Coleção Cadernos Pedagógicos da EaD

Formação Continuada de Matemática: pressupostos teóricos, metodológicos e práticas de ensino

Volume 25

Ezequiel Gibbon Gautério (Org.)

Antônio Maurício Medeiros Alves, Catia Maria dos Santos Machado,
Celiane Costa Machado, Daiane Silva de Freitas, Darci Luiz Savicki,
Denise de Sena Pinho, Elaine Corrêa Pereira, Fabíola Aiub Sperotto,
Narjara Mendes Garcia
Autores

Formação continuada de Matemática: pressupostos teóricos, metodológicos e práticas de ensino

Ezequiel Gibbon Gautério (Org.)

Coleção Cadernos Pedagógicos da EaD
Volume 25

Antônio Maurício Medeiros Alves, Catia Maria dos Santos Machado,
Celiane Costa Machado, Daiane Silva de Freitas, Darci Luiz Savicki,
Denise de Sena Pinho, Elaine Corrêa Pereira, Fabíola Aiub Sperotto,
Narjara Mendes Garcia
Autores

Formação continuada de Matemática: pressupostos teóricos, metodológicos e práticas de ensino

Editora da furg

Rio Grande
2014

Núcleo de Revisão Linguística
Responsável: Gleice Meri Cunha Cupertino e Ingrid Cunha Ferreira
Revisores: Rita de Lima Nóbrega, Gleice Meri Cunha Cupertino, Micaeli Nunes Soares, Ingrid Cunha Ferreira, Eliane Azevedo e Luís Eugênio Vieira Oliveira.

Núcleo de Design e Diagramação
Responsáveis: Lidiane Fonseca Dutra e Zélia de Fátima Seibt do Couto
Capa: Lidiane Dutra, sobre a obra "Waterfall", de M. C. Escher, litografia, 1961, 38 x 30 cm.
Diagramação: Bruna Heller

F724 Formação continuada de Matemática: pressupostos teóricos, metodológicos e práticas de ensino / Ezequiel Gibbon Gautério…[Org.]; Antônio Maurício Medeiros Alves…[*et al.*], autores. – Rio Grande: Ed. da FURG, 2014.
119 p.

(Coleção Cadernos Pedagógicos da EaD ; vol. 25, ISBN da série: 978-85-7566-230-4).

ISBN: 978-85-7566-349-3.

1. Educação. 2. Matemática. 3. Formação continuada. I. Gautério, Ezequiel Gibbon. II. Alves, Maurício Medeiros. IV. Série.

CDU 37+51

Catalogação na fonte: Clériston Ribeiro Ramos (CRB10/1889)

SUMÁRIO

Apresentação

Este volume é resultado das atividades realizadas nas disciplinas do curso de Especialização para Professores de Matemática (Pós-Mat), que está em sua 2ª oferta. Ressalta-se que o Pós-Mat tem por objetivo oportunizar uma formação continuada aos docentes de Matemática que estão em exercício bem como aos recém-graduados em cursos de Licenciatura em Matemática.

A presente formação consiste, basicamente, em atualizar conhecimentos, utilizando as tecnologias de informação e comunicação; ampliar o embasamento teórico em Matemática, de modo a identificar e ampliar as novas tecnologias de ensino e pesquisa; e discutir conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio, para que sejam planejadas alternativas metodológicas de ensino que estimulem o raciocínio matemático pela habilidade de resolver problemas contextualizados. Estas possibilidades de formação foram trabalhadas ao longo de cada disciplina do curso, as quais se desenvolveram em 4 módulos.

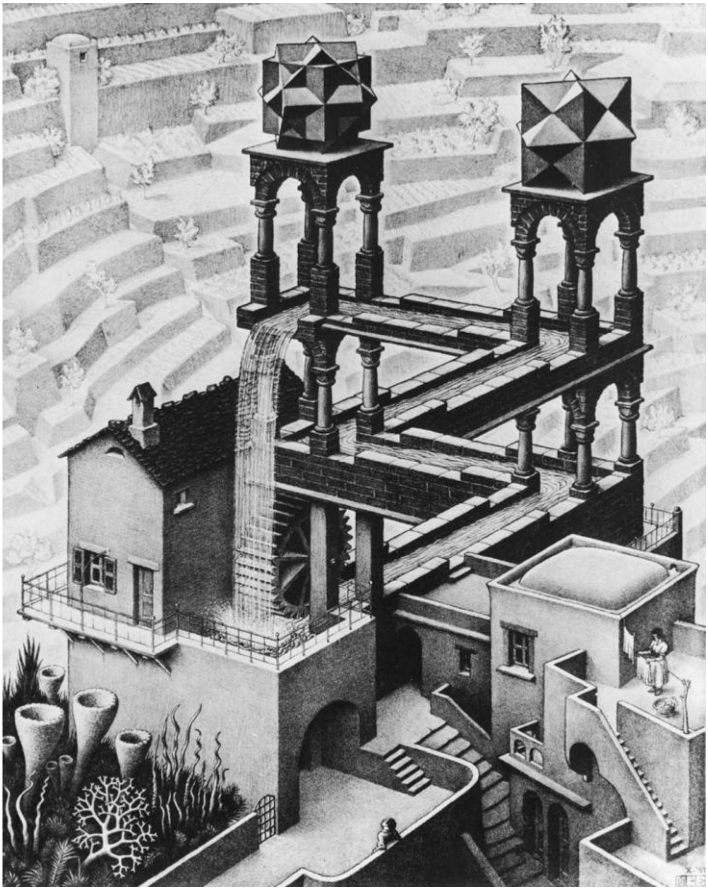
Esta edição apresenta uma síntese das disciplinas ministradas nos módulos 1 e 2, subdivididas em 4 capítulos. O capítulo 1 explora os conceitos e as atividades da disciplina de “Tecnologias Digitais para o Ensino de Matemática”, em que foram utilizados os softwares e as mídias digitais fundamentais para um curso de EaD bem como os recursos computacionais específicos para o ensino de Matemática. As ferramentas e atividades descritas ao longo do capítulo auxiliam o estudante em EaD a avançar na aprendizagem ao longo do curso, seja de matemática ou de qualquer área do conhecimento.

No capítulo 2, destacam-se tópicos referentes a diálogos estabelecidos na disciplina “Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática”. Este trecho do caderno tem por finalidade possibilitar que acadêmicos tenham uma aproximação a referenciais sobre pesquisa em Educação Matemática, de modo a identificarem suas funções sociais e implicações estruturais através do saber-pensar a prática educativa e sua relação dialógica com os saberes da experiência no ensino escolar e em conhecimentos matemáticos.

O capítulo 3 se desenvolve por meio dos conceitos das disciplinas de “Fundamentos de Álgebra” e “Métodos de Contagem e Estatística”, em que foi possível relacionar as teorias de álgebra linear com os métodos e procedimentos estatísticos aplicados ao cotidiano. Os estudantes são capazes de entender o desenvolvimento de algumas demonstrações e relacionar os resultados com a prática em sala de aula.

Finalmente, o capítulo 4 apresenta uma descrição de atividades práticas para o ensino de geometria, com a utilização do software Geogebra, relacionando conceitos teóricos com a visualização geométrica. O leitor encontrará sugestões de atividades a serem realizadas em sala de aula.

Este livro foi produzido com a intenção de ser um subsídio de apoio à formação continuada de professores de matemática. Espera-se que a leitura desta edição seja um (re)construir de seus saberes profissionais, repensar no ensino da matemática e alicerce para atualização de seus conhecimentos.



Capítulo 1:
Tecnologias Digitais para o Ensino de Matemática

TECNOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA – PARTE I

Antônio Maurício Medeiros Alves
Darci Luiz Savicki

Essa disciplina tem por objetivo propiciar a aquisição de habilidades básicas para a utilização dos recursos da informática, inerentes à "sociedade da informação", a fim de executar, com bom desempenho, as atividades de ensino e aprendizagem das disciplinas do curso de Especialização para Professores de Matemática.

A disciplina está estruturada para ser desenvolvida em duas partes, divididas por tópicos: "**Parte I** – tópicos 1, 2 e 3; e **Parte II** – tópicos 4, 5 e 6".

1. Ambiente Moodle;
2. EaD;
3. Editor de textos;
4. Uso da internet;
5. Planilha Eletrônica;
6. Editor de apresentações.

1. Ambiente Moodle

O Moodle é um sistema de gerenciamento de cursos, com uma estrutura pedagógica baseada na ideia de que pessoas aprendem melhor quando engajadas em um processo de construção do conhecimento, sendo a aprendizagem a tarefa central.

1.1 Introdução

Textos 1.1 e 1.2 elaborados por Tales Luiz Popiolek e atualizado por Antonio Maurício Medeiros Alves

A Universidade Federal do Rio Grande – FURG tem continuamente incentivado a comunidade acadêmica no sentido de criar novos cursos de graduação e pós-graduação, com o objetivo de atender aos anseios da comunidade e levar o saber formador de profissionais qualificados nas mais diversas áreas do conhecimento.

Atualmente, na FURG, liderados por uma equipe de docentes, têm sido criados e gerenciados novos cursos de graduação e pós-graduação, ministrados a distância. Um curso a distância é uma modalidade de ensino e aprendizagem que está fortemente incentivado e bem aceito pela comunidade, principalmente pelo fato de a Universidade chegar, virtualmente, até o ambiente do aluno e vice-versa.

Para implementar, desenvolver, acompanhar e gerenciar os cursos a distância com eficiência nos aspectos de ensino e aprendizagem, a FURG tem adotado um programa de domínio público, denominado de Moodle.

O Moodle (*Modular Object Oriented Distance LEarning*) é uma plataforma de desenvolvimento e gerenciamento de Ambientes Virtuais de Aprendizagem, utilizado para criar cursos a distância e/ou apoiar cursos presenciais.

O objetivo deste texto é apresentar as principais informações para proporcionar a utilização do Moodle como um Ambiente Virtual de Aprendizagem.

1.2 Acesso ao Moodle

Para acessar a plataforma Moodle, Ambiente Virtual de Aprendizagem, basta abrir o navegador da internet e digitar o endereço de acesso <http://www.uab.furg.br>, ver Figura 1.

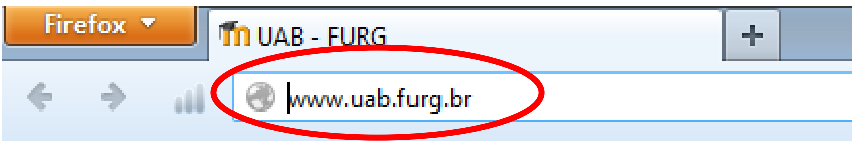


Figura 1 – Acesso à plataforma Moodle, Ambiente Virtual de Aprendizagem

Na Figura 2, é mostrada a janela principal de acesso ao Ambiente Virtual de Aprendizagem do Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB, da Universidade Federal do Rio Grande – FURG.

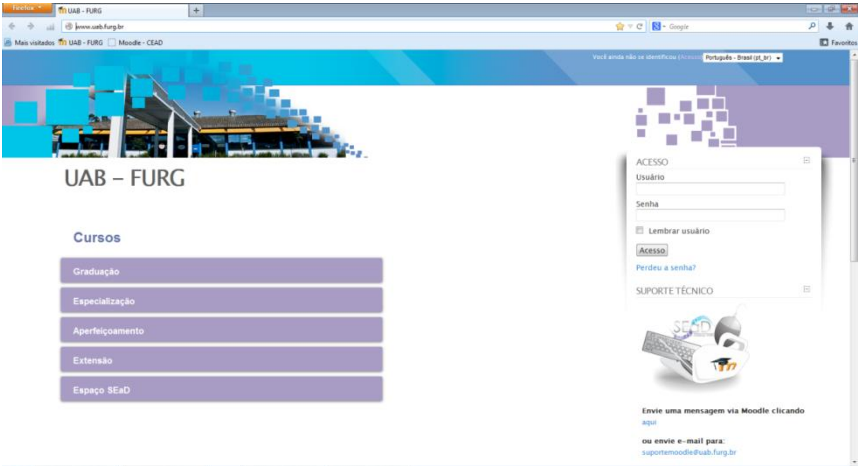


Figura 2 – Janela principal de acesso ao Ambiente Virtual de Aprendizagem

Nos cursos a distância, os alunos matriculados são cadastrados na plataforma, onde cada um receberá um nome de usuário e uma senha de acesso ao Ambiente Virtual de Aprendizagem. Para entrar efetivamente no Ambiente, o aluno deve identificar-se, preenchendo os dados da caixa de Acesso do usuário (mostrada na Figura 3) e, em seguida, clicar no botão “Acesso” ou acionar a tecla “Enter”.

Na janela principal, são apresentados vários cursos. No entanto, o aluno somente tem acesso ao curso em que foi cadastrado (matriculado). Sendo assim, no nosso caso, o aluno deve escolher o curso **Especialização para Professores de Matemática** e o **Módulo I**, clicando nestes. Então, uma nova janela será apresentada e o aluno deverá clicar na disciplina que deseja, por exemplo, **Tecnologias Digitais para o Ensino de Matemática** (ver Figura 4).

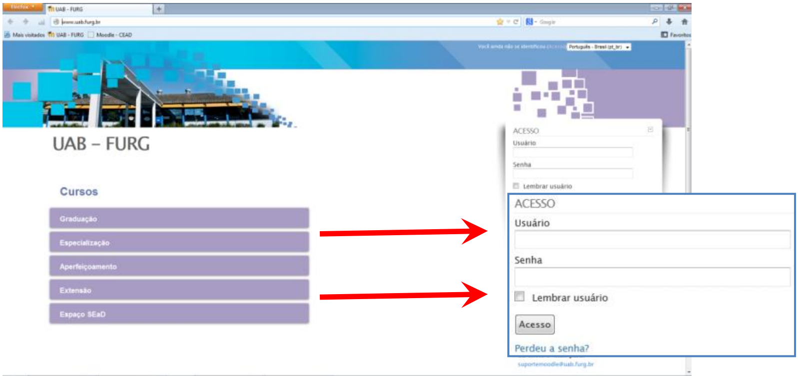


Figura 3 – Acesso ao Ambiente Virtual de Aprendizagem

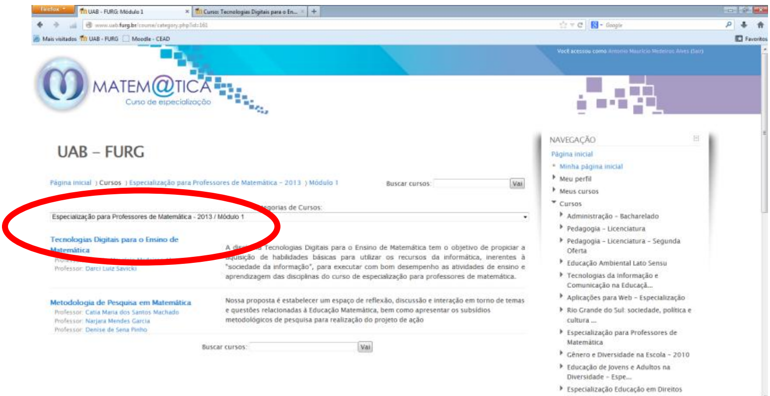


Figura 4 – Acesso a uma disciplina

Selecionando a disciplina **Tecnologias Digitais para o Ensino de Matemática**, uma nova janela será apresentada, conforme se evidencia na Figura 5.

Figura 5 – Janela principal de desenvolvimento de uma disciplina

Como pode ser observado na coluna central da Figura 5, no **Box Principal** ou na **Programação**, tem-se o logo e o nome do curso, o nome da disciplina e uma pequena saudação aos alunos. Logo após, são apresentados aspectos específicos e gerais do desenvolvimento da disciplina, do acompanhamento dos professores, dos tutores e dos alunos.

Em seguida, é apresentado um fórum: **Fórum de Notícias**. O fórum de notícias é um espaço destinado para publicar avisos aos alunos, aos tutores e aos polos, bem como outras informações importantes postadas ao longo da disciplina. As notícias podem ser postadas por todos os participantes da disciplina.

A participação nos fóruns é de fundamental importância para a construção de grupos de estudo, já que é através deles que os participantes têm a possibilidade de se conhecer melhor, debater sobre questões específicas de uma disciplina, expor suas ideias, comentar e complementar opiniões de seus colegas, colocar suas dificuldades, pedir ajuda aos colegas bem como abordar outros temas pertinentes ao curso. Observa-se que, durante o andamento de uma disciplina, vários tipos de fóruns podem ser utilizados.

Na sequência, organizado na forma de tópicos, é disponibilizado o material didático e/ou as atividades que deverão ser desenvolvidas na semana. Para acessar o material didático e as atividades do desenvolvimento da disciplina, basta seguir as informações introdutórias apresentadas pelo professor, clicando nos *links* (destacados na cor azul). Observe que em todas as disciplinas haverá uma janela semelhante à apresentada na Figura 5.

No lado direito da página são apresentadas várias opções (ver Figura 5), tais como:

- **Participantes** – onde se podem visualizar os nomes dos participantes da disciplina e, clicando sobre um dos nomes, você pode realizar alguns afazeres, por exemplo: visualizar seu perfil, enviar uma mensagem e outras informações. Caso seja seu próprio nome, você poderá digitar, visualizar e modificar seu perfil, mudar a senha, colocar a sua foto e outras informações que podem ser de seu interesse. Ver Figuras 6, 7, 8 e 9.

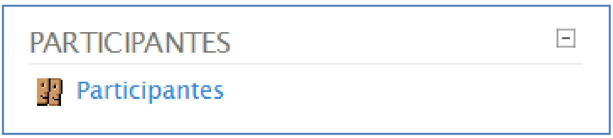


Figura 6 – Caixa Participantes

Clicando em **Participantes**, abrirá uma nova janela, semelhante à apresentada na Figura 7.

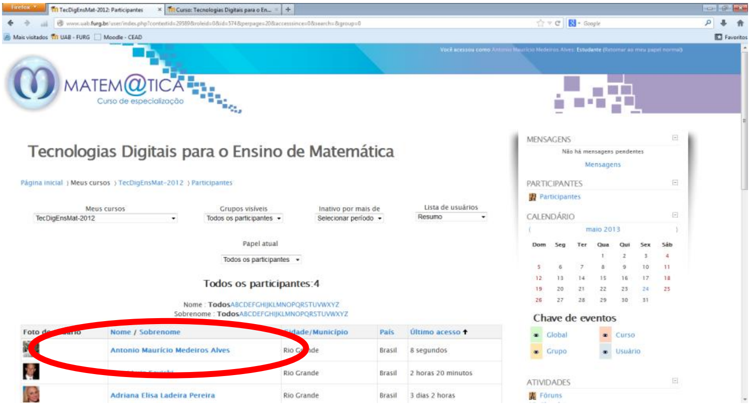


Figura 7 – Janela dos participantes da disciplina

Ao clicar no seu próprio nome, abrirá uma nova janela, semelhante à apresentada na Figura 8. Quando clicar em **Perfil Completo**, será apresentada a janela mostrada na Figura 9, onde dados podem ser inseridos ou modificados. No entanto, não é recomendado modificar os dados de configurações do ambiente.

