigma;\rho} + \frac{1}{2} \square F) - \frac{1}{2} \square \Phi_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

Calcula-se, a seguir, a média de $\mathcal{Z}_{\mu\nu}$, termo a termo. Após obter a expressão geral, escreve-se $\langle \mathcal{Z}_{\mu\nu} \rangle$ na métrica espacialmente isotrópica e homogênea; e, por fim, no cenário magnético, ou seja, no caso em que

$$\mathcal{E}^2 = \sigma^2 \mathcal{B}^2 := \sigma^2 X, \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\sigma} \langle \Phi^{\rho\sigma} \rangle + \frac{1}{4} RF) &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\sigma} (\eta v^\rho v^\sigma + \Sigma g^{\rho\sigma}) + \frac{1}{4} R(-2\chi)) \\
&= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\eta R_{00} + (\Sigma - \frac{1}{2}\chi) R) \\
&= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\frac{2}{3}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) R_{00} - \frac{1}{6}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) R) \\
&= -\frac{1}{3} g_{\mu\nu} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) [R_{00} - \frac{1}{4} R], \tag{A.2}
\end{aligned}$$

onde

$$\eta := \frac{2}{3}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2), \quad \Sigma := \frac{1}{3}(\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{B}^2), \quad \chi := \mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2. \tag{A.3}$$

Na métrica isotrópica e homogênea, dada pelas relações (??) e (??), segue-se de (A.2):

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\sigma} \langle \Phi^{\rho\sigma} \rangle + \frac{1}{4} RF) &= -\frac{1}{3} g_{\mu\nu} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) \left[\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - \frac{1}{4}(2\dot{\theta} + \frac{4}{3}\theta^2) \right] \\
&= -\frac{1}{6} g_{\mu\nu} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) \dot{\theta}. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

No cenário magnético,

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\sigma} \langle \Phi^{\rho\sigma} \rangle + \frac{1}{4} RF) = -\frac{1}{6} (1 + \sigma^2) X \dot{\theta} g_{\mu\nu}. \tag{A.5}$$

Nota-se que

$$\begin{aligned}\langle R^\varepsilon_\mu \Phi_{\nu\varepsilon} \rangle &= \eta R^\varepsilon_\mu v_\nu v_\varepsilon + \Sigma R_{\mu\nu} \\ \langle R^\varepsilon_\nu \Phi_{\mu\varepsilon} \rangle &= \eta R^\varepsilon_\nu v_\mu v_\varepsilon + \Sigma R_{\nu\mu}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle R^\varepsilon_{(\mu} \Phi_{\nu)\varepsilon} \rangle &= \eta R^\varepsilon_{(\mu} v_{\nu)} v_\varepsilon + 2\Sigma R_{\mu\nu} \\ &= \frac{2}{3}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2)R^\varepsilon_{(\mu} v_{\nu)} v_\varepsilon + \frac{2}{3}(\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{B}^2)R_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

No cenário magnético,

$$\langle R^\varepsilon_{(\mu} \Phi_{\nu)\varepsilon} \rangle = \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)XR^\varepsilon_{(\mu} v_{\nu)} v_\varepsilon + \frac{2}{3}(\sigma^2 - 2)XR_{\mu\nu}.\quad (\text{A.7})$$

* * *

$$\begin{aligned}
R^{\rho\sigma} F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} &= R^{\rho\sigma} (\mathcal{E}_\rho v_\mu - \mathcal{E}_\mu v_\rho + \eta^{\rho\mu\kappa\lambda} v_\kappa \mathcal{B}_\lambda) (\mathcal{E}_\nu v_\sigma - \mathcal{E}_\sigma v_\nu + \eta_{\nu\sigma\alpha\beta} v^\alpha \mathcal{B}^\beta) \\
&= R^{\rho\sigma} \left\{ \mathcal{E}_\rho \mathcal{E}_\nu v_\mu v_\sigma - \mathcal{E}_\rho \mathcal{E}_\sigma v_\mu v_\nu + \eta_{\nu\sigma\alpha\beta} v_\mu v^\alpha \mathcal{E}_\rho \mathcal{B}^\beta \right. \\
&\quad - \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\nu v_\rho v_\sigma + \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\sigma v_\rho v_\nu - \eta_{\nu\sigma\alpha\beta} v_\rho v^\alpha \mathcal{E}_\mu \mathcal{B}^\beta \\
&\quad \left. + \eta^{\rho\mu\kappa\lambda} v_\sigma v_\kappa \mathcal{E}_\nu \mathcal{B}_\lambda - \eta^{\rho\mu\kappa\lambda} v_\nu v_\kappa \mathcal{E}_\sigma \mathcal{B}_\lambda - \delta_{\nu\sigma\alpha\beta}^{\rho\mu\kappa\lambda} v^\alpha v_\kappa \mathcal{B}^\beta \mathcal{B}_\lambda \right\}. \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