Figura 8 – Janela do próprio participante, aba **Perfil** ativa

Figura 9 – Janela do próprio participante, após clicar em **Perfil Completo**

Para editar seu perfil, clique em **Modificar Perfil**, na coluna do lado direito e, então, abrir-se-á uma nova janela, na qual seus dados poderão ser modificados.

Voltando à página **Participantes**, selecione o seu polo em **Grupos Visíveis** (Figura 7) e, no momento em que clicar no nome de um colega participante da disciplina, abrirá uma janela semelhante à apresentada na Figura 10, onde se podem visualizar informações do participante, como perfil, endereço de *e-mail* e outras. Exemplo disso é que, se você clicar em **Enviar uma mensagem**, poderá enviar uma mensagem ao participante.

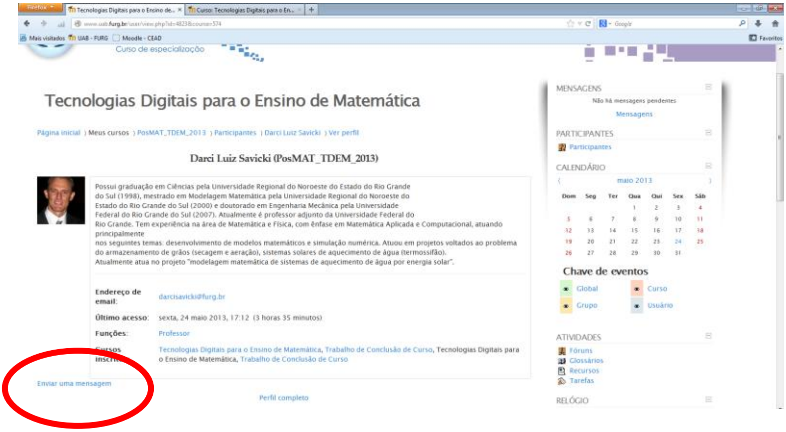


Figura 10 – Janela de participantes

Outros recursos do *box* à direita são:

- **Calendário** – é um recurso que permite visualizar os eventos do curso ou da disciplina e, também, eventos cadastrados pelo usuário. Os dias, nos quais esses eventos irão ocorrer, serão marcados de acordo com a legenda mostrada na Figura 11. Para visualizar os detalhes de um evento, basta clicar no dia em que este foi agendado. Para incluir um evento pessoal, você tem que clicar no nome do mês e, assim, aparecerá uma página para inclusão de novos eventos. Para visualizar os meses anteriores ou os meses seguintes, clique nas setas de navegação que se localizam na parte superior do calendário, à esquerda e à direita do nome do mês.

Figura 11 – Caixa Calendário

- **Atividades** – essa caixa apresenta uma alternativa de acesso à participação de fóruns de discussão e de atividades da disciplina, é só clicar nos *links*, conforme Figura 12.

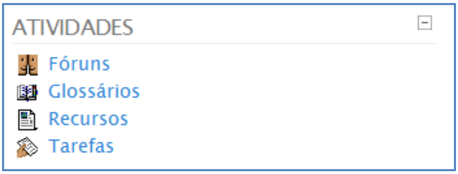


Figura 12 – Caixa Atividades

- **Relógio** – essa caixa apresenta a hora do servidor e de seu computador (Figura 13). Todas as atividades com datas previstas para fechamento são controladas pelo horário do servidor. Você deve usar essa hora para controlar o envio de suas atividades. Nem sempre seu computador estará acertado de acordo com a hora do servidor, CUIDE essa questão.

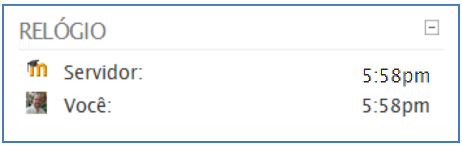


Figura 13 – Relógio

- **Navegação** – este recurso serve para mudar rapidamente de página. A partir desta caixa, você pode voltar para **Página Inicial**, ir para outras disciplinas que esteja matriculado, entre outras opções. Ver Figura 14.

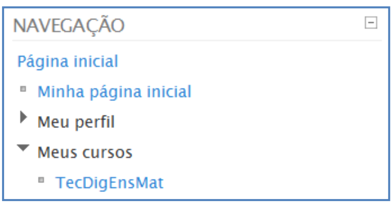


Figura 14 – Caixa de Navegação

- **Configurações** – neste *box*, na opção **Usuários**, você pode consultar suas notas (quando a disciplina realizar esse registro) bem como acessar bancos de questões ou arquivos do curso (Figura 15).

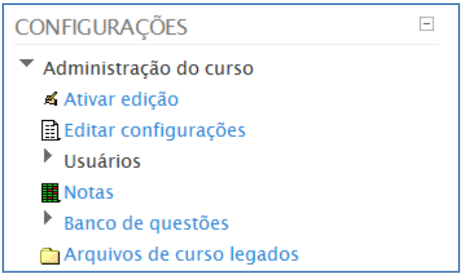


Figura 15 – Caixa Configurações

- **Pesquisar nos Fóruns** – este recurso permite procurar um determinado tópico nos fóruns existentes na disciplina. Para isso, você deve digitar as palavras-chave que deseja pesquisar e, em seguida, acionar a tecla "Enter" ou acionar o botão "Vai", ver Figura 16.

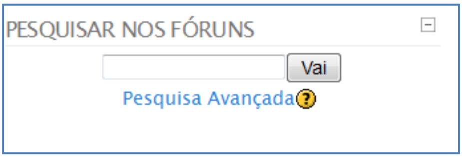


Figura 16 – Caixa Pesquisar nos Fóruns

1.3 Alterando o Perfil

Texto elaborado por Antonio Maurício Medeiros Alves

Você viu no texto acima como acessar seu perfil para atualizá-lo. Agora, veremos algumas dicas sobre isso. Para editar seu perfil, você precisa ter feito o *login*. Após o acesso, você visualizará a página, conforme Figura 17.

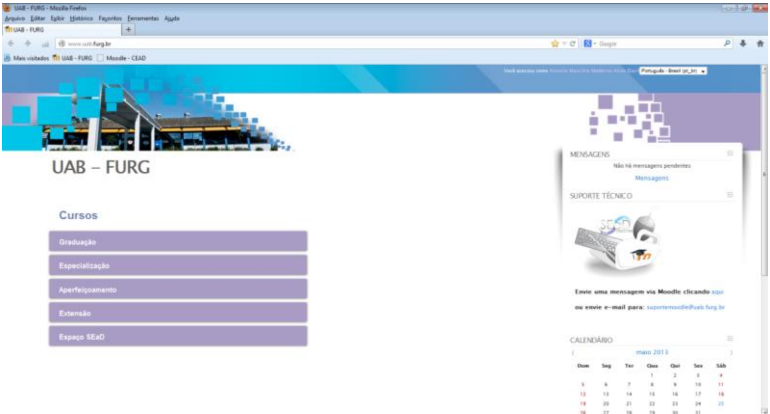


Figura 17 – Página inicial Pós-Mat

Na parte superior direita da página, você encontrará seu nome, clique sobre ele (Figura 18).

Figura 18 – Clique sobre o nome

Você irá, dessa forma, acessar sua página pessoal da mesma maneira que o faria acessando através de **Participantes**, porém de forma mais rápida.

Agora, clicando em **Configurações** (à direita da tela, na parte inferior) e em **Modificar Perfil** (Figura 19), você será redirecionado para a página da Figura 20.

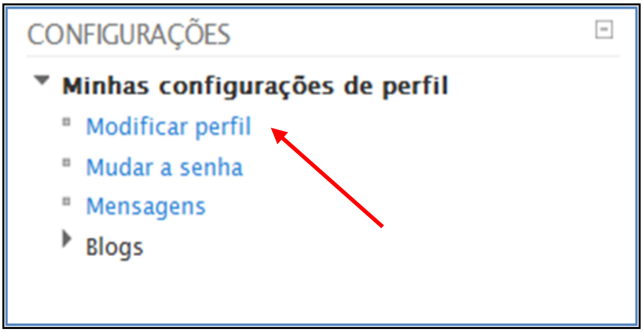


Figura 19: Caixa Configurações

Na Figura 20, você pode observar os campos que podem ser modificados em seu perfil.

Os itens marcados com a seta não devem ser alterados, pois se tratam de itens de configuração. Na descrição, inclua informações que julgar relevantes, lembrando que essa plataforma é o nosso ambiente institucional, ou seja, é a nossa *universidade virtual*. Dessa forma, não inclua informações que possam causar algum tipo de constrangimento, visto que o seu perfil é público.

Confira atentamente seu *e-mail*. Use somente um *e-mail* válido em seu perfil, que você acesse com frequência, pois todas as informações importantes sobre o curso serão encaminhadas para o endereço que você forneceu.

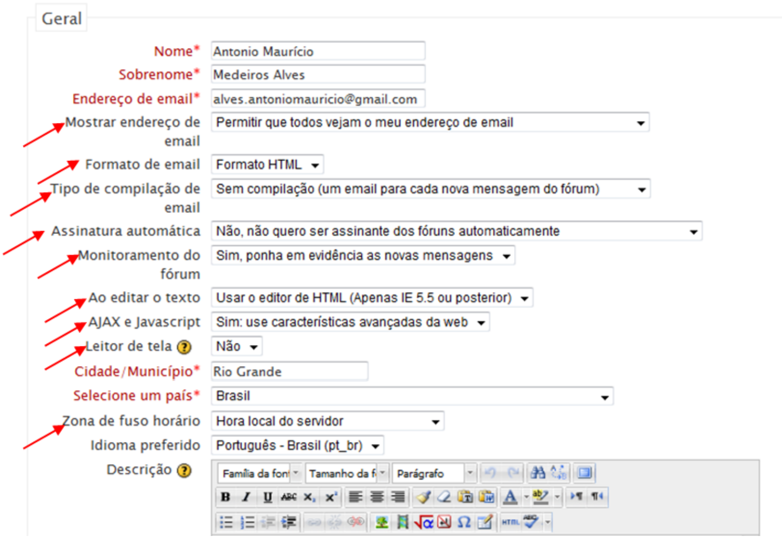


Figura 20 – Modificar Perfil

- Alterando a foto – para alterar sua imagem:

1. Clique em **Nova Imagem – Escolha um arquivo**...
2. Imediatamente irá abrir uma nova página no Moodle (Figura 21).
3. Clique em Selecionar arquivo...
4. Procure a foto em seu computador, preferencialmente de rosto.
5. Escolha a imagem que irá utilizar (TAMANHO MÁXIMO 2Mb).
6. Clique em Enviar este arquivo
7. Quando atualizar a página, em Atualizar perfil , sua foto será exibida.

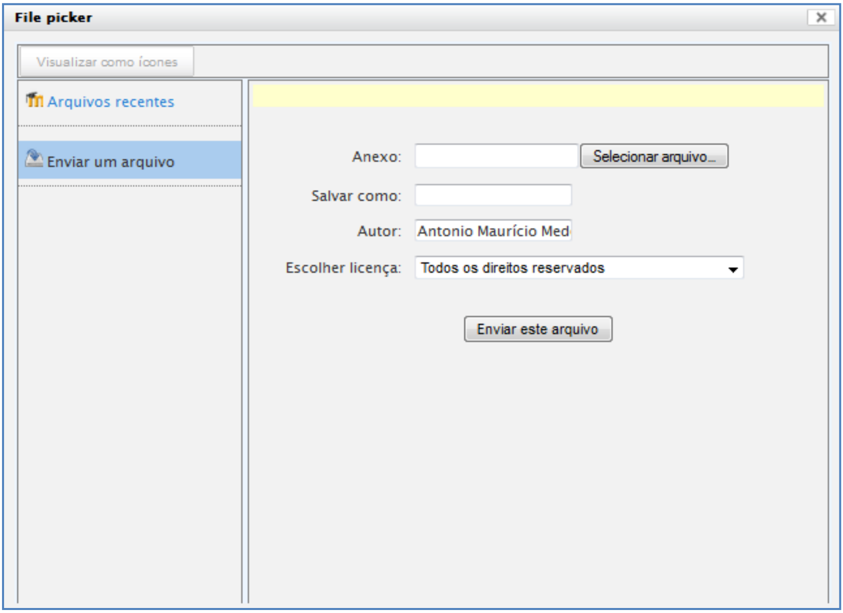


Figura 21: Anexar um arquivo (nesse caso, de imagem)

Após o *box* **Imagem do Usuário**, tem outros dois *box* (**Interesses** e **Opcional**) que não precisam ser preenchidos.

Clique, finalmente, em Atualizar perfil e sua atividade está concluída.

1.4 Envio de mensagens

Sobre o envio de mensagens, cabe destacar que, a qualquer momento, você poderá enviar uma mensagem a um participante, sem ter que usar as orientações anteriores. Para tanto, basta clicar na caixa **Mensagens**, na lateral direita da página da disciplina (Figura 22):

Figura 22 – Página da Disciplina

Ao clicar em mensagens, você verá a tela da Figura 23, na qual poderá utilizar o recurso de mensagens.

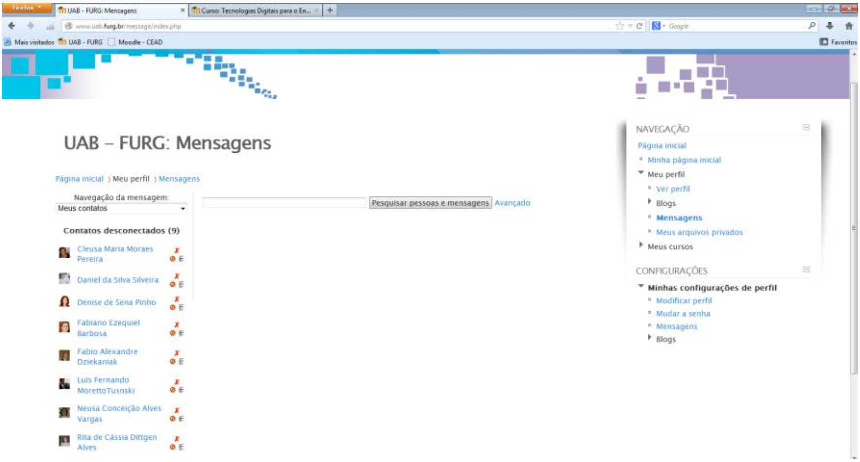


Figura 23 – Tela de mensagens

Nessa tela, pode-se localizar a pessoa para quem se quer enviar a mensagem, pesquisando pelo nome do participante, Figura 24.

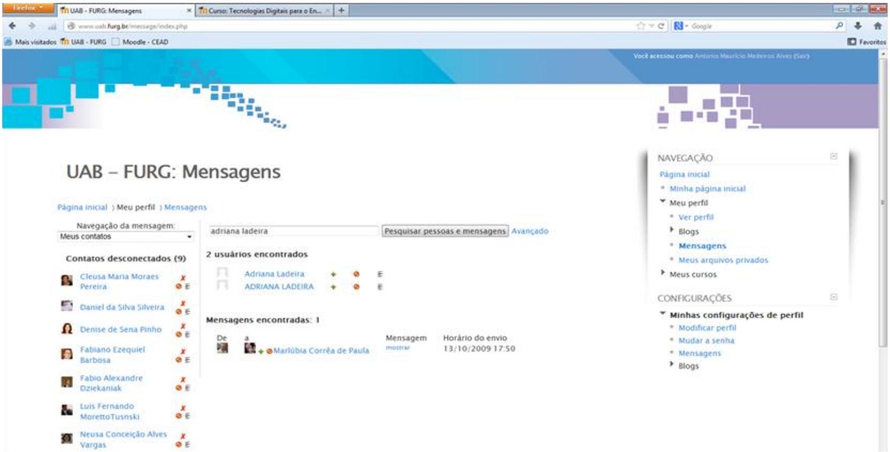


Figura 24 – Localizando um contato

Ao localizar o contato desejado, tem-se quatro opções, como indicam as imagens 25, 27, 28 e 29.

1. **Enviar mensagem** – ao clicar sobre o nome do usuário (Figura 25), você será encaminhado para tela de mensagens, na qual poderá escrever seu recado e enviá-lo para o contato selecionado (Figura 26).

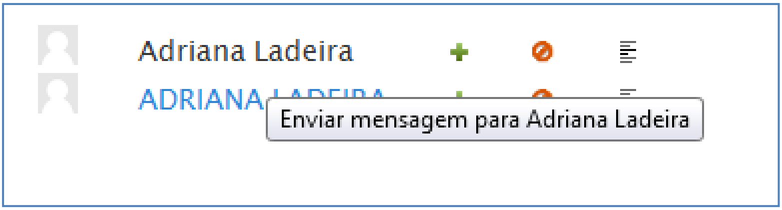


Figura 25 – Clicar sobre o nome da pessoa

Figura 26 – Escrever a mensagem e clicar em enviar

2. **Acrescentar contato** – Ao clicar sobre o ícone destacado na Figura 27, você irá incluir essa pessoa em sua lista de contatos, que aparece à esquerda da tela. Isso facilitará nas próximas vezes que quiser escrever uma mensagem, pois será necessário apenas clicar sobre o nome da pessoa. Para excluir um contato da lista, clique no "X" em vermelho (observe a seta acima).

Figura 27 – Adicionando um contato (clicar em **+**)

3. **Bloquear contato** – preferencialmente, NUNCA use esse recurso, caso contrário, a pessoa bloqueada não poderá lhe enviar mensagens. Dessa forma, cuide para não clicar acidentalmente no símbolo em destaque na Figura 28.

Figura 28 – Bloquear um contato

4. **Ver histórico das mensagens** – ao clicar no símbolo indicado na Figura 29, será possível recuperar todas as mensagens trocadas (enviadas/recebidas) entre você e o contato selecionado.

Figura 29 – Histórico das mensagens

1.5 Fóruns de discussão

O fórum de discussão é uma ferramenta importantíssima. Os fóruns têm diversos tipos de estrutura e podem incluir a avaliação recíproca de cada mensagem. As mensagens são visualizadas em diversos formatos e podem incluir anexos.

Os participantes do fórum têm a opção de receber cópias das novas mensagens via *e-mail* (assinatura), e, os professores, de enviar mensagens ao fórum com cópias via correio eletrônico a todos os participantes.

Tipos de fórum:

- Geral – cada aluno pode abrir um tópico de discussão.
- Um único tema – as interações ocorrem todas no mesmo espaço, não sendo permitida a abertura de novos tópicos de discussão.
- Cada participante propõe um tema – cada um dos participantes tem a opção de abrir somente um novo tópico.

Em todos os casos, na parte superior da página, serão apresentadas opções de subscrição e um botão que permite “atualizar o fórum” (alterar a sua configuração).

As mensagens dentro de um tema de um fórum podem ser apresentadas em quatro formas diferentes:

- Lista de respostas, a começar pela mais nova.
- Lista de respostas, a começar pela mais antiga.
- Mostrar respostas em forma contraída.
- Mostrar respostas em forma hierárquica.

Dicas sobre participação em fórum

1) Clicar em **Acrescentar um novo tópico de discussão** (abaixo).
2) Na nova tela, digitar o assunto. Nesse caso, **Apresentação de...** (seu nome).
3) Digitar a apresentação na área de texto.
4) Escolher se quer **ser assinante** (receber cópias por *e-mail*) ou **não** (nesse caso, você só vai ler as mensagens no Moodle – mais indicado!).
5) Anexar um arquivo, se assim o quiser, de sua escolha. Pode ser uma foto.
6) Clicar em **Enviar mensagem ao fórum**.

2. ASPECTOS DA EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA NO BRASIL

A fim de discutir a Educação a Distância (EaD) no contexto brasileiro, inicialmente, faz-se necessário problematizar o conceito de Educação a Distância, que, como todo conceito, irá depender da corrente teórica considerada.

Para o professor e pesquisador José Manuel Moran (2010)[1], a EaD é o processo de ensino-aprendizagem mediado por diferentes tecnologias, onde professores e alunos estão separados espacial e/ou temporalmente. Entretanto, apesar de não estarem juntos fisicamente, podem estar interligados através de diferentes tecnologias como, por exemplo, a internet. Outras tecnologias/recursos podem ser utilizadas (os) nessa modalidade de educação, a exemplo dos CDs, DVDs, telefone, vídeo, fax, etc.

Correa (2007) destaca o fato de que não se pode limitar o conceito dessa modalidade de ensino à separação espacial entre alunos e professores, pois seu traço distintivo se baseia na *mediatização* entre alunos e professores, embora essa seja uma tendência preponderante. Nesse sentido, uma característica fundamental da EaD é de que esta rompe com o paradigma dominante, em que o ensino prevalece sobre a aprendizagem, no qual o professor é o centro desse processo.

Dessa forma, é necessário diferenciar ensino a distância de Educação a Distância, embora haja uma aproximação e, até mesmo, uma complementaridade nesses termos. Quando se fala em ensino a distância, o foco se encontra no professor como aquele que não está

---

[1] Disponível em: <http://www.escolanet.com.br/sala_leitura/txt_integral.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.

presente, porém, ao se usar a expressão Educação a Distância, percebe-se um rompimento com esse paradigma hegemônico (do professor como aquele que ensina, independente do aluno).

Neste o aluno passa a assumir importante papel em sua aprendizagem, tornando-se sujeito de suas *aprendências*, assumindo o professor o papel de problematizador (no lugar de expressões como facilitador, pois esse é entendido como aquele que torna fácil), fazendo com que esse fenômeno tome um caráter mais abrangente, abrindo outras possibilidades também temporais, além das espaciais, para que a Educação a Distância aconteça.

Outros conceitos importantes para que se entenda o sentido da Educação a Distância são: educação presencial (dos cursos regulares, nos quais alunos e professores estão juntos fisicamente e se encontram sempre em um local físico, normalmente na sala de aula); educação semipresencial (em que parte do curso acontece presencialmente na sala de aula e parte a distância, através de tecnologias); e a própria Educação a Distância (que acontece fundamentalmente com professores e alunos separados fisicamente no espaço e/ou no tempo, mas que podem estar juntos através de tecnologias de comunicação, dispondo ou não de aulas presenciais).

Quando o "estar junto" mediado pelas diferentes tecnologias/recursos (*chat*, videoaula, webconferência, videoconferência, mensagem instantânea, etc.) acontece no mesmo tempo para professores e alunos, a comunicação é definida como "*online*" ou "síncrona", quando os tempos são diferentes, temos a comunicação "*offline*" ou "assíncrona". Normalmente os cursos de EaD utilizam um misto de *on* e *offline*.

Segundo Moran (2010), no exterior, existem modelos exclusivos de instituições de Educação a Distância, que só oferecem programas nessa modalidade, como a *Open University* da Inglaterra e a Universidade Nacional a Distância da Espanha. No Brasil, o modelo predominante é de instituições que oferecem cursos a distância, mas também o fazem no ensino presencial.

Renato Sabbatini (2010)[2] (PHD em Neurofisiologia e professor de tecnologias de informação e comunicação em saúde da UNICAMP), em palestra recente, destacou alguns dados interessantes sobre o crescimento da EaD no mundo: nos EUA, mais de 65% das

[2]Disponível em: <http://groups.google.com.br/group/eadbr/browse_thread/thread/efe58b4c824d49ee>. Acesso em: 20 jun. 2010.

universidades já oferecem EaD, sendo que a taxa anual de crescimento de alunos é de 18,2%. Já na área médica, mais de 80% dos profissionais usam regularmente EaD para atualização. No Brasil, empresas, ONGs e governo estão promovendo cada vez mais iniciativas no setor, proporcionando um aumento do mercado com cursos cada vez mais rápidos, baratos e excelentes.

Convém destacar que a Educação a Distância pode ser dirigida a qualquer nível de ensino, porém se mostra mais adequada ao público adulto, em que a aprendizagem individual e a prática da pesquisa são normalmente mais recorrentes. Essa modalidade é crescente nos últimos anos e agrega as novas tecnologias, conforme nos indica José Manuel Moran:

> Retomando alguns aspectos históricos da Educação a Distância no Brasil, veremos que ela não é nova, mas agora, com a LDB e as tecnologias telemáticas, sua evolução está sendo mais rápida e facilitando mudanças no modelo educacional, muitas vezes ainda em vigor, que valoriza a relação hierarquizada entre professor e aluno, entre quem ensina e quem aprende.[3]

Segundo o autor, o crescimento da EaD no Brasil tem modificado as relações dos sujeitos com a educação, pois com a criação de novos ambientes, onde também se dá a educação, a partir do desenvolvimento e avanço das tecnologias, mudam-se alguns conceitos no contexto educacional. Para Moran (2010)[4], na medida em que as tecnologias avançam, o conceito de presencialidade também se altera. Ainda hoje, quando se fala em aula, entendemos um ambiente com espaço e tempo determinados, os quais, nesse contexto traçado pelas tecnologias, cada vez mais, serão flexíveis.

A Educação a Distância não é um fenômeno recente no Brasil. Muitos autores indicam diferentes momentos da EaD no país. A autora Rosangela Rodrigues (1998)[5], por exemplo, denomina cada momento como "geração" e indica a duração da primeira etapa da EaD até os

---

[3] Disponível em: < http://www.escolanet.com.br/sala_leitura/txt_integral.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.

[4] Disponível em: <http://www.escolanet.com.br/sala_leitura/txt_integral.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.

[5] Disponível em: <http://www.escolanet.com.br/sala_leitura/hist_ead.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.

anos de 1970, caracterizando-a pelo estudo por correspondência, que tinha como principal meio de comunicação os materiais impressos, geralmente na forma de guia de estudos, com “instruções” e exercícios variados, os quais eram enviados pelo correio.

Conforme a autora, a segunda geração teria início no período seguinte à década de 1970, quando surgem as primeiras Universidades Abertas. Neste momento, outros elementos foram sendo incorporados na comunicação a distância, além do material impresso, como a televisão (aberta e a cabo), o rádio e as fitas de áudio e vídeo, com interação por telefone, satélite, etc. Esse período iria, segundo a autora, até a década de 1990, quando iniciaria, então, a terceira geração de EaD, com o fortalecimento das “redes interativas” e o uso mais abrangente do computador e da internet.

A autora ainda indica o início da quarta geração, a partir do ano de 2000, caracterizada pelo aumento da capacidade de processamento dos computadores e da velocidade das linhas de transmissão, o que interfere na apresentação do conteúdo e de interações, bem como no acesso a bancos de dados e bibliotecas eletrônicas. Tem-se nesta fase uma passagem da comunicação *offline* (com o uso exclusivo do impresso) para uma combinação de comunicação *off* e *online* (em tempo real), o que muda as características da EaD.

Entretanto, é pertinente destacar que uma tecnologia não substitui totalmente a outra, pois todas podem coexistir. Certamente que os investimentos serão de naturezas diferentes, de acordo com a demanda de cada período histórico.

Já Wilson Azevedo (1999) apresenta outra divisão para a EaD, em dois momentos: um antes e outro depois da internet. No primeiro, havia a mediação por meio de tecnologias da comunicação, que ocorria de um para muitos (rádio ou televisão) ou de um para um (correspondência), com o avanço da internet, além dessas duas mediações, uma terceira é apresentada: a do muitos para muitos.

Segundo o autor, essa nova característica atribuída à EaD pelo avanço da internet tem permitido a superação daquilo que, por muito tempo, foi considerada a Educação a Distância: uma “estepe” do ensino, utilizada quando outras estratégias haviam falhado. Azevedo destaca que a EaD era, por muitas vezes, vista como uma educação de “segunda categoria”, utilizada principalmente para suprir lacunas daqueles que não haviam tido acesso à educação formal no tempo adequado (cursos de suplência).

No caso do Brasil, a LDB 9394/96, em seus artigos 80, reconhece a Educação a Distância como uma modalidade de educação dirigida a todos os níveis de ensino. Desde então, verificou-se uma intensificação nos cursos em EaD em todos os níveis, diferentemente do que se assistira anteriormente: cursos esporádicos e, em sua maioria, com características supletiva (Telecurso 2000). Esse aumento foi verificado também nos cursos de graduação, com um crescente envolvimento de instituições de Ensino Superior com cursos de EaD, caracterizando grande dinamismo no panorama atual.

De acordo com Rosangela Schwartz Rodrigues (2004):

> A partir da segunda metade dos anos 90, as possibilidades que a internet oferece vêm interferindo profundamente nas atividades de EaD no Brasil. Novas instituições passaram a oferecer cursos a distância, já se inserindo diretamente no cenário de uso de mídias de terceira e quarta gerações. Os anos de 1996 e 1997 presenciaram o início de várias atividades que se tornariam decisivas na evolução do cenário da EaD no Brasil. [...] Com os movimentos de apropriação tecnológica dos ambientes virtuais de aprendizagem se desenvolvendo rapidamente e a metodologia de EAD já em fase adiantada de consolidação, o próximo passo foi o reconhecimento formal do Ministério da Educação aos cursos que já aconteciam por meio de Educação a Distância. Entre os cursos de graduação a distância aprovados pelo MEC até 2004 (os cursos só começaram a ter sua aprovação publicada no Diário Oficial em 1999), a maioria é dedicada à formação de professores em exercício, refletindo o fomento governamental neste segmento.[6]

A Educação a Distância, por muito tempo, foi vista como uma superação imediata de problemas emergenciais (caráter supletivo), como meio de ultrapassar fracassos dos sistemas educacionais em algum momento da história – percepção adotada pelo Brasil nos anos de 1970. Porém, nos últimos anos, há um reconhecimento dessa

---

[6] TRECHO da Tese de Doutorado: Modelo de Planejamento para Cursos de Pós-Graduação a Distância em cooperação Universidade-Empresa. Disponível em: <http://200.132.103.12/repositorio/admin/downloads/2_tema_2.pdf>.

modalidade de ensino como sendo um elemento regular do sistema educativo (BELLONI, 2006).

Exemplos desse reconhecimento formal da EaD pelo MEC são os decretos 5.622, de 10 de dezembro de 2005, e 5.800, de 8 de junho de 2006. O decreto 5.622/05 caracteriza e regulamenta a Educação a Distância no Brasil, definindo sua organização, oferta e avaliação. Prevê também o credenciamento de instituições de ensino para a oferta de cursos e programas de especialização, mestrado, doutorado e educação profissional tecnológica de pós-graduação. Define ainda questões acerca da Educação de Jovens e Adultos, Educação Especial e Profissional na modalidade de EaD, bem como dos cursos de graduação.

Já o decreto 5.800/06 dispõe sobre o sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB). Por meio desse decreto, institui-se a UAB, voltada para o desenvolvimento da modalidade de Educação a Distância, com a finalidade de expandir e interiorizar a oferta de cursos e programas de Educação Superior no país. Por meio desse decreto e da institucionalização da UAB, fica definida a colaboração que deve haver entre a União e os Entes Federativos (estados e municípios), articulando a manutenção de polos de apoios presenciais às universidades conveniadas com a UAB.

Em relação aos investimentos, o decreto prevê que correrão por conta das dotações orçamentárias de responsabilidade do MEC e do FNDE, sendo de responsabilidade do executivo compatibilizar a seleção dos cursos e programas de Educação Superior com os já existentes. Convém destacar que a UAB não se caracteriza como uma Instituição de Ensino Superior (IES), pois não possui uma sede física, configura-se como um projeto, um sistema, caracterizado como uma rede nacional voltada para a pesquisa e Educação Superior, formada pelo conjunto de IES que irão se articular com os polos municipais presenciais, onde estarão em funcionamento os cursos da UAB.

Dessa forma, são as IES que irão oferecer cursos superiores na modalidade de EaD, visando atender aos estudantes que irão frequentar os diferentes cursos propostos pelas instituições públicas de Ensino Superior, sediados nos polos presenciais de cada município e aprovados pelo MEC. Cada polo de apoio presencial será de responsabilidade do poder público local, devendo caracterizar-se como um espaço físico, onde os estudantes terão a infraestrutura necessária à execução de algumas das funções didático-pedagógicas dos cursos a distância.

Este espaço deverá ser equipado com laboratórios de ensino e pesquisa, laboratórios de informática, biblioteca, recursos pedagógicos, dentre outros, de acordo com os cursos a serem ofertados, observando a mediação pelas novas tecnologias de informação e comunicação (TIC), que fundamentais na proposta de EaD. Assim, temos atualmente uma nova configuração para Educação a Distância, aumentando sua abrangência, investindo em qualidade e oferecendo possibilidades de realização de um curso superior em locais distantes dos grandes centros.

3. EDITOR DE TEXTOS

Com posse do tutorial **Editor de Textos**, realizar as tarefas a seguir.

3.1. Tarefa 1

Ao usar o editor de texto, crie um novo documento, mantendo a formatação apresentada abaixo. Neste você deverá digitar o texto denominado de **Texto para digitar**.

- ➢ O texto do documento deverá ser formatado da seguinte maneira:
- justificado (alinhado à esquerda e à direita da página);
- com a fonte Time New Roman;
- tamanho da fonte 12;
- cor da fonte preto;
- espaçamento simples entre as linhas.

- ➢ A primeira linha do parágrafo deverá ficar recuada 1,00cm da margem esquerda.
- ➢ O tamanho do papel deverá ser A4 e as margens superior, inferior, esquerda e direita deverão ser de 2,50cm.

Após a digitação e a formatação do documento, salve-o com o seguinte nome: **texto1.doc** ou **texto1.odt**. A extensão **.doc** é de arquivos criados no **Word** e **.odt** é de arquivos do **BrOffice-writer**.

TEXTO PARA DIGITAR

(Deve ser digitado e não copiado e colado!)

Novas Tecnologias

As novas tecnologias digitais devem ser abordadas sem que se perca de vista o conhecimento matemático e o seu ensino. Por exemplo, o computador é uma tecnologia que pode ser utilizada como uma ferramenta educacional e como uma das principais etapas para a formação tecnológica. Faz-se necessária a análise de suas limitações e possibilidades pelo professor, caso contrário, a ferramenta pode ser subestimada ou supervalorizada, podendo gerar uma rejeição excessiva ou uma aceitação incondicional do usuário. Ambos os casos podem resultar em uma compreensão errônea acerca do seu valor cultural, pressupondo a rejeição ou a dependência técnica.

3.2 Tarefa 2

Abrir o documento denominado de texto1.doc ou texto1.odt, recém criado, e fazer as seguintes modificações:

- use os comandos copiar e colar, repita o parágrafo do texto do referido documento 4 vezes, deixando uma linha em branco entre os parágrafos;
- a primeira linha dos parágrafos deverá ficar recuada 1,00cm da margem esquerda;
- o segundo parágrafo deverá ficar justificado, fonte Time New Roman, tamanho da fonte 12, cor da fonte preto, espaçamento simples e o texto sublinhado;
- o terceiro parágrafo deverá ficar justificado, fonte Time New Roman, tamanho da fonte 12, cor da fonte azul, espaçamento simples e o texto em negrito;
- o quarto parágrafo deverá ficar alinhado à esquerda, fonte Arial, tamanho da fonte 10, cor da fonte azul, espaçamento 1,5 e o texto em itálico;
- o quinto parágrafo deverá ficar alinhado à direita, fonte Arial, tamanho da fonte 10, cor da fonte vermelho, espaçamento duplo e o texto em itálico.

Após a edição do documento, salve-o com o seguinte nome: **texto2.doc** ou **texto2.odt**. Não esqueça que o **texto2.doc** é para quem usa o Word e o **texto2.odt** é para quem usa o BrOffice-writer.

3.3. Tarefa 3

a) Abrir o documento denominado de texto2.doc ou texto2.odt e digitar o seu nome entre o título e o primeiro parágrafo. A seguir, salve-o com o nome **texto3.rtf** (rtf – formato rich text, é um dos formatos de arquivos para enviar tarefas).

b) Enviar, no espaço criado para envio da tarefa, o documento denominado de **texto3.rtf**, para que o seu tutor possa avaliar as atividades da semana.

3.4. Tarefa 4

Para realizar esta tarefa, você deve:

a) digitar o Texto da Tarefa, utilizando um editor de texto de sua preferência;

b) salvar o texto digitado, em um arquivo de nome: Tarefa_formulas_NOME DO ALUNO (substitua NOME DO ALUNO pelo seu nome);

c) Criar um arquivo do texto digitado com extensão**.rtf** (lembre que essa é uma das extensões para envio de arquivos) e enviar a atividade através do ambiente da Tarefa Digitação de Fórmulas.

TEXTO DA TAREFA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

METODOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

(digitar aqui seu nome completo)

SEÇÕES CÔNICAS

O círculo, a parábola, a elipse e a hipérbole são conhecidos como seções cônicas, porque cada uma dessas curvas pode ser obtida pelo seccionamento de um cone por um plano. Quando esse seccionamento é feito perpendicularmente ao eixo do cone, a seção é um círculo.

Em geral, vamos supor que ao seccionarmos o cone por meio de um plano, este faça um ângulo α com o eixo do cone e seja β o ângulo da geratriz do cone. Então, a seção é

a) um círculo, se $\alpha = 90^o$;
b) uma elipse, se $\beta < \alpha < 90^o$;
c) uma parábola, se $\alpha = \beta$;
d) uma hipérbole, se $0 \leq \alpha < \beta$.