Sob a hipótese de média,

$$\begin{aligned}
R^{\rho\sigma} \langle F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} \rangle &= \frac{1}{3} R^{\rho\sigma} \left\{ \mathcal{E}^2 (-g_{\rho\nu} v_\mu v_\sigma + g_{\rho\sigma} v_\mu v_\nu + g_{\mu\nu} v_\rho v_\sigma - g_{\mu\sigma} v_\rho v_\nu) \right. \\
&\quad \left. - \delta_{\nu\sigma\alpha\beta}^{\rho\mu\kappa\lambda} v^\alpha v_\kappa (-\mathcal{B}^2 \delta_\lambda^\beta) \right\} \\
&= \frac{1}{3} \left\{ \mathcal{E}^2 (-R_{\nu}{}^\sigma v_\mu v_\sigma + R v_\mu v_\nu + R_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma g_{\mu\nu} - R^\rho{}_\mu v_\rho v_\nu) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{B}^2 R^{\rho\sigma} \delta_{\nu\sigma\alpha}^{\rho\mu\kappa} v^\alpha v_\kappa \right\} \\
&= \frac{1}{3} \mathcal{E}^2 (-R^\sigma{}_{(\mu} v_{\nu)} v_\sigma + R v_\mu v_\nu + R_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma g_{\mu\nu}) \\
&\quad + \frac{1}{3} \mathcal{B}^2 R^{\rho\sigma} \left\{ \delta_\nu^\rho (\delta_\sigma^\mu \delta_\alpha^\kappa - \delta_\alpha^\mu \delta_\sigma^\kappa) + \delta_\alpha^\rho (\delta_\nu^\mu \delta_\sigma^\kappa - \delta_\sigma^\mu \delta_\nu^\kappa) - \delta_\sigma^\rho (\delta_\nu^\mu \delta_\alpha^\kappa - \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\kappa) \right\} v^\alpha v_\kappa \\
&= \frac{1}{3} \mathcal{E}^2 (-R^\sigma{}_{(\mu} v_{\nu)} v_\sigma + R v_\mu v_\nu + R_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma g_{\mu\nu}) \\
&\quad + \frac{1}{3} \mathcal{B}^2 (R_{\mu\nu} - R_{\nu}{}^\sigma v_\sigma v_\mu + R_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma g_{\mu\nu} - R^\rho{}_\mu v_\nu v_\rho - R g_{\mu\nu} + R v_\mu v_\nu) \\
&= -\frac{1}{3} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) R^\sigma{}_{(\mu} v_{\nu)} v_\sigma + \frac{1}{3} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) R v_\mu v_\nu \\
&\quad + \frac{1}{3} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) R_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma g_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \mathcal{B}^2 R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \mathcal{B}^2 R g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

Em termos de fluido perfeito,

$$\begin{aligned}
R^{\rho\sigma} \langle F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} \rangle &= \left[\frac{2}{3} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) \dot{\theta} + \frac{4}{9} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) \theta^2 \right] v_\mu v_\nu + \left[\frac{1}{3} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) \dot{\theta} + \frac{1}{9} (\mathcal{E}^2 - 3\mathcal{B}^2) \theta^2 \right] g_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{3} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) R^\sigma{}_{(\mu} v_{\nu)} v_\sigma + \frac{1}{3} \mathcal{B}^2 R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

No cenário magnético,

$$\begin{aligned}
R^{\rho\sigma} \langle F_{\rho\mu} F_{\nu\sigma} \rangle &= \left[\frac{2}{3} (\sigma^2 + 1) X \dot{\theta} + \frac{4}{9} (\sigma^2 + 1) X \theta^2 \right] v_\mu v_\nu + \left[\frac{1}{3} (\sigma^2 - 1) X \dot{\theta} + \frac{1}{9} (\sigma^2 - 3) X \theta^2 \right] g_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{3} (\sigma^2 + 1) X R^\sigma{}_{(\mu} v_{\nu)} v_\sigma + \frac{1}{3} X R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}R\langle\Phi_{\mu\nu}\rangle &= -\frac{1}{2}R(\eta v_{\mu}v_{\nu} + \Sigma g_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2}R\left[\frac{2}{3}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2)v_{\mu}v_{\nu} + \frac{1}{3}(\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{B}^2)g_{\mu\nu}\right] \\
&= -\frac{1}{3}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2)Rv_{\mu}v_{\nu} - \frac{1}{6}(\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{B}^2)Rg_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Na métrica isotrópica e homogênea,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}R\langle\Phi_{\mu\nu}\rangle &= \left[-\frac{2}{3}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2)\dot{\theta} - \frac{4}{9}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2)\theta^2\right]v_{\mu}v_{\nu} \\
&\quad + \left[-\frac{1}{3}(\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{B}^2)\dot{\theta} - \frac{2}{9}(\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{B}^2)\theta^2\right]g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

No cenário magnético,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}R\langle\Phi_{\mu\nu}\rangle &= \left[-\frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)X\dot{\theta} - \frac{4}{9}(\sigma^2 + 1)X\theta^2\right]v_{\mu}v_{\nu} \\
&\quad + \left[-\frac{1}{3}(\sigma^2 - 2)X\dot{\theta} - \frac{2}{9}(\sigma^2 - 2)X\theta^2\right]g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

* * *

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \langle \Phi^{\varepsilon}_{\mu;\nu;\varepsilon} \rangle &= \frac{1}{2} (\eta v^{\varepsilon} v_{\mu} + \Sigma \delta^{\varepsilon}_{\mu})_{;\nu;\varepsilon} \\
&= \frac{1}{2} (\eta_{;\nu} v^{\varepsilon} v_{\mu} + \eta v^{\varepsilon}_{;\nu} v_{\mu} + \eta v^{\varepsilon} v_{\mu;\nu} + \Sigma_{;\nu} \delta^{\varepsilon}_{\mu})_{;\varepsilon} \\
&= \frac{1}{2} (\eta_{;\nu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\mu} + \eta_{;\nu} v^{\varepsilon}_{;\varepsilon} v_{\mu} + \eta_{;\nu} v^{\varepsilon} v_{\mu;\varepsilon} \\
&\quad + \eta_{;\varepsilon} v^{\varepsilon}_{;\nu} v_{\mu} + \eta v^{\varepsilon}_{;\varepsilon;\nu} v_{\mu} + \eta v^{\varepsilon}_{;\nu} v_{\mu;\varepsilon} \\
&\quad + \eta_{;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\mu;\nu} + \eta v^{\varepsilon}_{;\varepsilon} v_{\mu;\nu} + \eta v^{\varepsilon} v_{\mu;\nu;\varepsilon} + \Sigma_{;\nu;\mu}) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \eta_{;\nu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\mu} + \eta_{;\nu} \theta v_{\mu} + \eta_{;\nu} \dot{v}_{\mu} \right. \\
&\quad + \eta_{;\varepsilon} \left(\frac{\theta}{3} h^{\varepsilon}_{\nu} \right) v_{\mu} + \eta \left(\frac{\theta}{3} h^{\varepsilon}_{\nu} \right)_{;\varepsilon} v_{\mu} + \eta \left(\frac{\theta}{3} h^{\varepsilon}_{\nu} \right) \left(\frac{\theta}{3} h_{\mu\varepsilon} \right) \\
&\quad \left. + \dot{\eta} \left(\frac{\theta}{3} h_{\mu\nu} \right) + \eta \theta \left(\frac{\theta}{3} h_{\mu\nu} \right) + \eta \left(\frac{\theta}{3} h_{\mu\nu} \right)_{;\varepsilon} v^{\varepsilon} + \Sigma_{;\nu;\mu} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \eta_{;\nu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\mu} + \theta \eta_{;\nu} v_{\mu} + \frac{1}{3} \eta_{;\varepsilon} \theta (\delta^{\varepsilon}_{\nu} - v^{\varepsilon} v_{\nu}) v_{\mu} \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} \eta [\theta_{;\varepsilon} h^{\varepsilon}_{\nu} + \theta (-v^{\varepsilon} v_{\nu})_{;\varepsilon}] v_{\mu} + \frac{1}{9} \eta \theta^2 h_{\mu\varepsilon} h^{\varepsilon}_{\nu} \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \dot{\eta} \theta h_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \eta \theta^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \eta [\theta_{;\varepsilon} h_{\mu\nu} + \theta (-v_{\mu} v_{\nu})_{;\varepsilon}] v^{\varepsilon} + \Sigma_{;\nu;\mu} \right\}. \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