FÓRMULA DE BASKARA

As raízes reais de um polinômio de segunda ordem, $ax^2 + bx + c = 0$, são calculadas usando a fórmula de Baskara, expressa por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Note que, somente existem raízes reais quando o valor do Δ for maior ou igual a zero.

EXEMPLOS DE EQUAÇÕES

a) $y = 3x^2 - 5x + \sqrt{3}$

b) $y' = \dfrac{d}{dx}\left(x^3 - x\right)$

c) $\int (\sin x + x^2)dx = 0$

d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$

3.5. Criar arquivos no formato .pdf

Uma das formas mais seguras de disponibilizar documentos e, ao mesmo tempo, de garantir sua integridade é através da utilização de arquivos no formato .pdf (Portable Document Format). No BrOffice-writer, criar um arquivo no formato .pdf é simples, pois na **Barra de Ferramentas Padrão** existe um ícone para tal.

Entretanto, no Word 2007, nem sempre esse complemento está instalado, assim, se não houver a opção **Salvar Como →.pdf**, será necessário instalar esse complemento, do qual podemos fazer o download, clicando no *link*: *Download* do Complemento.

As instruções **como buscar** e **instalar o complemento** estão no *link* **Instruções para Instalação do complemento**. E os procedimentos para criar um arquivo no formato .pdf, no Word, são mostrados no *link* **Como Criar um Arquivo no Formato .pdf**.

4. O USO DA INTERNET

Neste tópico, a atividade a ser desenvolvida aborda o uso da internet como uma ferramenta auxiliar na preparação do material didático utilizado no ensino de matemática.

4.1 Aprenda a pesquisar no Google de maneira mais eficiente

Atualmente, uma das formas mais rápidas e eficientes de encontrar uma resposta para alguma questão é fazer uma busca na internet. O site de buscas mais famoso e mais utilizado é o Google <http://www.google.com.br/>. Quer fazer um bolo e não lembra a receita, pesquise no Google e certamente encontrará uma lista enorme de receitas, não só do bolo que estava pensando em fazer, mas de uma porção de outros que você nem imaginava que existiam.

Precisa saber a distância entre duas cidades, digite no Google *Maps* <http://maps.google.com.br/> a cidade origem bem como a cidade destino e encontrará não só a distância procurada, mas também outras informações importantes, como o tempo estimado da viagem e um passo a passo de como chegar de um local a outro. Provavelmente, se souber pesquisar, encontrará no Google a resposta para sua pergunta, mas lembre-se, se quiser a resposta certa, deve fazer a pergunta certa. A seguir, vamos dar algumas dicas de como fazer a pergunta certa.

Antes de iniciar, porém, vale frisar que assim como existe muita informação valiosa na internet, também existe muita informação incorreta. Por isso, muita atenção: avalie a credibilidade do *site*, compare com outros *sites* e se questione sobre a veracidade, ou não, da informação encontrada antes de acatá-la.

4.2 Pesquisar por frases exatas

Escreva a frase (pergunta) que pretende pesquisar entre aspas para que o Google lhe retorne só resultados que contenham exatamente a frase digitada na caixa de pesquisa (por exemplo, “bolo de fubá”). Se não colocar as aspas, o Google irá retornar resultados referentes a cada uma das palavras chaves que compõem a sua frase. Esta dica é especialmente útil quando quiser encontrar resultados, como títulos de livros, filmes ou músicas, os quais a ordem dos termos coincida.

Para quem está iniciando, outras dicas de pesquisa são apresentadas a seguir:

MÓDULO: INICIANTE

PARA ENCONTRAR...	...COMO...	...DIGITE NO GOOGLE
Expressões ou frases exatas	"torta holandesa"	**"torta holandesa"**, entre aspas
Palavras em uma mesma frase, porém não juntas	"arroz" e "branquinho"	**arroz * branquinho**
Resultados que não contenham uma palavra	que tenham "churrasco" mas não "gato"	o sinal de menos, como **churrasco -gato**
Só o termo procurado, e não o plural dele	"coxinha" e não "coxinhas"	o sinal de +, como **+coxinha**

Figura 30 - Dicas de pesquisa para iniciantes no Google.
Fonte: <http://bolivarbutzke.blogspot.com.br/2009/06/aprenda-pesquisar-no-google.html>.

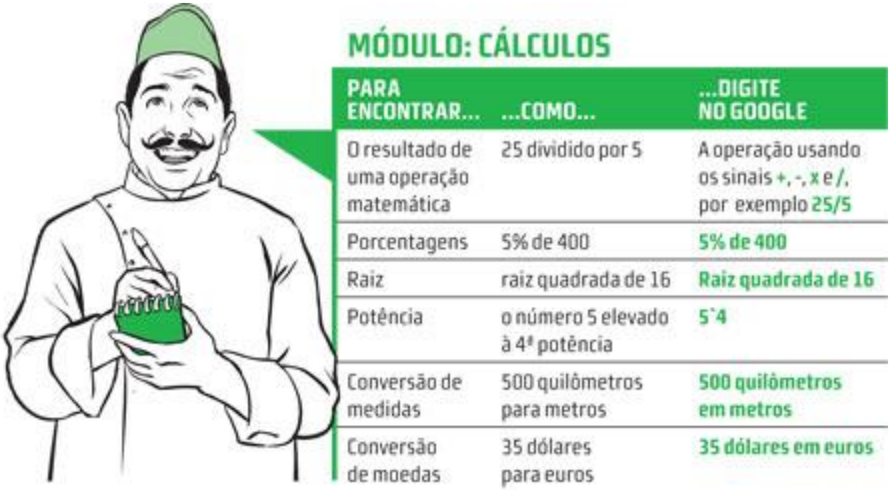
Para quem já está se sentindo mais confortável:

MÓDULO: AVANÇADO

PARA ENCONTRAR...	...COMO...	...DIGITE NO GOOGLE
A definição de algo	"metafísica"	**define: metafísica**
Palavras apenas em sites acadêmicos	"moléculas"	**moléculas site:edu**
Palavras em um site específico	"cérebro" no site da SUPER	**cérebro site:super.abril.com.br**
Uma palavra em um formato específico de documento	"energia" em um documento em PowerPoint ou Word	**energia filetype:ppt** ou **energia filetype:doc**

Figura 31 - Dicas de pesquisa para usuários com maior familiaridade com o Google.
Fonte: <http://bolivarbutzke.blogspot.com.br/2009/06/aprenda-pesquisar-no-google.html>.

Finalmente, dicas de como usar o Google como calculadora (um quebra-galho):



PARA ENCONTRAR...	...COMO...	...DIGITE NO GOOGLE
O resultado de uma operação matemática	25 dividido por 5	A operação usando os sinais +, -, x e /, por exemplo 25/5
Porcentagens	5% de 400	5% de 400
Raiz	raiz quadrada de 16	Raiz quadrada de 16
Potência	o número 5 elevado à 4ª potência	5^4
Conversão de medidas	500 quilômetros para metros	500 quilômetros em metros
Conversão de moedas	35 dólares para euros	35 dólares em euros

Figura 32 - Usando o Google como uma calculadora.
Fonte: <http://bolivarbutzke.blogspot.com.br/2009/06/aprenda-pesquisar-no-google.html>.

4.3 Opções de pesquisa

Após digitar os termos de busca, pode-se filtrar os resultados por imagens, vídeos, mapas, dentre outras opções. Para tal, clique no filtro que deseja aplicar, por exemplo, podemos pesquisar por “bolo de fubá” na *web*, ou filtrar por **imagens**, ou por **vídeos**...

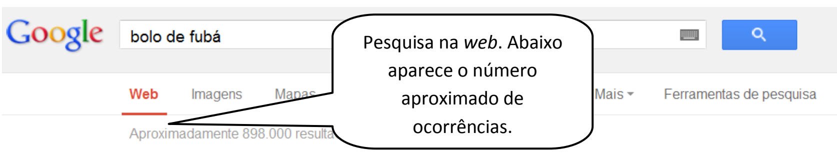


Figura 33 - Busca refinada na *web*.

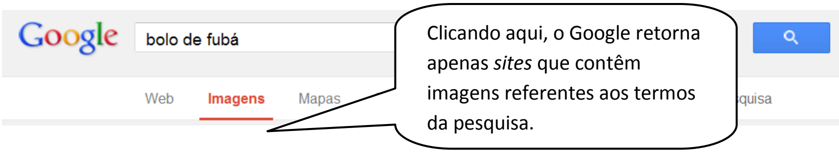


Figura 34 - Busca refinada
por imagens na *web*.

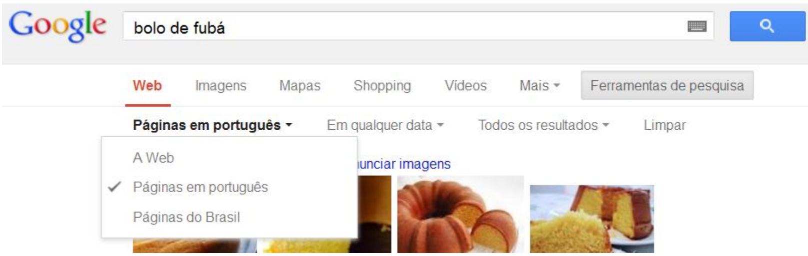


Figura 35 - Busca refinada na *web* – apenas páginas em português.

Por fim, vale destacar que a internet é uma rede mundial, portanto, a maior parte da informação estará em outros idiomas. Se você desejar filtrar sua busca de modo a retornar apenas *sites* em português, deve clicar em **ferramentas de pesquisa** e, após, abrir a cortina **A *web*** e clicar em **páginas em português**.

Tarefa Busca na Internet

Na atividade **Buscar na Internet**, você tem a liberdade de escolher um assunto relacionado com a matemática e pesquisar na internet algum material didático que possa ser utilizado na preparação de uma aula ou servir como material adicional. Por exemplo, como medir a altura de um edifício, usando relações entre triângulos; como Bhaskara deduziu a fórmula que leva seu nome; uma forma diferente de realizar operações aritméticas. Enfim, qualquer assunto relacionado com a matemática ensinada nas escolas.

Para fins de avaliação desta tarefa, deverá ser produzido um documento de texto que descreva o assunto escolhido. O texto deverá conter a reprodução total ou parcial do material pesquisado ou, simplesmente, você poderá escrever um comentário, incluindo o anexo do material encontrado na pesquisa. Não se esqueça de referenciar o material didático utilizado, indicando o *site* de onde este foi extraído.

Fórum Geral

O Fórum Geral foi criado para propiciar uma interação dinâmica entre os participantes da disciplina. Através dele, você pode postar ideias, complementar e comentar opiniões, pedir e prestar ajuda aos colegas. Sua participação é importante.

Experimente postar no fórum o endereço de um *site* que você visitou e achou interessante. Existem endereços ótimos. Eu, particularmente, gostei deste aqui <*http://ciencia.hsw.uol.com.br/*>.

5. PLANILHA ELETRÔNICA

Neste tópico, iremos trabalhar com um aplicativo que poderá ser utilizado por vocês nas demais disciplinas e mesmo em seu fazer docente: a **planilha eletrônica**. Da mesma forma que os editores de texto, as planilhas eletrônicas Excel e Broffice-calc se assemelham. Elaboramos um tutorial para ambos, que você encontra em nossa página no Moodle.

Convém destacar que nosso objetivo não é formar especialistas nestes programas, mas, sim, fazer uma breve introdução para os mesmos, possibilitando que os novos usuários possam criar as habilidades mínimas necessárias para utilizá-los de acordo com suas necessidades.

5.1 Trabalhando com planilhas e gráficos

<u>Atividade 1:</u> Criar uma pasta de trabalho com 12 Planilhas (de janeiro a dezembro). Salvar a planilha com o nome de "exercício1". A pasta deverá ficar semelhante a esta, criada como exemplo:

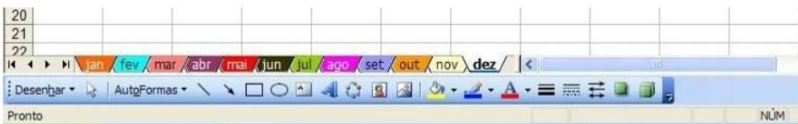
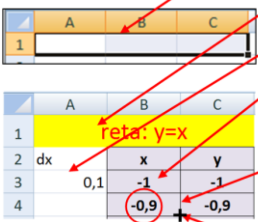


Figura 36 - Trabalhando com planilhas.

Atividade 2: Construindo Gráficos no Excel

Inicialmente, vamos construir o gráfico da reta $y = x$, no intervalo [-1, 1]. Para tal, vamos precisar gerar uma tabela, contendo os valores de x e de y. Vamos usar um incremento de 0,1 para gerar os valores de x.

Os valores de x podem ser digitados um a um, ou seja, -1, -0.9, -0,8, -0,7, ..., 0,9, 1. Esta opção é demorada e tediosa. Vamos adotar outra estratégia: Vamos gerar os valores de x a partir da fórmula $x_{i+1} = x_i + dx$, onde dx é o incremento que iremos usar. Esta fórmula nos diz que o próximo valor de x é calculado somando-se um incremento ao valor atual, e assim sucessivamente. Vamos lá:



1°)Selecionamos as colunas ABC na linha 1 e as mesclamos, clicando em (procure este ícone, na lista **alinhamento**)

2°) digitamos "reta: y=x", que servirá apenas para identificar do que se trata os dados que virão a seguir

3°) digitamos 0,1 na célula A3 (este é o incremento) e -1 na célula B3.

4°) digitamos na célula B4 a fórmula $x_{i+1} = x_i + dx$, que na sintaxe do excel fica **=B3+A$3**. (O cifrão ($) na frente do **3** serve para fixar a linha 3, pois a seguir iremos arrastar para baixo esta fórmula e queremos que o incremento seja sempre buscado na célula A3.)

5) Vamos arrastar a fórmula: coloque o cursor do mouse no canto inferior direito da célula B4, até aparecer o sinal "+". Neste momento, aperte o botão esquerdo do mouse, mantenha-o pressionado e arraste o mouse para baixo. Solte quando chegar na linha 23.

Figura 37 – Inserindo fórmulas no Excel.

Vamos agora calcular os valores da função $y = x$. Basta digitar na célula C3 a fórmula **=B3** e arrastar até a linha 23.

Se tudo deu certo, você terá obtido uma tabela, com os valores de x variando no intervalo [-1, 1].

Vamos, agora, construir o gráfico destes dados:

1°) selecione as células, desde B2 até C23. (Clique na célula B2, mantenha pressionado o botão esquerdo do *mouse* e arraste até a posição C23. Solte o *mouse*.)

2°) clique no menu **inserir**, depois em **dispersão,** escolha o tipo com marcadores e linhas.

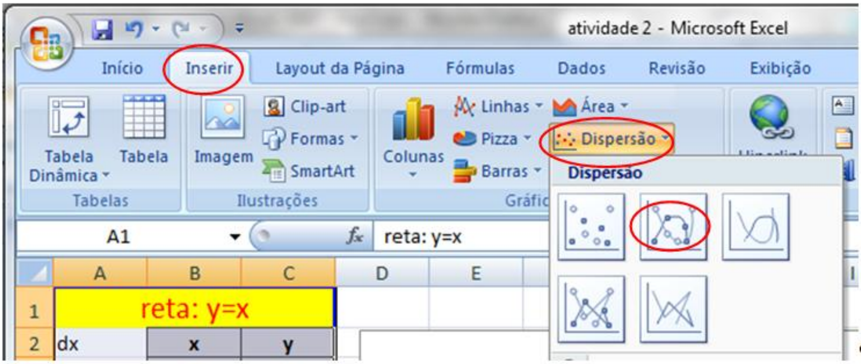


Figura 38 –Inserindo gráficos no Excel.

Se você fez certo, aparece o seguinte gráfico:

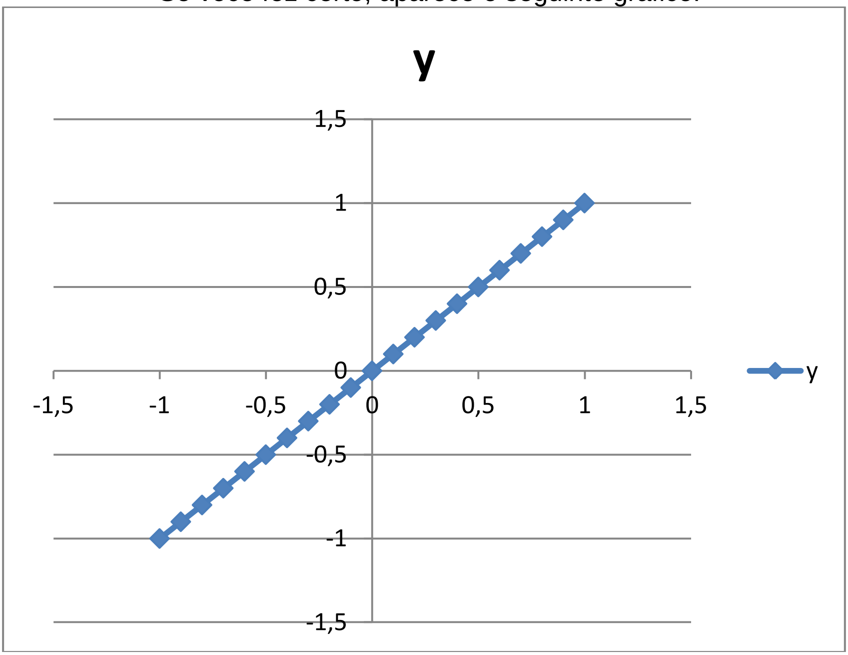


Figura 39 –Gráfico da reta y=x, no intervalo [-1, 1].

Para finalizar, precisamos editar o título, o nome dos eixos e a legenda.

Para editar o **título**, dê um clique duplo sobre o título original e altere para “Gráfico da reta, por João da Silva”. (Aqui, queremos que você coloque o seu nome no título do gráfico, logo, ao invés de “João da Silva”, digite o seu nome e sobrenome). Para editar o nome dos eixos, selecione o gráfico (de um clique sobre o gráfico) e, após, clique no menu *layout*, como mostra a figura abaixo:

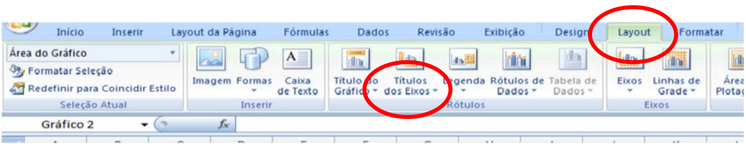


Figura 40 – Editando o título dos eixos do gráfico.

Você encontrará o ícone “Título dos eixos”. Escolha “Título do Eixo Horizontal Principal” e, após “Título Abaixo do Eixo”, digite “eixo x”.

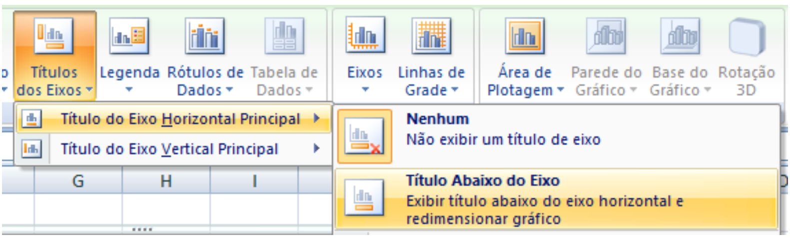


Figura 41 – Escolhendo a posição do título do eixo x.

Para dar nome ao eixo y, em “Título dos eixos”, escolha “Título do Eixo Vertical Principal” e, após a opção “Título Girado”, digite “eixo y”.

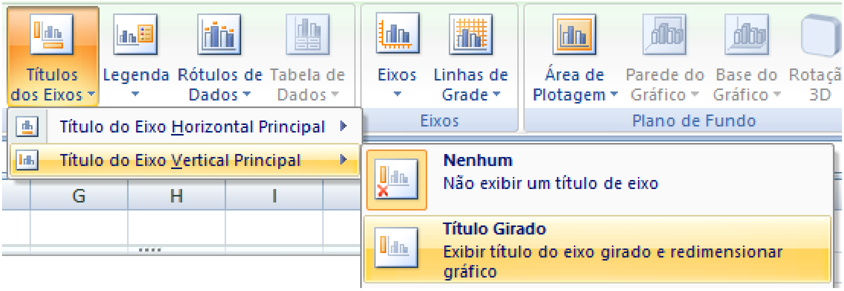


Figura 42 - Escolhendo a posição do título do eixo y.

A aparência final do gráfico deverá ficar semelhante ao gráfico mostrado abaixo:

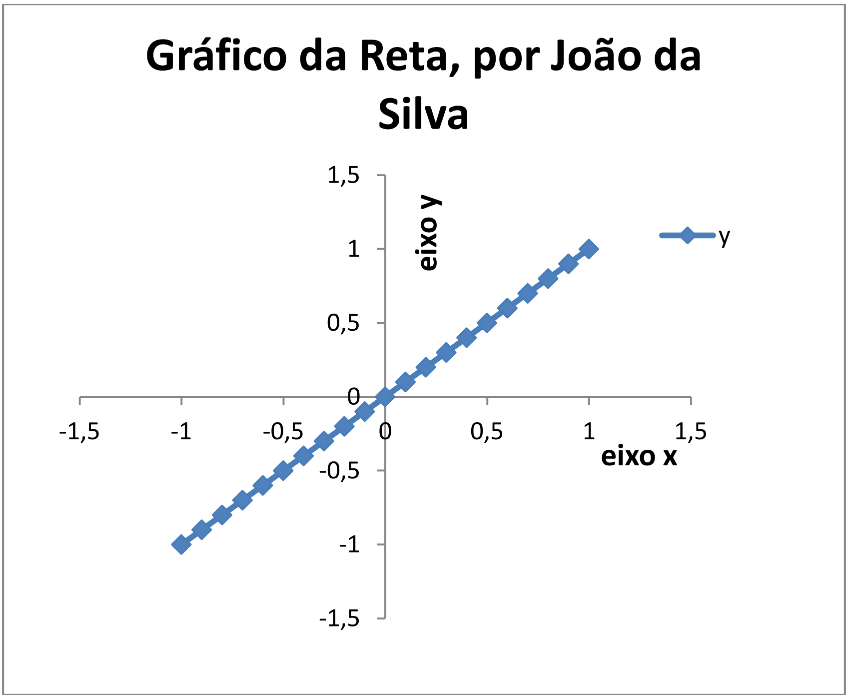


Figura 43 – Gráfico da reta y=x, com título e nome dos eixos.

Agora, repita os passos deste tutorial para gerar os gráficos das funções $y = x^2$ e $y = x^3$. (Basta digitar na célula C3 a fórmula **= B3^2** e arrastar até a linha 23 (para a parábola) e **=B3^3** (para a cúbica).

Por fim, faça um gráfico contendo em um mesmo plano cartesiano as três curvas ($y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$). Você deve obter um gráfico como este mostrado abaixo, mas com o seu nome no título do gráfico.

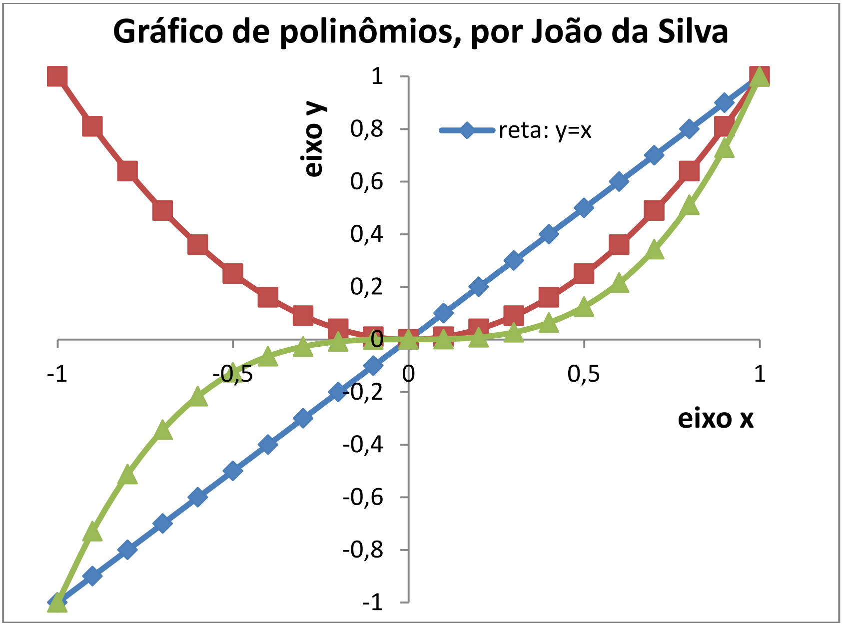


Figura 44 – Gráfico dos polinômios $y = x$, $y = x^2$ e $y = x^3$.

Além disso, você deve criar um arquivo no Word, no qual você deve colar os gráficos feitos nesta tarefa. Ao todo, são quatro gráficos, a saber:

1) da reta;
2) da parábola;
3) da cúbica;
4) reta, parábola e cúbica plotados juntos em um mesmo plano cartesiano (figura acima).

5.2 Inserindo gráficos e fórmulas em um arquivo de texto

Nesta tarefa, você deverá copiar os gráficos feitos na atividade 2, colar em um arquivo de texto, o qual deverá conter um parágrafo introdutório indicando que o gráfico a seguir se refere à função matemática correspondente. Usar o editor de equações para escrever as fórmulas.

6. EDITOR DE APRESENTAÇÕES

Neste tópico, faremos uma visão geral de como organizar uma apresentação em um editor de *slides*. Novamente, destacamos que a proposta é de apresentar noções básicas sobre esse recurso de forma a permitir sua utilização e aprofundamento posteriores.

6.1 Tarefa Apresentação de *Slides*

Inicialmente, sugerimos assistir a um (ou mais) vídeos do YouTube que tratam sobre *PowerPoint*. Isto permitirá a você ter uma visão geral das capacidades deste programa. A seguir, disponibilizamos, em nossa página do curso no Moodle, tutoriais do editor de *slides*, do PowerPoint 2007 (para quem trabalha no sistema operacional Windows) e do BrOffice-Impress (para quem está trabalhando no sistema Linux).

Solicitamos que seja realizada a leitura de um desses tutoriais bem como das orientações gerais para criar uma apresentação, também lá disponibilizada. Além disso, na tarefa **Apresentação**, estão as orientações para a realização dessa atividade. Também disponibilizamos o **Texto Modelo** como sugestão de tema para criar a apresentação dos *slides*.

Tarefa Apresentação

Orientações para realização da tarefa: crie uma apresentação com no mínimo 8 *slides*.

i) No primeiro *slide*, devem constar os dados de apresentação do aluno, com os logos da universidade e do curso, e um título.

ii) Para organizar sua apresentação, use como base o <u>texto modelo</u>. Isto é, prepare uma apresentação, usando alguns tópicos desse texto.

iii) Na apresentação, deverá conter uma figura, uma equação gerada no editor de equações e um gráfico.
iv) A apresentação deve ser enviada em dois arquivos, um no formato **.PPT** e outro no formato **.PPS**.
v) Use um fundo colorido nos *slides*.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Wilson. Muito Além do Jardim de Infância. O desafio do preparo de alunos e professores online. *Revista Brasileira de Educação a Distância*, ano 6, n.36, set./out. 1999.

BELLONI, Maria Luiza. *Educação a Distância*. 4.ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

CORRÊA, Juliane (Org.). *Educação a Distância* – orientações metodológicas. Porto Alegre: ARTMED, 2007.

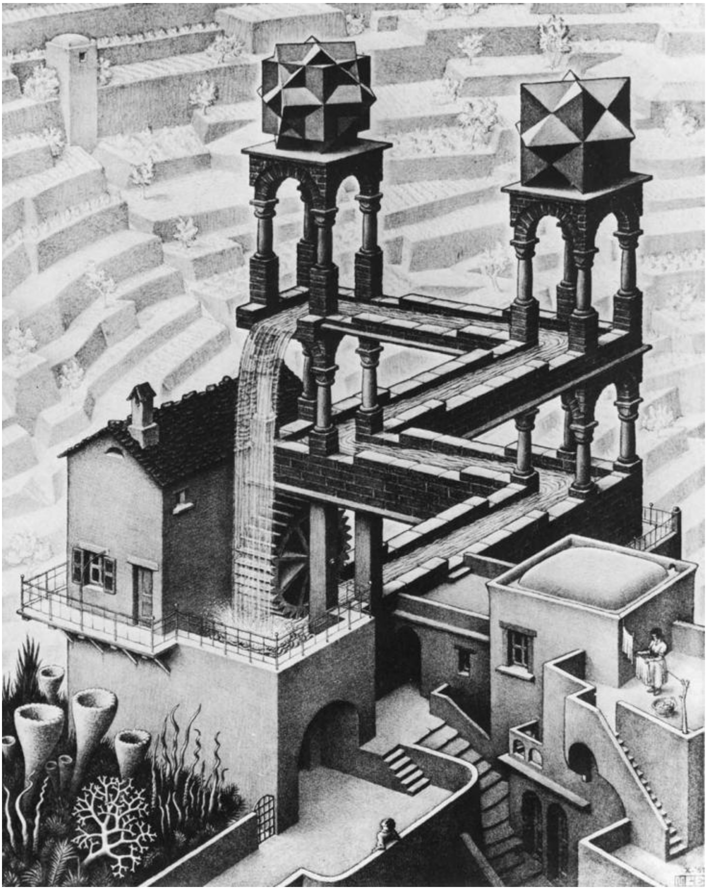
MORAN, José Manuel. O que é Educação a Distância? In: *Escola Net* – Educação Continuada. Disponível em: <http://www.escolanet.com.br/sala_leitura/txt_integral.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.

RODRIGUES, Rosangela Schwartz. Histórico da Educação a Distância. In: *Escola Net* – Educação Continuada. Disponível em: <http://www.escolanet.com.br/sala_leitura/hist_ead.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.

___. *Modelo de Avaliação para Cursos no Ensino a Distância*: Estrutura, Aplicação e Avaliação. 1998. Dissertação (Mestrado), Pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 1998.

___. *Modelo de Planejamento para cursos de pós-graduação a distância em cooperação Universidade-Empresa*. 2004. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2004.

SABBATINI, Renato. *Palestra sobre metodologias em EaD*. Disponível em: <http://groups.google.com.br/group/eadbr/browse_thread/thread/efe58b4c824d49ee>. Acesso em: 20 jun. 2010.



Capítulo 2:
Pesquisa em Educação Matemática: implicações e tendências

PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: IMPLICAÇÕES E TENDÊNCIAS

Denise de Sena Pinho
Narjara Mendes Garcia

A Educação Matemática se apresenta como um campo de estudo bastante amplo e relevante para a formação de professores na atualidade. Dentro desta área, as metodologias de pesquisa e ensino da matemática podem contribuir para a construção de saberes. Sabemos que o ensino da matemática tem sido objeto de estudo de diversos pesquisadores e, ao longo da história, alvo de questionamentos pela comunidade escolar, principalmente pelo público a quem é direcionado: os alunos.

Pode-se dizer que esta disciplina tem passado por transformações e reavaliações constantes, em busca de superar concepções tradicionais de educação que persistem até os dias atuais e para atender às demandas sociais e culturais em constante transformação. Para além do ensinar os conceitos matemáticos, as metodologias de pesquisa e as tendências presentes no campo da Educação Matemática estão direcionadas à formação da identidade dos professores de matemática e à construção dos saberes e competências no entendimento da função pedagógica e social desses professores.

O presente capítulo apresenta aspectos relacionados às discussões realizadas na disciplina Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática, a fim de possibilitar que acadêmicos tenham uma aproximação a referências sobre pesquisa em Educação Matemática, buscando identificar suas funções sociais e implicações estruturais através do saber-pensar a prática educativa e sua relação dialógica com os saberes da experiência no ensino escolar e conhecimentos matemáticos. Visite a página da Sociedade Brasileira de Educação Matemática: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>.

O papel dos professores na Educação Matemática

Dentre os saberes pedagógicos e didáticos, os modelos e as técnicas de ensino tiveram destaque por muito tempo nos cursos de formação docente. Desde o século XVII, quando surgiram as primeiras ideias de Comenius sobre a busca por um método único que possibilitasse ensinar tudo a todos, vários estudiosos realizam investigações, testes e apresentam concepções sobre modos mais adequados para os diversos processos de ensino e aprendizagem nos espaços educativos.

Ao longo do tempo, foi possível perceber que não existe um método, mas diferentes metodologias de ensino que podem orientar os professores na prática pedagógica. Percebeu-se também que estas metodologias de ensino estavam associadas ou partiam da necessidade de contextualização e da diversidade de processos de aprendizagens dos alunos no contexto escolar.

A proposta metodológica do ensino dos conceitos matemáticos deve partir da pesquisa das tendências e estratégias propostas no campo da Educação Matemática, estabelecendo uma relação constante entre os fundamentos conceituais, disciplinares, epistemológicos e metodológicos. É importante associar as metodologias ao cotidiano escolar através de investigações e relações com as práticas de ensino presentes neste contexto, de modo a incentivar a criatividade dos docentes no planejamento de projetos e atividades educativas, na utilização de procedimentos e diferentes recursos pedagógicos.

Relacionando as pesquisas realizadas nas décadas de 1970 e 1980, podemos verificar a mudança de foco no objeto de pesquisa. Primeiramente, os interesses eram mais sobre as aprendizagens que o processo de ensino ou a prática docente em sala de aula. Posteriormente, as investigações se ampliaram, tomando como uma direção o questionamento acerca de como os professores manifestavam seus conhecimentos e suas crenças no processo de ensino e, em outra direção, sobre como os alunos aprendem e compreendem temas específicos da matemática.

Na década de 1980, Thompson (1997)[7] inicia investigações sobre a prática docente dos professores relacionada a suas crenças/concepções. A partir das sequências dos estudos, pode-se constatar que esses fatores constituem, de modo significativo, sua prática pedagógica. Estudos mais recentes, tendo como base o

---

[7] THOMPSON, A. G. A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. Traduzido por Gilberto F. A. de Melo. **Zetetiké**. Campinas: FE. UNICAMP, v.5, n.8, dez. 1997. p.11-14. Publicação semestral do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP. Endereço: UNICAMP – Faculdade de Educação – CEMPEM. Caixa Postal 6120. CEP 13083-970. Campinas, SP. *Site*: <http://www.fae.unicamp.br/servicos/publicacoes-zetetike.html>. *E-mail*: pegedmat@exatas.pucsp.br.

pressuposto de que os professores, em sua prática, elaboram saberes práticos sobre matemática escolar, currículo, atividade, ensino e aprendizagem, revelam que esses saberes se modificam continuamente, especialmente quando os professores implementam uma prática permeada pela reflexão e/ou investigação.

A formação continuada de professores de matemática

Na Educação Matemática, os professores necessitam estar em processo contínuo de formação, devendo ser constante a atualização dos conhecimentos sobre as situações e os assuntos que integram a realidade da população atendida, as metodologias de ensino e os conceitos matemáticos. Segundo Garcia (2012)[8], os profissionais da educação precisam desenvolver competências e habilidades para atuar com os estudantes advindos de diferentes culturas familiares, conforme citado abaixo, no quadro 1.:

Conjunto de saberes e habilidades necessários aos profissionais

Construção do contexto profissional	- Conhecimento disciplinar; - características e necessidades das populações com as quais se trabalha; - cultura de referência; - rol (pedagógico) profissional.
Relações interpessoais	- Respeito; - compreensão/empatia; - comunicação; - apoio; - afeto/cordialidade; - companheirismo; - negociação; - controle do estresse.

Quadro 1. Trecho do quadro extraído de Garcia (2012).

Sabemos ainda que muitos dos conteúdos que deveriam fazer parte da formação inicial (técnica ou acadêmica) não são abordados ou

[8] <http://www.educacaoambiental.furg.br/images/stories/teses/2012/tese%20verso%20final%202012.pdf>.

aprofundados na preparação dos profissionais para atuar no ambiente escolar, que reflete a complexidade da diversidade cultural e social. Diante disso, surge a necessidade da formação continuada (ou permanente) dos profissionais da educação. Tal processo de formação pode influenciar os saberes-fazeres do professor em seu contexto profissional.

A construção destas habilidades e competências pode ser fomentada a partir da criação de espaços de reflexão e compartilhamento de experiências, de mediação de conflitos e de planejamento de estratégias pedagógicas para qualificar o processo de ensino e aprendizagem. Estes espaços de aprendizagem podem ser fomentados no ambiente escolar através de reuniões de professores junto à coordenação pedagógica ou de área bem como pela participação dos professores de matemática em cursos de extensão, aperfeiçoamento e pós-graduação. Momentos que devem propiciar a abordagem de diversos temas envolvendo atuações na construção de um trabalho ou debate coletivo entre professores no próprio espaço escolar. Um fator agravante, que dificulta a realização e participação dos docentes em propostas de formação continuada e permanente, é o reduzido tempo direcionado para essas ações em contraponto à alta carga horária de trabalho.

A pesquisa em Educação Matemática

Podemos pontuar as tendências investigativas com base em Fiorentini e Lorenzato (2009). Esses autores citam as sete temáticas identificadas e descritas mundialmente como mais relevantes por Kilpatrick (1994 apud FIORENTINI; LORENZATO, 2009), são elas:

- processo ensino e aprendizagem da matemática;
- mudanças curriculares;
- utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação – TIC no ensino e na aprendizagem da matemática;
- prática docente, crenças, concepções e saberes práticos;
- conhecimentos e formação/desenvolvimento profissional do professor;
- práticas de avaliação;
- contexto sociocultural e político de ensino e aprendizagem da matemática.