Decorrem as relações:

$$h_{\mu\varepsilon} h^{\varepsilon}_{\nu} = (g_{\mu\varepsilon} - v_{\mu} v_{\varepsilon}) (\delta^{\varepsilon}_{\nu} - v^{\varepsilon} v_{\nu}) = g_{\mu\nu} - v_{\mu} v_{\nu} = h_{\mu\nu}. \quad (\text{A.16})$$

$$(v^{\varepsilon} v_{\nu})_{;\varepsilon} v_{\mu} = v^{\varepsilon}_{;\varepsilon} v_{\nu} v_{\mu} + v^{\varepsilon} v_{\nu;\varepsilon} v_{\mu} = \theta v_{\mu} v_{\nu} + \dot{v}_{\nu} v_{\mu} = \theta v_{\mu} v_{\nu}. \quad (\text{A.17})$$

$$(v_{\mu} v_{\nu})_{;\varepsilon} v^{\varepsilon} = v_{\mu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\nu} + v_{\mu} v_{\nu;\varepsilon} v^{\varepsilon} = \dot{v}_{\mu} v_{\nu} + v_{\mu} \dot{v}_{\nu} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \langle \Phi^{\varepsilon}_{\mu;\nu;\varepsilon} \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \eta_{;\nu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\mu} + \theta \eta_{;\nu} v_{\mu} + \frac{1}{3} \theta \eta_{;\nu} v_{\mu} - \frac{1}{3} \dot{\eta} \theta v_{\mu} v_{\nu} \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} \eta \theta_{;\nu} v_{\mu} - \frac{1}{3} \eta \dot{\theta} v_{\mu} v_{\nu} - \frac{1}{3} \eta \theta^2 v_{\mu} v_{\nu} + \frac{1}{9} \eta \theta^2 h_{\mu\nu} \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \dot{\eta} \theta h_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \eta \theta^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \eta \dot{\theta} h_{\mu\nu} + \Sigma_{;\nu;\mu} \right\}. \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

O termo simétrico, por sua vez, é escrito

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \langle \Phi^{\varepsilon}_{v;\mu;\varepsilon} \rangle &= \frac{1}{2} (\eta v^{\varepsilon} v_v + \Sigma \delta^{\varepsilon}_v)_{;\mu;\varepsilon} \\
&= \frac{1}{2} (\eta_{;\mu} v^{\varepsilon} v_v + \eta v^{\varepsilon}_{;\mu} v_v + \eta v^{\varepsilon} v_{v;\mu} + \Sigma_{;\mu} \delta^{\varepsilon}_v)_{;\varepsilon} \\
&= \frac{1}{2} (\eta_{;\mu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_v + \eta_{;\mu} v^{\varepsilon}_{;\varepsilon} v_v + \eta_{;\mu} v^{\varepsilon} v_{v;\varepsilon} \\
&\quad + \eta_{;\varepsilon} v^{\varepsilon}_{;\mu} v_v + \eta v^{\varepsilon}_{;\mu;\varepsilon} v_v + \eta v^{\varepsilon}_{;\mu} v_{v;\varepsilon} \\
&\quad + \eta_{;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{v;\mu} + \eta v^{\varepsilon}_{;\varepsilon} v_{v;\mu} + \eta v^{\varepsilon} v_{v;\mu;\varepsilon} + \Sigma_{;\mu;\varepsilon}) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \eta_{;\mu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_v + \theta \eta_{;\mu} v_v + \eta_{;\mu} \dot{v}_v \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} \theta \eta_{;\varepsilon} h^{\varepsilon}_{\mu} v_v + \frac{1}{3} \eta (\theta h^{\varepsilon}_{\mu})_{;\varepsilon} v_v + \frac{1}{9} \eta \theta^2 h_{\mu\nu} \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \dot{\eta} \theta h_{v\mu} + \frac{1}{3} \eta \theta^2 h_{v\mu} + \frac{1}{3} \eta (\theta h_{v\mu})_{;\varepsilon} v^{\varepsilon} + \Sigma_{;\mu;\varepsilon} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \eta_{;\mu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_v + \eta_{;\mu} v_v \theta + \frac{1}{3} \eta_{;\mu} v_v \theta - \frac{1}{3} \dot{\eta} \theta v_{\mu} v_v \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} \eta \theta_{;\mu} v_v - \frac{1}{3} \eta \dot{\theta} v_{\mu} v_v - \frac{1}{3} \eta \theta^2 v_{\mu} v_v + \frac{1}{9} \eta \theta^2 h_{\mu\nu} \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \dot{\eta} \theta h_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \eta \theta^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \eta \dot{\theta} h_{\mu\nu} + \Sigma_{;\mu;\varepsilon} \right\}. \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Coletando as relações (A.19) e (A.20), segue-se o termo simetrizado:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \langle \Phi^{\varepsilon}_{(\mu;\nu);\varepsilon} \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \eta_{;\nu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\mu} + \eta_{;\mu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\nu} + \frac{4}{3} \eta_{;(\mu} v_{\nu)} \theta - \frac{2}{3} \dot{\eta} \theta v_{\mu} v_{\nu} \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} \eta \theta_{;(\mu} v_{\nu)} - \frac{2}{3} \eta \dot{\theta} v_{\mu} v_{\nu} - \frac{2}{3} \eta \theta^2 v_{\mu} v_{\nu} + \frac{2}{9} \eta \theta^2 h_{\mu\nu} \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \dot{\eta} \theta h_{\mu\nu} + \frac{2}{3} \eta \theta^2 h_{\mu\nu} + \frac{2}{3} \eta \dot{\theta} h_{\mu\nu} + \Sigma_{;(\mu;\nu)} \right\}. \tag{A.21}
\end{aligned}$$