Com relação à temática “processo ensino e aprendizagem da matemática”, podemos encontrar investigações com objetos de pesquisas mais específicos, mudando a concepção anterior das pesquisas em ED, que focalizavam aspectos muitos gerais. Alguns aspectos, como o processo de contagem, o sistema de numeração e as operações fundamentais com números naturais nos anos inicias se destacam como foco de estudos. Sobre mudanças curriculares, Fiorentini e Lorenzato (2009) citam como primeira questão:

> “Quais os fatores que provocam as mudanças curriculares e como estas se processam na prática escolar?” (p. 43).

Ao apontar fatores que levam a mudanças curriculares, é possível perceber que os momentos e as pressões sociais, econômicas e políticas subsidiam modificações. Na década de 60, a chamada Matemática Moderna foi tema de vários estudos sobre a utilização de padrões pelos matemáticos do século XX (ou, pelo menos, por um grande número deles).

Tais trabalhos propuseram uma reformulação nos currículos, com ênfase nos métodos abstratos e gerais do ensino de matemática. Outra mudança no currículo foi o uso de novas tecnologias no ensino de matemática e o terceiro eixo de pesquisa foi atribuir o professor como pesquisador de sua prática em sala de aula.

A inserção tecnológica no âmbito da Educação Matemática foi gradual, visto que teve indícios com o uso de calculadoras (incluindo as gráficas, que produzem gráficos e trabalham com funções algébricas <http://www.rc.unesp.br/gpimem/>). A partir da década de 70, o uso de recursos audiovisuais começa a atrair o interesse dos pesquisadores em Educação Matemática com mais intensidade. Na década de 1990, surgem as Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC; investigações relacionadas contemplam estudos sobre a robótica e o uso de *softwares* matemáticos, entretanto pouco ainda se conhece sobre os impactos do uso das TIC em sala de aula, bem como as suas relações com as metodologias adotadas.

Como não se pode desvincular a prática docente das vivências dos professores, surgem estudos relacionados aos conhecimentos profissionais destes. Assim, fenômenos importantes são utilizados em sala de aula e a natureza do social do saber profissional é foco de investigação. No quadro 2 abaixo, podemos verificar a evidência das fontes de aquisição do saber profissional e seus modos de integração no trabalho docente.

Saberes dos professores	Saberes sociais de aquisição	Modos de integração no trabalho docente
Saberes pessoais dos professores	A família, o ambiente de vida, a educação no sentido lato, etc.	Pela história de vida e pela socialização primária
Saberes provenientes da formação escolar anterior	A escola primária e secundária, os estudos pós-secundários não especializados, etc.	Pela formação e pela socialização pré-profissionais
Saberes provenientes da formação profissional para o magistério	Os estabelecimentos de formação de professores, os estágios, os cursos de reciclagem, etc.	Pela formação e pela socialização profissionais nas instituições de formação de professores
Saberes provenientes dos programas e livros didáticos usados no trabalho	A utilização das “ferramentas” dos programas, livros didáticos, cadernos de exercícios, fichas, etc.	Pela utilização das “ferramentas” de trabalho, sua adaptação às tarefas
Saberes provenientes de sua própria experiência na profissão, na sala de aula e na escola	A prática do ofício na escola e na sala de aula, a experiência dos pares, etc.	Pela prática do trabalho e pela socialização profissional

Quadro 2. Saberes docentes dos professores (TARDIF, 2010, p. 63).

A partir da década de 1990, iniciam-se as investigações com descrições sobre identidades e desenvolvimento profissional de professores de matemática. Como instrumento de coleta de dados, utilizam-se entrevistas, histórias de vida e histórias orais. José Manoel

Ponte (2000)[9] identificou quatro pontos principais sobre formação e desenvolvimento profissional de professores:

- estudos sobre a estrutura dos programas de formação e os papéis desempenhados pelos diversos participantes;
- estudos sobre novas experiências ou iniciativas de formação e seus respectivos objetivos;
- estudos sobre o currículo da formação do professor de matemática visando definir "*standards* de formação";
- estudos sobre recursos e políticas de formação do professor.

Segundo Ponte (2000), a ênfase atual sobre formação de professores tem como foco os processos de formação, ou melhor, de aprendizagem profissional. Dentre as pesquisas, destacam-se: os estudos sobre a prática pedagógica, a pesquisa-ação e os processos colaborativos.

Influência dos franceses nas pesquisas em Educação Matemática

Sobre a prática pedagógica, pesquisas tomam como referências os estudos diferenciados desenvolvidos pelos franceses. Dentre estes, destacamos:

- Obstáculos didáticos epistemológicos, de Guy Brousseau (1973). Este estudioso desenvolveu os conceitos a partir dos estudos de A Formação do Espírito Científico de Gaston Bachellard (1938). Os obstáculos no campo da matemática aparecem com mais frequência na fase da aprendizagem e da síntese dos conhecimentos e interferem com maior intensidade na etapa da gênese das primeiras ideias.

Ao ocorrer o conflito com passagem do conhecimento natural para o saber científico, surge o obstáculo. No contexto escolar, os obstáculos didáticos mostram as dificuldades que podem aparecer no processo da aprendizagem. Por exemplo: quando o professor insiste em afirmar que multiplicar significa aumentar, esse procedimento faz

[9] A investigação sobre o professor de matemática: problemas e perspectivas. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Serra Negra. **Anais**. Serra Negra. SBEM. 2000. 27 p. No prelo.

com que o aluno não entenda porque 5 multiplicado por 1/3 resulta em um número menor que 5. Segundo Pais (2006):

> A superação dos vínculos com os saberes do cotidiano não é uma tarefa serena nem natural: é mais um dos desafios metodológicos inerentes ao trabalho do professor. Assim sendo, uma parte da multiplicidade do fenômeno cognitivo revela-se pelos conflitos dessa passagem. Todas essas dificuldades assumem um caráter ainda mais particular quando se trata da educação matemática para os alunos que vivenciam a experiência do início da escolaridade fundamental (p. 66).

Os obstáculos epistemológicos possuem raízes históricas e culturais, estando também relacionadas a dificuldades encontradas no avanço de alguns conceitos matemáticos. Exemplos disso são: o problema do zero absoluto versus zero relativo, a incomensurabilidade dos irracionais etc.

- Transposição Didática, de Ives Chevallard (1998). O conceito é aprofundado em seu livro: La Transposition Didactique: du savoir savant au savoir enseigné, o qual relata o processo que passa o saber produzido historicamente e cientificamente sistematizado ao se transformar em conteúdos de saber escolar situados, contextualizados e relevantes. Um exemplo de Transposição didática descrita por Chevallard é coconceito de distância. Na época de Euclides, o conceito de distância entre dois pontos era feito de forma intuitiva. Em 1906, Fréchet, tendo como objeto trabalhar com os espaços de funções, generalizou-o. Este foi inserido no currículo escolar francês em 1971.

- Contrato Didático, de Guy Brousseau (1986). O referido pesquisador introduz esse termo ao descrever o estudo de relações que permeiam a sala de aula. O conjunto de comportamentos esperados pelos alunos em relação ao professor e vice-versa determinam esse contrato.

Tendências em Educação Matemática

Existem diferentes maneiras de identificar tendências em educação matemática. Fiorentini (2009) utiliza a categorização abaixo, seguindo uma análise histórica do ensino da matemática ao longo dos anos:

	empírico-ativista:	Tendência formalista-moderna ou Movimento da Matemática Moderna	Tendência tecnicista	Tendência construtivista	Tendência histórico-crítica	Tendência socioetnocultural
Aprendizagem	- Matemática ensinada pelos seus valores utilitários, suas relações com outras ciências e suas aplicações para resolver problemas do dia a dia.	- Uso da linguagem no rigor e nas justificativas. - procurou unificar três campos da matemática: teoria dos conjuntos, estruturas algébricas e relações e funções	- Conteúdos apresentados como instrução programada	Conhecimento matemático resultante da ação interativa e reflexiva do indivíduo com o meio ambiente	Aprendizagem significativa	Visão antropológica, social e política da matemática
método	- Atividades experimentais, resolução de problemas e métodos científicos.	Atividades distantes de aplicações práticas.	- Recursos e a técnicas de ensino.	- O aprender a aprender e desenvolvimento do pensamento lógico matemático		- Parte de problemas da realidade inseridos em diversos grupos culturais, que gerarão temas de trabalho na sala de aula
Aluno e professor	- O aluno aprende fazendo e o professor se torna orientador e facilitador da aprendizagem	- Ensino centrado no professor	- Alunos e professores são executores de um processo desenvolvido por especialista		- O aluno consegue atribuir sentido e significado às ideias matemáticas e sobre elas é capaz de pensar, estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar	

Ao partir do pressuposto de que tendências são constituídas como algo dinâmico e complexo, emergindo a partir de pesquisas realizadas no ambiente escolar ou fora dele, nas pesquisas temáticas dos eventos da organização das sociedades científicas, tomamos algumas tendências consideradas por grupos de trabalhos como pertinentes ao ensino de matemática, particularmente relacionadas a metodologias, métodos e concepções de ensino. Aqui, citaremos algumas da atualidade. Ademais, ressaltamos que a utilização pelo professor das tendências pode ser feita de maneira articulada e cabe a ele, a partir de seus objetivos e concepções metodológicas, escolher a estratégia de ensino que melhor se aplica em sala de aula.

- Etnomatemática

Linha de investigação desenvolvida e estudada pelo pesquisador brasileiro Ubiratan D´Ambrósio (1990). Para compor a palavra "Etnomatemática", o educador usou as raízes **tica**, **matema** e **etno**, tendo como significado diversas maneiras, técnicas, habilidades (**ticas**) de explicar, de entender, de lidar e de conviver com (**matema**) diferentes contextos naturais e socioeconômicos da realidade (**etnos**).

Para saber mais sobre esse assunto, visite o *blog*: <http://professorubiratandambrosio.blogspot.com.br/>.

Segundo D´Ambrósio (2007),

> "A pesquisa em etnomatemática deve ser feita com muito rigor, mas a subordinação desse rigor a uma linguagem e a uma metodologia padrão, mesmo tendo caráter interdisciplinar, pode ser deletério ao Programa Etnomatemática. Ao reconhecer que não é possível chegar a uma teoria final das maneiras do saber/fazer matemático de uma cultura, quero enfatizar o caráter dinâmico deste programa de pesquisa." (p. 17).

- Informática e Educação Matemática

Ao considerar que o uso de informática e calculadoras pode ampliar os modos de pensar, o uso de simuladores, experimentação, *softwares* em um movimento de oralidade, escrita, imagens e comunicação instantânea, aponta Lévy (1998):

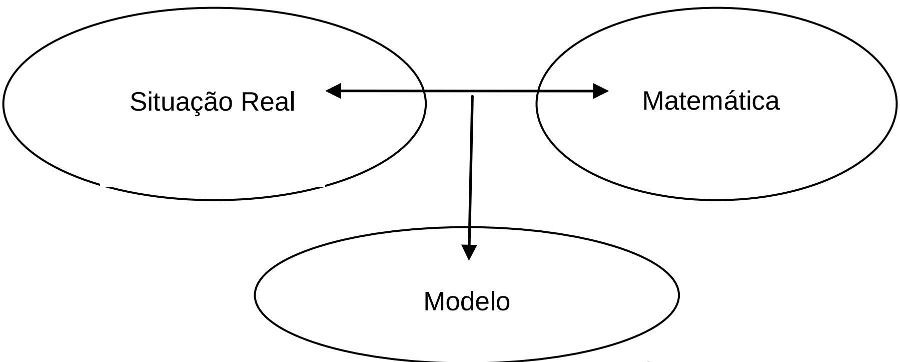
mesmo de influir sobre o aluno, o uso dos computadores obriga os professores a repensar o ensino de sua disciplina [...] Graças aos programas de simulação , o estudante interage com modelos de processos complexos cujo controle na escala real é impossível. [...] A informática para o ensino pode ser considerada como sendo mais do que uma simples ferramenta de transmissão e gestão da informação." (p. 27).

Para maiores informações, visite o *site*: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/>.

- Modelagem matemática

A modelagem matemática envolve a obtenção de um modelo, possibilitando uma maneira de fazer com que a matemática tenha uma interação com a realidade. Para construção de um modelo, são necessárias criatividade e intuição, além do conhecimento de matemática, sendo que é importante interpretar o contexto, identificar as variáveis e o conteúdo matemático que melhor se adapte à determinada situação. Veja a representação da figura 1.

Modelagem matemática



Fonte: Biembengut e Hein (2000)[10]

[10] BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000. 127 p.

Segundo Pais (2006),

> "Um dos objetivos de trabalhar com a resolução de resolução de problemas é, de maneira geral, contribuir no desenvolvimento intelectual do aluno, no que diz respeito aos aspectos específicos do saber matemático. Além do mais, através dessa estratégia é possível interligar a Matemática com outras disciplinas ou com situações do mundo vivenciado pelo aluno." (p.131).

Para Bassanezi (2002), modelagem é uma nova forma de encarar a Matemática e "consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real." (p.16). Leia o artigo de Jonei Cerqueira Barbosa, que discute a modelagem matemática como abordagem pedagógica: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/modelagem.pdf>.

- Resolução de problemas

A articulação da matemática com outras disciplinas pode ser efetiva ao se trabalhar com resolução de problemas, ou ainda com situações do mundo vivenciado pelo aluno. Pesquisas mostram, como estratégia metodológica, que o problema é desafiador ao aluno no momento da interpretação, pelo fato de que muitos enunciados são redigidos com interpretações dúbias e, por outro lado, há a falta de hábito de leitura e escrita por parte do estudante.

Pesquisa qualitativa em educação matemática

Os fenômenos humanos não podem ser quantificados com a mesma precisão que os naturais, devem-se considerar aspectos subjetivos, como as emoções, atitudes e outros. Estes também são responsáveis pela transformação social e, portanto, determinantes na evolução da sociedade ao longo do percurso histórico.

Pode-se, então, inferir que pesquisadores sociais não almejam a quantificação, mas a compreensão das relações humanas imersas em crenças, valores e hábitos. Pesquisa-se a vivência, o cotidiano, a experiência. Lida-se com a ação humana. Como afirma Minayo (2001):

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (p. 21).

Como fases de uma pesquisa, mesmo sabendo que ela se constitui como processo dinâmico em um movimento constante de idas e vindas, podemos ter como guia de orientação quatro fases Fiorentini e Lorenzato (2009):

> - A fase do planejamento, momento importante que compreende a fase exploratória e preparatória da pesquisa e que culmina com a elaboração do projeto de pesquisa;
> - A fase de dados e/ou de documentos, os quais irão constituir o material de análise do estudo;
> - A fase da análise propriamente dita, momento em que o pesquisador tenta organizar, sistematizar e tratar, interpretativa e analiticamente, os dados e as informações;
> - E, finalmente, a fase de elaboração do relatório final da pesquisa, momento em que o pesquisador tenta descrever o processo desenvolvido, apresenta os principais resultados e produz as conclusões. (p. 80)

REFERÊNCIAS

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. São Paulo: Contratempo, 1996.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

_____. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BROUSSEUAU, Guy. **Théorie des situations didactiques**. Paris: La Pensée Sauvage, 1998.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique**. Paris: La Pensée Sauvage, 1991.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Ática, 1990.

_____. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 2.ed. 3. reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa**. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 1997.

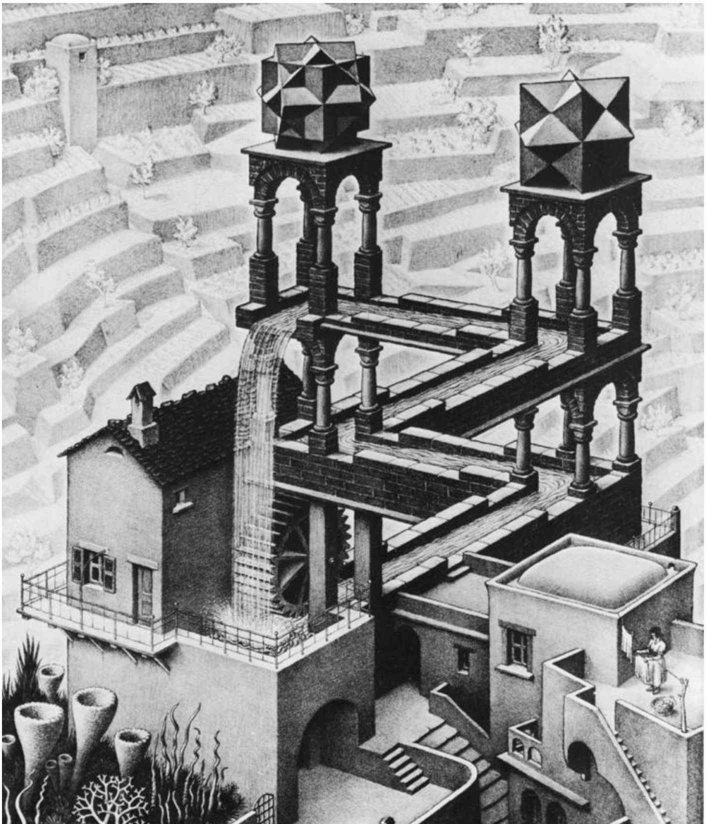
FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3.ed. rev. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2009.

LÉVY. Pierre. **A máquina universo: criação, cognição e cultura informática**. Traduzido por Bruno Charles Magne. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 19.ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

PAIS, Luis Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 10.ed. Petrópolis: Vozes, 2010.



Capítulo 3:
Mergulhando Indivíduos e Variáveis em Espaços Vetoriais Euclidianos

MERGULHANDO INDIVÍDUOS E VARIÁVEIS EM ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDIANOS

Catia Maria dos Santos Machado
Celiane Costa Machado
Elaine Corrêa Pereira

1. Introdução

Pretendemos mostrar neste trabalho como é possível ensinar, de forma integrada, conteúdos das disciplinas de Álgebra Linear e Estatística ministradas no ciclo básico dos cursos superiores. Entendemos que o estudante pode ter interesse em se aproximar de conceitos matemáticos, mesmo que não domine sucessivos algebrismos ou a utilização correta de fórmulas matemáticas. Como professoras das disciplinas de Fundamentos de Álgebra e Métodos de Contagem, identificamos as dificuldades por parte dos alunos na compreensão e relação dos conceitos aprendidos.

Segundo Mello e Mello (2013),

> há necessidade, conforme indicam as diretrizes curriculares dos cursos superiores, das chamadas Disciplinas Integradoras, que têm a responsabilidade de agregar todo o conhecimento adquirido em um segmento do curso e utilizá-lo de forma eficiente. (p.03).

De alguma forma, em praticamente todos os cursos, existem os Projetos Finais de Graduação, em que o aluno tem necessidade de utilizar conceitos aprendidos ao longo do seu curso. A proposta é mostrar que a Estatística pode ser uma disciplina integradora, utilizando conceitos de Álgebra Linear, o que permite reduzir o descompasso existente entre essas disciplinas, tornando possível que o aluno enxergue o benefício do aprendizado.

2. Integração entre Álgebra Linear e Estatística

O ensino de Espaços Vetoriais Euclidianos não deve ficar restrito a prova de axiomas, para que dessa forma o estudante perceba o significado dessa estrutura algébrica, assim como sua importância no contexto das aplicações do mundo real. Podemos trabalhar o conceito de Espaço Vetorial Euclidiano mostrando que em Estatística quando pretendemos fazer análise de dados necessitamos entender a estrutura da população dos indivíduos, ou seja, geralmente existem dois conjuntos: os indivíduos e as variáveis relativas a esses indivíduos.

Dos indivíduos, tomamos certo número de variáveis, por exemplo, as notas obtidas por um aluno nos quatro bimestres durante um ano letivo. Uma variável é quantitativa quando toma seus valores numa escala numérica, mais precisamente, uma variável é quantitativa quando o conjunto dos valores que toma nos indivíduos está incluído no conjunto dos números reais e quando se podem efetuar, com a variável, as operações algébricas usuais: adição e multiplicação por escalar, em que a distância entre dois indivíduos e entre duas variáveis podem ser determinadas. É então mostrado ao aluno que para determinar a distância entre indivíduos e/ou variáveis não é necessário provar os axiomas de Espaço Vetorial Euclidiano, mas é preciso utilizar os conceitos de Espaços Vetoriais Euclidianos para chegar a essa conclusão. Dessa forma, a Estatística pode cumprir o papel de disciplina integradora, fazendo a ligação entre a teoria e aplicação.

2.1. Noções de Medida

Consideremos inicialmente o plano $\mathbb{R}^2$, munido de um referencial cartesiano ortogonal (eixos perpendiculares) e um ponto P de coordenadas (x, y), representado na Figura 2.1.

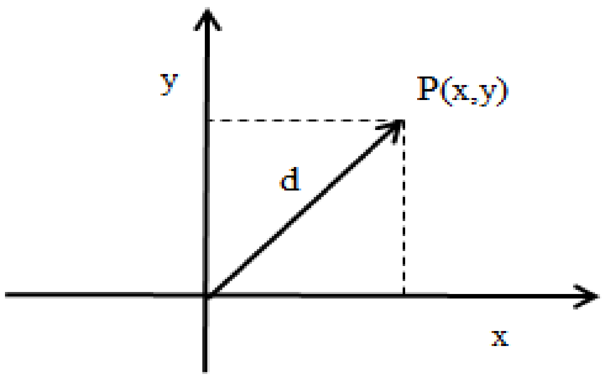


Figura 2.1: Sistema de coordenadas ortogonais.

Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos determinar a distância do ponto P à origem como:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Podemos também interpretar este resultado dizendo que o comprimento do vetor $v = (x, y)$ é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$, que chamaremos de norma do vetor e denotaremos da seguinte forma:

$$|v| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Analogamente, a distância d entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é a norma do vetor diferença, isto é:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Salientamos que se $|v| = 1$, o vetor v é chamado de vetor unitário.

Consideremos agora o ângulo θ entre os vetores u e v, conforme pode ser observado na Figura 2.2.

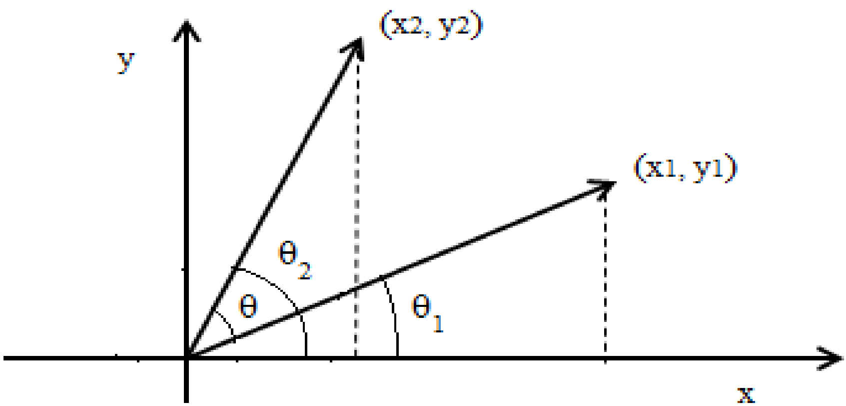


Figura 2.2: Ângulo entre dois vetores.

O ângulo entre os vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ é dado por:

$$cos\theta = cos(\theta_2 - \theta_1) = cos\theta_2 cos\theta_1 + sen\theta_2 sen\theta_1$$

onde, a partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos:

$$cos\theta_1 = \frac{x_1}{|u|} \qquad sen\theta_1 = \frac{y_1}{|u|} \qquad cos\theta_2 = \frac{x_2}{|v|} \qquad sen\theta_2 = \frac{y_2}{|v|}.$$

Logo,

$$cos\theta = \frac{x_2.x_1}{|u|.|v|} + \frac{y_2.y_1}{|u|.|v|} = \frac{< u, v >}{|u|.|v|}$$

O produto dos vetores u e v denotado por $< u, v >$ recebe o nome de produto interno usual ou produto escalar. O produto escalar tem uma relação importante com a norma de um vetor v, ou seja, $|v| =< v, v >$.

Todo vetor não nulo pode ser normalizado, fazendo $\frac{v}{|v|}$, no qual $\frac{v}{|v|}$ é unitário, uma vez que:

$$\frac{v}{|v|}.\frac{v}{|v|} = \frac{v.v}{|v|^2} = \frac{|v|^2}{|v|^2} = 1$$

Os vetores u e v, representados na Figura 2.3, podem ser escritos como combinação linear dos vetores unitários $i = (1,0)$ e $j = (0,1)$, como:

$$u = x_1 i + y_1 j \quad \text{e} \quad v = x_2 i + y_2 j$$

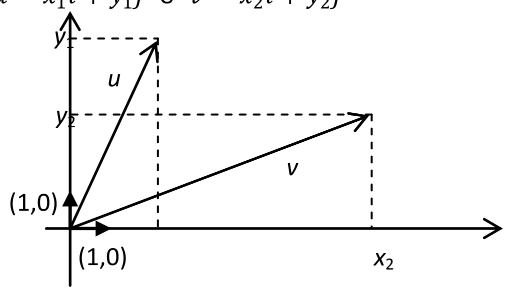


Figura 2.3: Representaçãode vetores em um Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais.

Assim, se multiplicarmos escalarmente os vetores u e v, chegaremos ao mesmo resultado obtido anteriormente, ou seja:

$$< u,v >= (x_1 i + y_1 j).(x_2 i + y_2 j) = x_1 x_2 i.i + x_1 y_2 i.j + y_1 x_2 j.i + y_1 y_2 j.j$$
$$< u,v >= x_1 x_2 |i||i| cos 0° + x_1 y_2 |i||j| cos 90° + y_1 x_2 |j||i| cos 90° + y_1 y_2 |j||j| cos 0°$$
$$< u,v >= x_1 x_2 |i|^2 + y_1 y_2 |j|^2 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Podemos observar através da Figura 2.3 que os vetores u e v representam as diagonais dos paralelogramos, cujos lados são representados pelos módulos dos vetores $|x_1 i|$, $|y_1 j|$ e $|x_2 i|$, $|y_2 j|$, respectivamente.

O produto interno também pode ser definido a partir de um referencial não necessariamente ortogonal. Na Figura 2.4, temos um sistema de coordenadas com um referencial não ortogonal (eixos não perpendiculares).

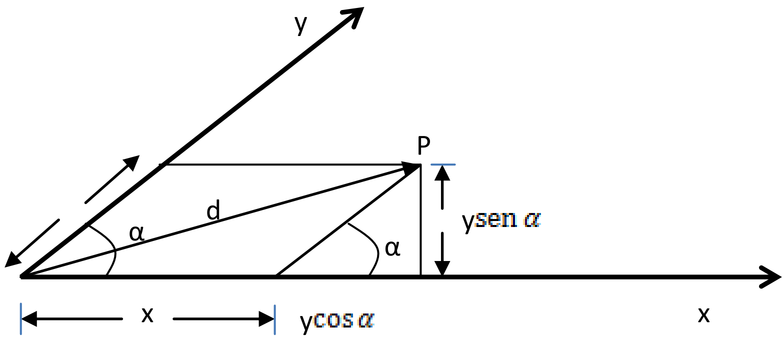


Figura 2.4: Sistema de coordenadas não ortogonais.

Usando o teorema de Pitágoras calculamos a distância da origem até o ponto P, cujas coordenadas em relação ao referencial xOy são (x, y).

$$d = \sqrt{(x + ycos \propto)^2 + (ysen \propto)^2} = \sqrt{x^2 + (2cos \propto)xy + y^2}$$

O vetor u, representado na Figura 2.5, também pode ser escrito como uma soma de vetores, ou seja:

$$u = (x_1 + y_1 cos \propto)i + (y_1 sen \propto)j$$

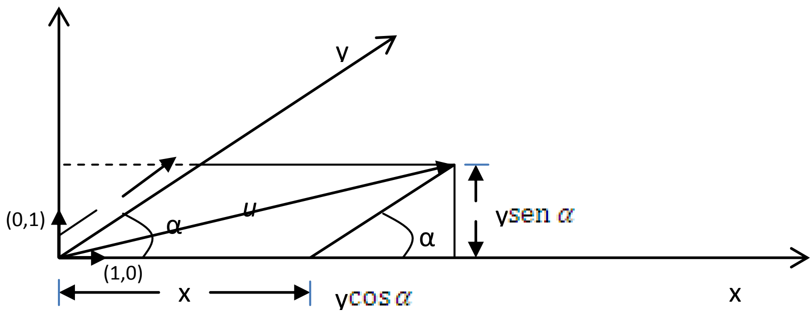


Figura 2.5: Representação de vetores em um Sistema de Coordenadas Cartesianas não Ortogonais.

Analogamente, como foi feito anteriormente, se multiplicarmos escalarmente os vetores $u = (x_1 + y_1 cos \propto)i + (y_1 sen \propto)j$ e $v = (x_2 + y_2 cos \propto)i + (y_2 sen \propto)j$, teremos o seguinte resultado:

$$< u, v >= [(x_1 + y_1 cos \propto)i + (y_1 sen \propto)j].[(x_2 + y_2 cos \propto)i + (y_2 sen \propto)j]$$
$$< u, v >= (x_1 + y_1 cos \propto)(x_2 + y_2 cos \propto)|i||i|cos0° +$$
$$+(x_1 + y_1 cos \propto)(y_2 sen \propto)|i||j|cos90° +$$
$$+(y_1 sen \propto)(x_2 + y_2 cos \propto)|j||i|cos90° +$$
$$+(y_1 sen \propto)(y_2 sen \propto)|j||j|cos0°$$
$$< u, v >= x_1x_2 + x_1y_2 cos \propto +y_1x_2 cos \propto +y_1y_2(cos \propto)^2 + y_1y_2(sen \propto)^2$$
$$< u, v >= x_1x_2 + x_1y_2 cos \propto +y_1x_2 cos \propto +y_1y_2$$

A partir da igualdade acima temos:

$$< u, u >= x^2 + (cos \propto)xy + (cos \propto)xy + y^2 = |u|^2$$

Portanto, novamente a noção de distância poderia ser dada a partir de um produto interno de vetores. Concluímos que o processo usado para se determinar medidas num espaço pode variar e, em cada caso, precisamos ser bem claros sobre o produto interno e, consequentemente, sobre a norma que estamos trabalhando.

2.2. Espaços Vetoriais

Seja um conjunto V, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de adição e multiplicação por um escalar (um número real), isto é:

$$\forall\, u, v \in V, \qquad u + v \in V$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, u \in V, \alpha u \in V\ .$$

O conjunto com essas duas operações é chamado espaço vetorial real, se forem verificadas as seguintes propriedades:

i) $u + v = v + u, \forall\, u, v \in V$
ii) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall\, u, v, w \in V$
iii) $\exists\, 0 \in V, \forall\, u \in V, u + 0 = u$
iv) $\forall\, u \in V, \exists(-u) \in V, u + (-u) = 0$
v) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u,\ \ \forall\, u, v \in V,\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
vi) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v,\ \ \forall\, u, v \in V,\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
vii) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta v,\ \ \forall\, u \in V,\ \ \forall \alpha, \beta\ \in \mathbb{R}$
viii) $1. u = u, \forall\, u \in V$.

A vantagem dessa definição é que ela não se preocupa com o problema do que seja um vetor, por exemplo, um vetor do $\mathbb{R}^3$ é um ponto, um segmento de reta orientado ou uma matriz 3x1. A definição lida somente com o comportamento algébrico dos elementos de um espaço vetorial. No caso de $\mathbb{R}^3$, qualquer que seja o ponto de vista adotado, o comportamento algébrico será o mesmo. O matemático isola as características que todos esses objetos têm em comum, ou seja, as propriedades que fazem com que todos se comportem igualmente. Assim, define-se uma nova estrutura, chamada de espaço vetorial real. Dessa forma, um "vetor" é agora simplesmente, um elemento de um espaço vetorial e não necessita mais estar associado a um segmento de reta orientado.

Um espaço vetorial real, de dimensão finita, no qual está definido um produto interno, é um espaço vetorial euclidiano.

3. Produto Interno e Estatística

Uma situação que aparece frequentemente na análise de experimentos é a seguinte, verificamos que o fenômeno estudado tem as possibilidades distintas $S_1,\ S_2, \dots, S_n$ de se manifestar, cada uma delas com probabilidade $p_1,\ p_2, \dots, p_n$, respectivamente. O conjunto

$S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ é chamado de espaço amostral e $D = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ a matriz diagonal das probabilidades.

Se em um espaço amostral $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ com respectiva matriz de probabilidades D, associamos a cada elemento S_i do espaço amostral, um valor x_i, teremos um vetor $x = [x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ que chamaremos de variável aleatória.

Dado um espaço amostral $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, a matriz de probabilidades D e uma variável aleatória $x = [x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ denominamos de valor esperado ou média aritmética ponderada ao número $\bar{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$ ou sob forma matricial como:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \langle x, (1,1,\dots,1)\rangle_D$$

$$\bar{x} = x^T D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.1: Consideremos um grupo de 6 alunos do qual nós conhecemos as notas obtidas pelas prova 1 e prova 2, dadas pela Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Notas dos alunos

ALUNOS		PROVAS	
		Prova 1 (x^1)	Prova 2 (x^2)
Aluno 1	e_1	3	1
Aluno 2	e_2	0	1
Aluno 3	e_3	5	0
Aluno 4	e_4	6	1
Aluno 5	e_5	5	3
Aluno 6	e_6	5	6

Consideramos como espaço amostral o conjunto dos alunos numerados de 1 a 6, $S = \{1,2,3, \dots, 6\}$. Como a probabilidade é igual de se considerar as notas de qualquer aluno é a mesma, então a matriz de probabilidades: $D = \frac{1}{6}I$, em que I é a matriz identidade.

A variável aleatória que dá as notas obtidas pela Prova 1 é $x^1 = (3{,}0{,}5{,}6{,}5{,}5)$ e a que dá as notas obtidas pela Prova 2 é $x^2 = (1{,}1{,}0{,}1{,}3{,}6)$.

Vamos calcular a média da Prova 1:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = 4.$$

3.1. Dispersão e Variabilidade

A média aritmética, ainda que considerada como um número que tem a faculdade de representar uma série de valores e não pode, por si mesma, destacar o grau de homogeneidade que existe entre os valores que compõem o conjunto.

Chamamos de dispersão ou variabilidade a maior ou menor diversificação dos valores em torno da média.

A variância é definida como:

$$Var(x) = p_1(x_1 - \bar{x})^2 + p_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + p_n(x_n - \bar{x})^2$$

Ainda podemos representar a variância sob a forma matricial:

$$Var(x) = x^T D x$$

O desvio padrão é definido como a raiz quadrada da variância, ou seja:

$$s(x) = \sqrt{Var(x)}.$$

Veremos a ligação desses conceitos com o conceito de produto interno, a relação é estabelecida da seguinte forma, nas condições anteriores, consideremos em $\mathbb{R}^n$, o seguinte produto interno:

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle_D = p_1 x_1 y_1 + p_2 x_2 y_2 + \cdots + p_n x_n y_n$$

ou sob a forma matricial:

$$x^T D y$$

Temos, então, em relação a este produto interno:

$$\bar{x} = \langle x, (1,1, \dots ,1) \rangle_D$$
$$Var(x) = \left(s(x)\right)^2 = \langle (x - \bar{x}), (x - \bar{x}) \rangle_D = (x - \bar{x})^T D (x - \bar{x})$$
$$s(x) = |x - \bar{x}|_D$$

Portanto, para qualificar os valores de uma dada variável, ressaltando a maior ou a menor dispersão ou variabilidade entre esses valores e a sua média, a estatística recorre às medidas de dispersão ou variabilidade.

Exemplo 3.2: Consideremos as notas obtidas por 3 alunos nos quatro bimestres, conforme a Tabela 3.2

Notas dos Alunos por Bimestre

Alunos	Notas			
	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	4º Bimestre
A	7	7	7	7
B	5	6	8	9
C	0	8	10	10

Observamos na Tabela 3.2 que o conjunto A é mais homogêneo que os conjuntos B e C, já que todos os alunos possuem a mesma média. O conjunto B, por sua vez, é mais homogêneo que o conjunto C, pois há menor diversificação dos valores de uma variável, em torno da média (um valor de tendência central). Tomada como ponto de comparação, podemos, então, dizer que o conjunto A apresenta dispersão ou variabilidade nula e que o conjunto B apresenta uma dispersão ou variabilidade menor que o conjunto C.

Exemplo 3.3: Voltando ao exemplo 3.1, vamos calcular a variância e o desvio padrão da Prova 1.

$$Var(x) = \frac{1}{6}(3-4)^2 + \frac{1}{6}(0-4)^2 + \frac{1}{6}(5-4)^2 + \frac{1}{6}(6-4)^2 + \frac{1}{6}(5-4)^2 + \frac{1}{6}(5-4)^2$$

$$Var(x) = \frac{1}{6}(-1)^2 + \frac{1}{6}(-4)^2 + \frac{1}{6}(1)^2 + \frac{1}{6}(2)^2 + \frac{1}{6}(1)^2 + \frac{1}{6}(1)^2$$

$$Var(x) = \frac{24}{6} = 4$$

$$\mathrm{s}(x) = \sqrt{4} = 2$$

4. Espaço dos Indivíduos

Um indivíduo é definido como sendo um ponto com m das coordenadas e é considerado um vetor no espaço vetorial $\mathbb{R}^m$, denominado espaço dos indivíduos. Identifica-se o indivíduo i por e_i e o vetor e_i é representado por:

$$e_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^m)$$

Exemplo 4.1: Suponhamos que queremos representar dois indivíduos a partir de três variáveis/características que são idade, salário e número de filhos.