Na representação de fluido perfeito,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \langle \Phi^{\varepsilon}_{(\mu;\nu);\varepsilon} \rangle &= \left(-\frac{2}{3} \dot{\eta} \theta - \frac{2}{3} \eta \dot{\theta} - \frac{7}{9} \eta \theta^2 \right) v_{\mu} v_{\nu} + \left(\frac{1}{3} \dot{\eta} \theta + \frac{1}{3} \eta \dot{\theta} + \frac{4}{9} \eta \theta^2 \right) g_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2} \eta_{;\nu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\mu} + \frac{1}{2} \eta_{;\mu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\nu} + \frac{2}{3} \eta_{;(\mu} v_{\nu)} \theta + \frac{1}{6} \eta \theta_{;(\mu} v_{\nu)} + \frac{1}{2} \Sigma_{;(\mu;\nu)}. \tag{A.22}
\end{aligned}$$

No cenário magnético,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \langle \Phi^{\varepsilon}_{(\mu;\nu);\varepsilon} \rangle &= \left[-\frac{4}{9} (\sigma^2 + 1) \dot{X} \theta - \frac{4}{9} (\sigma^2 + 1) X \dot{\theta} - \frac{14}{27} (\sigma^2 + 1) X \theta^2 \right] v_{\mu} v_{\nu} \\
&\quad + \left[\frac{2}{9} (\sigma^2 + 1) \dot{X} \theta + \frac{2}{9} (\sigma^2 + 1) X \dot{\theta} + \frac{8}{27} (\sigma^2 + 1) X \theta^2 \right] g_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{3} (\sigma^2 + 1) X_{;\nu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\mu} + \frac{1}{3} (\sigma^2 + 1) X_{;\mu;\varepsilon} v^{\varepsilon} v_{\nu} \\
&\quad + \frac{4}{9} (\sigma^2 + 1) X_{;(\mu} v_{\nu)} \theta + \frac{1}{9} (\sigma^2 + 1) X \theta_{;(\mu} v_{\nu)} + \frac{1}{6} (\sigma^2 - 2) X_{;(\mu;\nu)}. \tag{A.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\langle\Phi^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho}\rangle &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\eta v^\rho v^\sigma + \Sigma g^{\rho\sigma})_{;\rho;\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\eta_{;\sigma}v^\rho v^\sigma + \eta v^\rho{}_{;\sigma}v^\sigma + \eta v^\rho v^\sigma{}_{;\sigma} + \Sigma_{;\sigma}g^{\rho\sigma})_{;\rho} \\
&= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\dot{\eta}v^\rho + \eta\dot{v}^\rho + \eta v^\rho\theta + \Sigma^{;\rho})_{;\rho} \\
&= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\dot{\eta}_{;\rho}v^\rho + \dot{\eta}v^\rho{}_{;\rho} + \eta_{;\rho}v^\rho\theta + \eta v^\rho{}_{;\rho}\theta + \eta v^\rho\theta_{;\rho} + \Sigma^{;\rho}{}_{;\rho}) \\
&= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\ddot{\eta} + \dot{\eta}\theta + \eta\dot{\theta} + \eta\theta^2 + \eta\dot{\theta} + \square\Sigma) \\
&= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\ddot{\eta} + 2\dot{\eta}\theta + \eta\theta^2 + \eta\dot{\theta} + \square\Sigma). \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Além disso,

$$-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\square F = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\square(-2\chi) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square\chi. \tag{A.25}$$

A soma dos termos retorna

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\langle\Phi^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho}\rangle + \frac{1}{2}\square F] = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\ddot{\eta} + 2\dot{\eta}\theta + \eta\theta^2 + \eta\dot{\theta} + \square\Sigma - \square\chi). \tag{A.26}$$

No cenário magnético,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\langle\Phi^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho}\rangle + \frac{1}{2}\square F] &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left\{\frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{4}{3}(\sigma^2 + 1)\dot{X}\theta + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)X\theta^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)X\dot{\theta} + \frac{1}{3}(\sigma^2 - 2)[\ddot{X} + \theta\dot{X}] \right. \\
&\quad \left. - (\sigma^2 - 1)[\ddot{X} + \theta\dot{X}]\right\}. \tag{A.27}
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\langle\Phi^{\rho\sigma}{}_{;\sigma;\rho}\rangle + \frac{1}{2}\square F] = \left[-\frac{1}{2}\ddot{X} - \frac{1}{6}(2\sigma^2 + 5)\theta\dot{X} - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\theta^2 X - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\dot{\theta}X\right]g_{\mu\nu}. \tag{A.28}$$

* * *

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\langle\Box\Phi_{\mu\nu}\rangle &= -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\eta v_{\mu}v_{\nu} + \Sigma g_{\mu\nu})_{;\rho;\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\eta_{;\rho}v_{\mu}v_{\nu} + \eta v_{\mu;\rho}v_{\nu} + \eta v_{\mu}v_{\nu;\rho} + \Sigma_{;\rho}g_{\mu\nu})_{;\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\eta_{;\rho;\sigma}v_{\mu}v_{\nu} + \eta_{;\rho}v_{\mu;\sigma}v_{\nu} + \eta_{;\rho}v_{\mu}v_{\nu;\sigma} \\
&\quad + \eta_{;\sigma}v_{\mu;\rho}v_{\nu} + \eta v_{\mu;\rho;\sigma}v_{\nu} + \eta v_{\mu;\rho}v_{\nu;\sigma} \\
&\quad + \eta_{;\sigma}v_{\mu}v_{\nu;\rho} + \eta v_{\mu;\sigma}v_{\nu;\rho} + \eta v_{\mu}v_{\nu;\rho;\sigma} + \Sigma_{;\rho;\sigma}g_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left\{\eta_{;\rho;\sigma}v_{\mu}v_{\nu} + \frac{1}{3}\eta_{;\rho}\theta h_{\mu\sigma}v_{\nu} + \frac{1}{3}\eta_{;\rho}\theta h_{\nu\sigma}v_{\mu} \right. \\
&\quad + \frac{1}{3}\eta_{;\sigma}\theta h_{\mu\rho}v_{\nu} + \frac{1}{3}\eta[\theta_{;\sigma}h_{\mu\rho} + \theta(-v_{\mu}v_{\rho})_{;\sigma}]v_{\nu} + \frac{1}{9}\eta\theta^2 h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma} \\
&\quad \left. + \frac{1}{3}\eta_{;\sigma}\theta h_{\nu\rho}v_{\mu} + \frac{1}{9}\eta\theta^2 h_{\mu\sigma}h_{\nu\rho} + \frac{1}{3}\eta[\theta_{;\sigma}h_{\nu\rho} + \theta(-v_{\nu}v_{\rho})_{;\sigma}]v_{\mu} + \Sigma_{;\rho;\sigma}g_{\mu\nu}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\Box\eta v_{\mu}v_{\nu} + \Box\Sigma g_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta\eta_{;\mu}v_{\nu} - \frac{1}{3}\dot{\eta}\theta v_{\mu}v_{\nu} + \frac{1}{3}\eta_{;v}v_{\mu}\theta - \frac{1}{3}\dot{\eta}\theta v_{\mu}v_{\nu} \right. \\
&\quad + \frac{1}{3}\theta\eta_{;\mu}v_{\nu} - \frac{1}{3}\dot{\eta}\theta v_{\mu}v_{\nu} + \frac{1}{3}\eta\theta_{;\mu}v_{\nu} - \frac{1}{3}\eta\dot{\theta}v_{\mu}v_{\nu} - \frac{1}{3}\eta\theta^2 v_{\mu}v_{\nu} \\
&\quad \left. + \frac{2}{9}\eta\theta^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\eta_{;v}v_{\mu}\theta - \frac{1}{3}\dot{\eta}\theta v_{\mu}v_{\nu} + \frac{1}{3}\eta\theta_{;v}v_{\mu} - \frac{1}{3}\eta\dot{\theta}v_{\mu}v_{\nu} - \frac{1}{3}\eta\theta^2 v_{\mu}v_{\nu}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\Box\eta v_{\mu}v_{\nu} + \Box\Sigma g_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\theta\eta_{;(\mu}v_{\nu)} - \frac{4}{3}\dot{\eta}\theta v_{\mu}v_{\nu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3}\eta\theta_{;(\mu}v_{\nu)} - \frac{2}{3}\eta\theta^2 v_{\mu}v_{\nu} + \frac{2}{9}\eta\theta^2 h_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\eta\dot{\theta}v_{\mu}v_{\nu}\right\}. \tag{A.29}
\end{aligned}$$

Na representação de fluido perfeito,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\langle\Box\Phi_{\mu\nu}\rangle &= \left[-\frac{1}{2}\Box\eta + \frac{2}{3}\dot{\eta}\theta + \frac{4}{9}\eta\theta^2 + \frac{1}{3}\eta\dot{\theta}\right]v_{\mu}v_{\nu} + \left[-\frac{1}{2}\Box\Sigma - \frac{1}{9}\eta\theta^2\right]g_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{3}\eta_{;(\mu}v_{\nu)}\theta - \frac{1}{6}\eta\theta_{;(\mu}v_{\nu)}. \tag{A.30}
\end{aligned}$$

No cenário magnético,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\langle\Box\Phi_{\mu\nu}\rangle &= \left[-\frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{1}{9}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} + \frac{8}{27}(\sigma^2 + 1)\theta^2 X + \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\dot{\theta}X\right]v_{\mu}v_{\nu} \\
&\quad + \left[-\frac{1}{6}(\sigma^2 - 2)\ddot{X} - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 2)\theta\dot{X} - \frac{2}{27}(\sigma^2 + 1)\theta^2 X\right]g_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu}v_{\nu)}\theta - \frac{1}{9}(\sigma^2 + 1)X\theta_{;(\mu}v_{\nu)}. \tag{A.31}
\end{aligned}$$

Coletando os termos calculados, o valor médio de $Z_{\mu\nu}$ resulta

$$\begin{aligned} \langle Z_{\mu\nu} \rangle = & M g_{\mu\nu} + N v_\mu v_\nu + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;(\mu} v_{\nu)} v^\varepsilon + \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;(\mu} v_{\nu)} \\ & + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X R^\alpha_{(\mu} v_{\nu)} v_\alpha - \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\nu)} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)X R_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

com

$$M := -\frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} - \frac{5}{18}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} - \frac{1}{18}(5\sigma^2 - 1)X\dot{\theta} - \frac{2}{9}\sigma^2 X\theta^2, \quad (3.8)$$

$$N := -\frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)X\dot{\theta} - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)X\theta^2. \quad (3.9)$$

Apêndice B

CÁLCULO DOS PARÂMETROS ÓTICOS

Considere o valor médio de $Z_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \langle Z_{\mu\nu} \rangle &= M g_{\mu\nu} + N v_\mu v_\nu + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;(\mu} v_{\nu)} v^\varepsilon + \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;(\mu} v_{\nu)} \\ &\quad + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X R^\alpha_{(\mu} v_{\nu)} v_\alpha - \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\nu)} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)X R_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

com

$$M := -\frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} - \frac{5}{18}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} - \frac{1}{18}(5\sigma^2 - 1)X\dot{\theta} - \frac{2}{9}\sigma^2 X\theta^2, \quad (B.1)$$

$$N := -\frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)X\dot{\theta} - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)X\theta^2. \quad (B.2)$$

Calculam-se, a seguir, os parâmetros óticos definidos em termos de $\langle Z_{\mu\nu} \rangle$. Por simplicidade, escrevem-se as quantidades médias sem denotá-las por $\langle \ \rangle$.

Densidade de energia

$$\begin{aligned} \rho_z &:= Z_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \\ &= M + N + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;(\mu} v_{\nu)} v^\varepsilon v^\mu v^\nu + \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;(\mu} v_{\nu)} v^\mu v^\nu \\ &\quad + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X R^\alpha_{(\mu} v_{\nu)} v_\alpha v^\mu v^\nu - \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\nu)} v^\mu v^\nu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)X R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \\ &= M + N + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;\mu} v^\mu v^\varepsilon + \frac{4}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;\mu} v^\mu \\ &\quad + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)X R_{\alpha\mu} v^\alpha v^\mu - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\mu;\nu} v^\mu v^\nu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)X R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \end{aligned} \quad (B.3)$$

Na representação de fluido perfeito,

$$\begin{aligned}
\rho_z &= M + N + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{4}{9}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)XR_{00} \\
&\quad - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{00} \\
&= M + N + \frac{1}{2}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{4}{9}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} + \frac{1}{6}(5\sigma^2 + 1)X\left[\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3}\right] \\
&= \left[-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right](\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \left[-\frac{5}{18} - \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right](\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} \\
&\quad + \left[-\frac{5}{18}\sigma^2 - \frac{2}{9}\sigma^2 + \frac{5}{6}\sigma^2 + \frac{1}{18} - \frac{2}{9} + \frac{1}{6}\right]X\dot{\theta} + \left[-\frac{4}{9}\sigma^2 + \frac{5}{18}\sigma^2 - \frac{2}{9} + \frac{1}{18}\right]X\theta^2 \\
&= -\frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} + \frac{1}{3}\sigma^2 X\dot{\theta} - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X\theta^2.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Pressão isotrópica

$$\begin{aligned}
p_z &:= -\frac{1}{3}Z_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{3}\left[3M - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\mu;\nu}h^{\mu\nu} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\nu}h^{\mu\nu}\right] \\
&= -\frac{1}{3}\left[3M - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\square X + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\mu;\nu}v^\mu v^\nu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\nu}v^\mu v^\nu\right] \\
&= -M + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\square X - \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)X_{;\mu;\nu}v^\mu v^\nu - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR \\
&\quad + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\nu}v^\mu v^\nu.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Na representação de fluido perfeito,

$$\begin{aligned}
p_z &= -M + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)[\ddot{X} + \theta\dot{X}] - \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)X\left[2\dot{\theta} + \frac{4}{3}\theta^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)X\left[\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3}\right] \\
&= -M + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)X\dot{\theta} - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)X\theta^2 \\
&= \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{6}{18}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} + \frac{2}{18}(2\sigma^2 + 1)X\dot{\theta} + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X\theta^2 \\
&= \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\ddot{X} + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)\theta\dot{X} + \frac{1}{9}(2\sigma^2 + 1)X\dot{\theta} + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X\theta^2.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Fluxo de calor

$$q_\lambda^{(z)} := Z_{\alpha\beta} v^\beta h^\alpha{}_\lambda = Z_{\lambda\beta} v^\beta - Z_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta v_\lambda. \quad (\text{B.7})$$

Abre-se cada termo:

$$\begin{aligned} \bullet Z_{\lambda\beta} v^\beta &= (M+N)v_\lambda + \frac{1}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;(\lambda} v_{\beta)} v^\varepsilon v^\beta + \frac{2}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;(\lambda} v_{\beta)} v^\beta \\ &\quad + \frac{1}{3}(\sigma^2+1)XR^\varepsilon{}_{(\lambda} v_{\beta)} v_\varepsilon v^\beta - \frac{1}{12}(\sigma^2+1)X_{;(\lambda;\beta)} v^\beta + \frac{1}{6}(\sigma^2-3)XR_{\lambda\beta} v^\beta \\ &= (M+N)v_\lambda + \frac{1}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;\lambda} v^\varepsilon + \frac{1}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\lambda \\ &\quad + \frac{2}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;\lambda} + \frac{2}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;\beta} v^\beta v_\lambda \\ &\quad + \frac{1}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon\lambda} v^\varepsilon + \frac{1}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\lambda \\ &\quad - \frac{1}{12}(\sigma^2+1)X_{;(\lambda;\beta)} v^\beta + \frac{1}{6}(\sigma^2-3)XR_{\lambda\beta} v^\beta. \\ \bullet -Z_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta v_\lambda &= -(M+N)v_\lambda - \frac{2}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\lambda - \frac{4}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;\beta} v^\beta v_\lambda \\ &\quad - \frac{2}{3}(\sigma^2+1)XR^\varepsilon{}_{\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\lambda + \frac{1}{6}(\sigma^2+1)X_{;\alpha;\beta} v^\alpha v^\beta v_\lambda \\ &\quad - \frac{1}{6}(\sigma^2-3)XR_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta v_\lambda. \end{aligned}$$

A expressão de $q_\lambda^{(z)}$ resulta

$$\begin{aligned} q_\lambda^{(z)} &= +\frac{1}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;\lambda} v^\varepsilon - \frac{1}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\lambda \\ &\quad + \frac{2}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;\lambda} - \frac{2}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;\beta} v^\beta v_\lambda \\ &\quad + \frac{1}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon\lambda} v^\varepsilon - \frac{1}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\lambda \\ &\quad - \frac{1}{12}(\sigma^2+1)X_{;(\lambda;\beta)} v^\beta + \frac{1}{6}(\sigma^2+1)X_{;\alpha;\beta} v^\beta v^\alpha v_\lambda \\ &\quad + \frac{1}{6}(\sigma^2-3)XR_{\lambda\beta} v^\beta - \frac{1}{6}(\sigma^2-3)XR_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta v_\lambda. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Note que $q_\lambda^{(z)}$ deve satisfazer ao vínculo

$$q_\lambda^{(z)} v^\lambda = 0. \quad (\text{B.9})$$

De fato,

$$\begin{aligned}
q_\lambda^{(z)} v^\lambda &= +\frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;\lambda} v^\lambda v^\varepsilon - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;\beta} v^\beta v^\varepsilon \\
&\quad + \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;\lambda} v^\lambda - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;\beta} v^\beta \\
&\quad + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)XR_{\varepsilon\lambda} v^\lambda v^\varepsilon - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)XR_{\varepsilon\beta} v^\beta v^\varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\lambda;\beta} v^\beta v^\lambda + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\beta} v^\beta v^\alpha \\
&\quad + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\lambda\beta} v^\beta v^\lambda - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

* * *

Pressão anisotrópica

$$\begin{aligned}
\pi_{\mu\nu}^{(z)} &:= Z_{\alpha\beta} h^\alpha_\mu h^\beta_\nu + p_z h_{\mu\nu} \\
&= Z_{\mu\nu} + Z_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta v_\mu v_\nu - Z_{\mu\beta} v^\beta v_\nu - Z_{\alpha\nu} v^\alpha v_\mu + p_z h_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Escreve-se termo a termo:

- $Z_{\mu\nu} = Mg_{\mu\nu} + Nv_\mu v_\nu + \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;(\mu} v_\nu) v^\varepsilon + \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;(\mu} v_\nu)$
 $+ \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)XR^\alpha_{(\mu} v_\nu) v_\alpha - \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\nu)} + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\nu}.$
- $Z_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta v_\mu v_\nu = +(M + N)v_\mu v_\nu + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;\alpha} v^\alpha v^\varepsilon v_\mu v_\nu$
 $+ \frac{4}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;\alpha} v^\alpha v_\mu v_\nu + \frac{2}{3}(\sigma^2 + 1)XR_{\varepsilon\alpha} v^\alpha v^\varepsilon v_\mu v_\nu$
 $- \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\beta} v^\alpha v^\beta v_\mu v_\nu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\beta} v^\beta v^\alpha v_\mu v_\nu$
- $-Z_{\mu\beta} v^\beta v_\nu = -(M + N)v_\mu v_\nu - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;\mu} v_\nu v^\varepsilon - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)X_{;\varepsilon;\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\mu v_\nu$
 $- \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;;\mu} v_\nu - \frac{2}{9}(\sigma^2 + 1)\theta X_{;\beta} v^\beta v_\mu v_\nu$
 $- \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)XR_{\varepsilon\mu} v_\nu v^\varepsilon - \frac{1}{3}(\sigma^2 + 1)XR_{\varepsilon\beta} v^\beta v^\varepsilon v_\mu v_\nu$
 $+ \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\beta)} v^\beta v_\nu - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\beta} v^\beta v_\nu$

- $-Z_{\alpha\nu}v^\alpha v_\mu = -(M+N)v_\mu v_\nu - \frac{1}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;\alpha}v^\alpha v^\varepsilon v_\mu v_\nu - \frac{1}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;\nu}v_\mu v^\varepsilon$
 $- \frac{2}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;\alpha}v^\alpha v_\mu v_\nu - \frac{2}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;\nu}v_\mu$
 $- \frac{1}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon\alpha}v^\alpha v^\varepsilon v_\mu v_\nu - \frac{1}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon\nu}v_\mu v^\varepsilon$
 $+ \frac{1}{12}(\sigma^2+1)X_{;(\alpha;\nu)}v^\alpha v_\mu - \frac{1}{6}(\sigma^2-3)XR_{\alpha\nu}v^\alpha v_\mu$
- $p_z h_{\mu\nu} = -Mh_{\mu\nu} + \frac{1}{18}(\sigma^2+1)\square X h_{\mu\nu} - \frac{1}{18}(\sigma^2+1)X_{;\rho;\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu}$
 $- \frac{1}{18}(\sigma^2-3)XRh_{\mu\nu} + \frac{1}{18}(\sigma^2-3)XR_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu}.$

Coletando os termos,

$$\begin{aligned}
\pi_{\mu\nu}^{(z)} = & + \frac{1}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;(\mu}v_\nu)v^\varepsilon + \frac{2}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;(\mu}v_\nu) \\
& + \frac{1}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon(\mu}v_\nu)v^\varepsilon - \frac{1}{12}(\sigma^2+1)X_{;(\mu;\nu)} + \frac{1}{6}(\sigma^2-3)XR_{\mu\nu} \\
& + \frac{2}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;\alpha}v^\alpha v^\varepsilon v_\mu v_\nu + \frac{4}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;\alpha}v^\alpha v_\mu v_\nu \\
& + \frac{2}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon\alpha}v^\alpha v^\varepsilon v_\mu v_\nu - \frac{1}{6}(\sigma^2+1)X_{;\alpha;\beta}v^\beta v^\alpha v_\mu v_\nu \\
& + \frac{1}{6}(\sigma^2-3)XR_{\alpha\beta}v^\beta v^\alpha v_\mu v_\nu - \frac{1}{6}(\sigma^2-3)XR_{\alpha(\mu}v_\nu)v^\alpha \\
& - \frac{1}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;(\mu}v_\nu)v^\varepsilon - \frac{2}{3}(\sigma^2+1)X_{;\varepsilon;\alpha}v^\alpha v^\varepsilon v_\mu v_\nu \\
& - \frac{2}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;(\mu}v_\nu) - \frac{4}{9}(\sigma^2+1)\theta X_{;\alpha}v^\alpha v_\mu v_\nu \\
& - \frac{1}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon(\mu}v_\nu)v^\varepsilon - \frac{2}{3}(\sigma^2+1)XR_{\varepsilon\alpha}v^\alpha v^\varepsilon v_\mu v_\nu \\
& + \frac{1}{12}(\sigma^2+1)X_{;(\mu;\beta)}v^\beta v_\nu + \frac{1}{12}(\sigma^2+1)X_{;(\alpha;\nu)}v^\alpha v_\mu \\
& + \frac{1}{18}(\sigma^2+1)\square X h_{\mu\nu} - \frac{1}{18}(\sigma^2+1)X_{;\rho;\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu} \\
& - \frac{1}{18}(\sigma^2-3)XRh_{\mu\nu} + \frac{1}{18}(\sigma^2-3)XR_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Resta a expressão geral de $\pi_{\mu\nu}^{(z)}$,

$$\begin{aligned}
\pi_{\mu\nu}^{(z)} = & -\frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\nu)} - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\beta}v^\beta v^\alpha v_\mu v_\nu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\beta}v^\beta v^\alpha v_\mu v_\nu - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha(\mu}v_\nu)v^\alpha \\
& + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\beta)}v^\beta v_\nu + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\alpha;\nu)}v^\alpha v_\mu \\
& + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\square X h_{\mu\nu} - \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)X_{;\rho;\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu} \\
& - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR h_{\mu\nu} + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Note que $\pi_{\mu\nu}^{(z)}$ deve satisfazer aos vínculos:

$$(i.) \quad g^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu}^{(z)} = 0, \tag{B.14}$$

$$(ii.) \quad v^\mu\pi_{\mu\nu}^{(z)} = 0, \tag{B.15}$$

$$(iii.) \quad \pi_{\mu\nu}^{(z)} = \pi_{\nu\mu}^{(z)}. \tag{B.16}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(i.) \quad g^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu}^{(z)} = & -\frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\square X - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\beta}v^\beta v^\alpha + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR \\
& + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\beta}v^\beta v^\alpha - \frac{2}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\mu}v^\mu v^\alpha \\
& + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\mu;\beta}v^\beta v^\mu + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\nu}v^\alpha v^\nu \\
& + \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)\square X - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\rho;\sigma}v^\rho v^\sigma \\
& - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma \\
= & 0.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
(ii.) \quad v^\mu\pi_{\mu\nu}^{(z)} = & -\frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\nu)}v^\mu - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\beta}v^\beta v^\alpha \\
& + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\nu}v^\mu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\beta}v^\beta v^\alpha \\
& - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha(\mu}v_\nu)v^\alpha v^\mu \\
& + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\beta)}v^\beta v^\mu v_\nu + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\alpha;\nu)}v^\alpha \\
= & 0.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
(iii.) \quad \pi_{\mu\nu}^{(z)} &= -\frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\nu)} - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\beta}v^\beta v^\alpha v_\mu v_\nu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\beta}v^\beta v^\alpha v_\mu v_\nu - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha(\mu}v_{\nu)}v^\alpha \\
&\quad + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\mu;\beta)}v^\beta v_\nu + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\alpha;\nu)}v^\alpha v_\mu \\
&\quad + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\square X h_{\mu\nu} - \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)X_{;\rho;\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR h_{\mu\nu} + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(v;\mu)} - \frac{1}{6}(\sigma^2 + 1)X_{;\alpha;\beta}v^\beta v^\alpha v_\nu v_\mu + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\nu\mu} \\
&\quad + \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha\beta}v^\beta v^\alpha v_\nu v_\mu - \frac{1}{6}(\sigma^2 - 3)XR_{\alpha(\nu}v_{\mu)}v^\alpha \\
&\quad + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(v;\beta)}v^\beta v_\mu + \frac{1}{12}(\sigma^2 + 1)X_{;(\alpha;\mu)}v^\alpha v_\nu \\
&\quad + \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)\square X h_{\nu\mu} - \frac{1}{18}(\sigma^2 + 1)X_{;\rho;\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\nu\mu} \\
&\quad - \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR h_{\nu\mu} + \frac{1}{18}(\sigma^2 - 3)XR_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma h_{\nu\mu} \\
&= \pi_{\nu\mu}^{(z)}.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

~ * * * ~

Interações Não-mínimas da Gravitação com o Eletromagnetismo

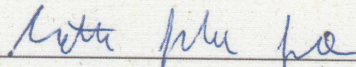
Angelo Eduardo da Silva Hartmann

Orientador:

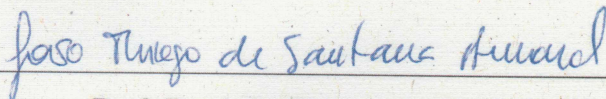
Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física no Curso de Mestrado em Física, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

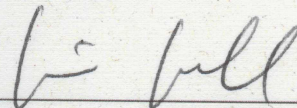
Aprovada por:



Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo



Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral



Prof. Dr. Mario Novello

Rio Grande
Setembro de 2019