Então se o indivíduo 1 tem 30 anos, um salário mensal de R$ 900,00 e 2 filhos e o indivíduo 2 tem 42 anos, um salário mensal de R$ 1.500,00 e tem 1 filho, representamos esses indivíduos da seguinte forma:

Indivíduo 1: $e_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3) = (30, 900, 5)$
Indivíduo 2: $e_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3) = (42, 1500, 1)$

Podemos observar que o índice inferior em x_1^2 indica o indivíduo (nesse caso o indivíduo 1), enquanto que o índice superior indica a variável/característica (nesse caso a variável 2). Portanto, $x_1^2 = 900$, significa que a segunda variável (salário) do individuo 1 é igual a 900.

4.1 Medida da distância entre dois indivíduos

Em Estatística cada dimensão corresponde a uma variável expressa em uma unidade particular. Assim, cabe perguntar: “Como calcular a distância entre dois indivíduos descritos pelas variáveis: idade, salário e número de filhos?”

Para dar importância diferenciada a cada variável (de 1 até m), podemos tomar a distância entre dois indivíduos e_1 e e_2 calculada da seguinte forma:

$$d^2 = p_1(x_1^1 - x_2^1)^2 + p_2(x_1^2 - x_2^2)^2 + \cdots + p_m(x_1^m - x_2^m)^2$$

Na qual $p_1, p_2, \dots, p_m$ representam as probabilidades associadas a cada variável. No caso particular em que todas as variáveis têm a mesma importância teremos: $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = 1$.

De uma forma mais geral, podemos constatar que a distância entre dois indivíduos e_1 e e_2 pode ser expressa como:

$$d^2(e_1; e_2) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} m_{kj} \left(x_1^k - x_2^k\right) \left(x_1^j - x_2^j\right)$$

Dessa maneira, também pode ser escrita na forma matricial:

$$d^2(e_1; e_2) = (\overline{e_1} - \overline{e_2})^T M (\overline{e_1} - \overline{e_2})$$

Em que $M = D_{1/s^2} = \begin{pmatrix} 1/s_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/s_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/s_m^2 \end{pmatrix}$. Os vetores $\overline{e_1}$ e $\overline{e_2}$ representam cada um dos indivíduos, a partir das variáveis centradas em si. Portanto, $\overline{e_1} = x_1^i - \bar{x}^i$ (desvio do indivíduo 1 em relação à média) e $\overline{e_2} = x_2^i - \bar{x}^i$ (desvio do indivíduo 2 em relação à média).

Exemplo 4.2: vamos retomar os indivíduos enunciados no Exemplo 4.1, ou seja:

Indivíduo 1: $e_1 = (x_1^1\ , x_1^2, x_1^3) = (30, 900, 5)$
Indivíduo 2: $e_2 = (x_2^1\ , x_2^2, x_2^3) = (42, 1500, 1)$

O objetivo nesse momento é calcular a distância entre esses dois indivíduos.

Inicialmente vamos calcular a média de cada uma das variáveis:

$$\bar{x}^1 = \frac{30 + 42}{2} = \frac{72}{2} = 36$$
$$\bar{x}^2 = \frac{900 + 1500}{2} = \frac{2400}{2} = 1200$$
$$\bar{x}^3 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Como a distância entre os indivíduos e_1 e e_2 é dada por:

$$d^2(e_1; e_2) = (\overline{e_1} - \overline{e_2})^T M (\overline{e_1} - \overline{e_2})$$

Temos:

$$\overline{e_1} = \begin{pmatrix} x_1^1 - \bar{x}^1 \\ x_1^2 - \bar{x}^2 \\ x_1^3 - \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 - 36 \\ 900 - 1200 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -300 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overline{e_2} = \begin{pmatrix} x_2^1 - \bar{x}^1 \\ x_2^2 - \bar{x}^2 \\ x_2^3 - \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 - 36 \\ 1500 - 1200 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 300 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Agora vamos calcular a variância relacionada a cada uma das variáveis:

Variável 1

$$s_1^2 = Var(x^1) = \sum_{i=1}^{2} \frac{(x_i^1 - \bar{x}^1)^2}{2} = \frac{(x_1^1 - \bar{x}^1)^2 + (x_2^1 - \bar{x}^1)^2}{2}$$

$$s_1^2 = Var(x^1) = \frac{(30-36)^2 + (42-36)^2}{2} = \frac{(-6)^2 + (6)^2}{2}$$
$$= \frac{72}{2} = 36\ anos^2$$

Variável 2

$$s_2^2 = Var(x^2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{(x_i^2 - \bar{x}^2)^2}{2} = \frac{(x_1^2 - \bar{x}^2)^2 + (x_2^2 - \bar{x}^2)^2}{2}$$
$$s_2^2 = Var(x^2) = \frac{(900-1200)^2 + (1500-1200)^2}{2}$$
$$= \frac{(-300)^2 + (300)^2}{2}$$
$$s_2^2 = Var(x^2) = \frac{90000 + 90000}{2} = \frac{180000}{2} = 90000\ reais^2$$

Variável 3

$$s_3^2 = Var(x^3) = \sum_{i=1}^{2} \frac{(x_i^3 - \bar{x}^3)^2}{2} = \frac{(x_1^3 - \bar{x}^3)^2 + (x_2^3 - \bar{x}^3)^2}{2}$$
$$s_3^2 = Var(x^3) = \frac{(5-3)^2 + (1-3)^2}{2} = \frac{(2)^2 + (-2)^2}{2} = \frac{8}{2}$$
$$= 4\ filhos^2$$

Então, podemos calcular a distância da seguinte forma:

$$d^2(e_1; e_2)$$
$$= \begin{pmatrix} -6-6 & -300-300 & 2-(-2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{90000} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -6-6 \\ -300-300 \\ 2-(-2) \end{pmatrix}$$

$d^2(e_1; e_2) =$

$$= (-12anos \quad -600reais \quad 4filhos).\begin{pmatrix} \frac{1}{36anos^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{90000reais^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4filhos^2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -12anos \\ -600reais \\ 4\ filhos \end{pmatrix}$$

$d^2(e_1; e_2)$

$$= \left(-12anos\ .\frac{1}{36anos^2} \quad -600reais.\frac{1}{90000reais^2} \quad 4filhos.\frac{1}{4filhos^2}\right).\begin{pmatrix} -12anos \\ -600reais \\ 4\ filhos \end{pmatrix}$$

$$d^2(e_1; e_2) = \left(-\frac{1}{3anos} \quad -\frac{1}{150reais} \quad \frac{1}{1filho}\right).\begin{pmatrix} -12anos \\ -600\ reais \\ 4\ filhos \end{pmatrix}$$

$$d^2(e_1; e_2) = -\frac{1}{3anos}.(-12anos) - \frac{1}{150reais}.(-600reais) + \frac{1}{1filho}.4filhos$$

$$d^2(e_1; e_2) = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$d(e_1; e_2) = \sqrt{12}$$

Portanto, a distância entre os indivíduos e_1 e e_2 é igual a $\sqrt{12}$, sendo possível observar que a distância entre os dois indivíduos não depende mais das unidades anos, reais e filhos. Assim, percebemos que é concebível calcular a distância entre os indivíduos representados a partir de características de natureza distinta.

Exemplo 4.3: Vamos retomar o exemplo 3.1. O objetivo é calcular a distância entre os indivíduos e_1 e e_2.

Quadro indivíduos-variáveis:

ALUNOS		PROVAS	
		Prova 1 (x^1)	Prova 2 (x^2)
Aluno 1	e_1	3	1
Aluno 2	e_2	0	1
Aluno 3	e_3	5	0
Aluno 4	e_4	6	1
Aluno 5	e_5	5	3
Aluno 6	e_6	5	6

Sendo que $e_1 = (3{,}1)$, $e_2 = (0{,}1)$, $e_3 = (5{,}0)$, $e_4 = (6{,}1)$, $e_5 = (5{,}3)$ e $e_6 = (5{,}6)$

Vamos calcular a média de cada uma das variáveis:

$$\bar{x}^1 = \frac{3+0+5+6+5+5}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\bar{x}^2 = \frac{1+1+0+1+3+6}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Como a distância entre os indivíduos são e_1 e e_2 é dada por:

$$d^2(e_1; e_2) = (\overline{e_1} - \overline{e_2})^T M (\overline{e_1} - \overline{e_2})$$

Temos:

$$\overline{e_1} = \begin{pmatrix} x_1^1 - \bar{x}^1 \\ x_1^2 - \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{e_2} = \begin{pmatrix} x_2^1 - \bar{x}^1 \\ x_2^2 - \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vamos calcular a variância relacionada a cada uma das variáveis:

Variável 1

$$s_1^2 = var(x^1) = \sum_{i=1}^{6} \frac{(x_i^1 - \bar{x}^1)^2}{6}$$

$$s_1^2 = var(x^1) = \frac{(x_1^1 - \bar{x}^1)^2 + (x_2^1 - \bar{x}^1)^2 + (x_3^1 - \bar{x}^1)^2 + (x_4^1 - \bar{x}^1)^2 + (x_5^1 - \bar{x}^1)^2 + (x_6^1 - \bar{x}^1)^2}{6}$$

$$s_1^2 = var(x^1) = \frac{(3-4)^2 + (0-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2}{6}$$

$$s_1^2 = var(x^1) = \frac{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Variável 2

$$s_2^2 = Var(x^2) = \sum_{i=1}^{6} \frac{(x_i^2 - \bar{x}^2)^2}{6}$$

$$s_2^2 = var(x^2) = \frac{(x_1^2 - \bar{x}^2)^2 + (x_2^2 - \bar{x}^2)^2 + (x_3^1 - \bar{x}^2)^2 + (x_4^1 - \bar{x}^2)^2 + (x_5^1 - \bar{x}^2)^2 + (x_6^1 - \bar{x}^2)^2}{6}$$

$$s_2^2 = var(x^2) = \frac{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2 + (1-2)^2 + (3-2)^2 + (6-2)^2}{6}$$

$$s_2^2 = var(x^2) = \frac{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 4^2}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Podemos calcular a distância de maneira análoga ao Exemplo 4.2:

$$d^2(e_1; e_2) = \begin{pmatrix} -1-(-4) & -1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-(-4) \\ -1-(-1) \end{pmatrix}$$

$$d^2(e_1; e_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{9}{4}$$

$$d^2(e_1; e_2) = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Portanto, a distância entre os indivíduos e_1 e e_2 é igual a $\frac{3}{2}$.

Cabe salientar que nesse exemplo as características dos indivíduos são de mesma natureza. Por isso, as unidades de medida foram omitidas no cálculo da distância.

5. Espaço das Variáveis

Cada variável x^j é de fato uma lista de n valores numéricos e será considerada como um vetor x^j de um espaço de n dimensões, chamado espaço das variáveis e denotado por $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.1: Observando o quadro indivíduos-variáveis enunciado no exemplo 3.1, podemos representar a variável prova 1 pelo vetor

$x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \\ x_5^1 \\ x_6^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ e a variável prova 2 pelo vetor $x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 \\ x_6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Novamente, podemos observar que o índice superior indica a variável e, o índice inferior o indivíduo.

5.1 Medida da distância entre duas variáveis

Para estudar a proximidade das variáveis entre si é preciso munir esse espaço de uma métrica. O produto escalar de duas variáveis $\overline{x^J}$ e $\overline{x^k}$ (a barra indica que as variáveis estão centradas em si) é dado por: $\langle \overline{x^J}, \overline{x^k} \rangle = \overline{x^J}^T D \overline{x^k}$ e é denominado covariância s_{jk}, ou seja:

$$s_{jk} = \langle \overline{x^J}, \overline{x^k} \rangle = \overline{x^J}^T D \overline{x^k}.$$

Além disso, temos que:

$$|\overline{x^J}|_D^2 = {s_j}^2$$

Em outros termos, o "comprimento" de uma variável é igual a seu desvio padrão. Se considerarmos as variáveis 1 e 2 centradas em si temos:

$$\overline{x^1} = \begin{pmatrix} x_1^1 - \bar{x}^1 \\ x_2^1 - \bar{x}^1 \\ \vdots \\ x_n^1 - \bar{x}^1 \end{pmatrix}$$

e

$$\overline{x^2} = \begin{pmatrix} x_1^2 - \bar{x}^2 \\ x_2^2 - \bar{x}^2 \\ \vdots \\ x_n^2 - \bar{x}^2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 5.2: Vamos considerar os dados referentes ao exemplo 3.1. Nesse caso, temos as variáveis x^1 e x^2 representadas por: $x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Como $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, temos que:

$$\overline{x^1} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 0-4 \\ 5-4 \\ 6-4 \\ 5-4 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\overline{x^2} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-2 \\ 0-2 \\ 1-2 \\ 3-2 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vejamos agora o que acontece se existir um número r tal que:

$$\overline{x^1} = r\overline{x^2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 - \bar{x}^1 \\ x_2^1 - \bar{x}^1 \\ \vdots \\ x_n^1 - \bar{x}^1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x_1^2 - \bar{x}^2 \\ x_2^2 - \bar{x}^2 \\ \vdots \\ x_n^2 - \bar{x}^2 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que se $\overline{x^1}$ mudar, $\overline{x^2}$ mudará proporcionalmente, ou seja, chegaremos à conclusão que $\overline{x^1}$ e $\overline{x^2}$ estão fortemente relacionados. No entanto, a existência desse número r é equivalente à condição de que os vetores tenham a mesma direção, ou seja, o ângulo θ entre eles é zero ou π, e, portanto, $cos\theta = 1$ ou $cos\theta = -1$.

Num espaço euclidiano define-se o ângulo θ entre dois vetores pelo seu cosseno, que é igual ao quociente do produto escalar pelo produto das normas dos dois vetores. Assim, chegamos à conclusão que, o valor do cosseno do ângulo entre duas variáveis centradas é uma medida de relação entre essas variáveis. A este valor os estatísticos chamam de coeficiente de correlação linear entre $\overline{x^1}$ e $\overline{x^2}$ e denotam por:

$$r_{jk} = cos\theta_{jk} = \frac{\langle \overline{x^J}, \overline{x^k} \rangle}{|\overline{x^J}|_D . \left|\overline{x^k}\right|_D} = \frac{s_{jk}}{s_j s_k}$$

A matriz $R = \left(r_{jk}\right)$ é chamada matriz de correlação e é uma matriz simétrica, tendo em vista as propriedades do produto interno e cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1.

Exemplo 5.3: Retornando o Exemplo 4.1, faremos a proximidade entre as variáveis. Tomamos como métrica, a matriz diagonal D das probabilidades e calculamos o cosseno do ângulo entre as duas variáveis centradas, determinando assim o coeficiente de correlação linear.

Vetor das médias

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 1200 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Variáveis centradas

$$\overline{x^1} = \begin{pmatrix} x_1^1 - \bar{x}^1 \\ x_2^1 - \bar{x}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 - 36 \\ 42 - 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x^2} = \begin{pmatrix} x_1^2 - \bar{x}^2 \\ x_2^2 - \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 - 1200 \\ 1500 - 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -300 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x^3} = \begin{pmatrix} x_1^3 - \bar{x}^3 \\ x_2^3 - \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normas dos vetores

$$\left|\overline{x^1}\right|_D = s_1 = 6$$

$$\left|\overline{x^2}\right|_D = s_2 = 300$$

$$\left|\overline{x^3}\right|_D = s_3 = 2$$

Assim, podemos calcular os elementos da matriz de correlação R.

Cálculo de r_{11}

$$r_{11} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^1} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^1}\right|_D}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^1} \rangle = \overline{x^1}^T D \overline{x^1}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^1} \rangle = (-6 \quad 6) . \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 36$$

$$r_{11} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^1} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^1}\right|_D} = \frac{36}{6.6} = \frac{36}{36} = 1$$

Cálculo de r_{12}

$$r_{12} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^2} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^2}\right|_D}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^2} \rangle = \overline{x^1}^T D \overline{x^2}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^2} \rangle = (-6 \quad 6) . \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -300 \\ 300 \end{pmatrix} = 1800$$

$$r_{12} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^2} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^2}\right|_D} = \frac{1800}{6.300} = \frac{1800}{1800} = 1$$

Cálculo de r_{13}

$$r_{13} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^3} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^3}\right|_D}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^3} \rangle = \overline{x^1}^T D \overline{x^3}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^3} \rangle = (-6 \quad 6) . \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -12$$

$$r_{13} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^3} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^3}\right|_D} = \frac{-12}{6.2} = \frac{-12}{12} = -1$$

Cálculo de r_{21}

$$r_{21} = r_{12} = 1$$

Cálculo de r_{22}

$$r_{22} = \frac{\langle \overline{x^2}, \overline{x^2} \rangle}{\left|\overline{x^2}\right|_D . \left|\overline{x^2}\right|_D}$$

$$\langle \overline{x^2}, \overline{x^2} \rangle = \overline{x^2}^T D \overline{x^2}$$

$$\langle \overline{x^2}, \overline{x^2} \rangle = (-300 \quad 300). \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -300 \\ 300 \end{pmatrix} = 90000$$

$$r_{22} = \frac{\langle \overline{x^2}, \overline{x^2} \rangle}{\left|\overline{x^2}\right|_D . \left|\overline{x^2}\right|_D} = \frac{90000}{300.300} = \frac{90000}{90000} = 1$$

Cálculo de r_{23}

$$r_{23} = \frac{\langle \overline{x^2}, \overline{x^3} \rangle}{\left|\overline{x^2}\right|_D . \left|\overline{x^3}\right|_D}$$

$$\langle \overline{x^2}, \overline{x^3} \rangle = \overline{x^2}^T D \overline{x^3}$$

$$\langle \overline{x^2}, \overline{x^3} \rangle = (-300 \quad 300). \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -600$$

$$r_{23} = \frac{\langle \overline{x^2}, \overline{x^3} \rangle}{\left|\overline{x^2}\right|_D . \left|\overline{x^3}\right|_D} = \frac{-600}{300.2} = \frac{-600}{600} = -1$$

Cálculo de r_{31}

$$r_{31} = r_{13} = -1$$

Cálculo de r_{32}

$$r_{32} = r_{23} = -1$$

Cálculo de r_{33}

$$r_{33} = \frac{\langle \overline{x^3}, \overline{x^3} \rangle}{\left|\overline{x^3}\right|_D . \left|\overline{x^3}\right|_D}$$

$$\langle \overline{x^3}, \overline{x^3} \rangle = \overline{x^3}^T D \overline{x^3}$$

$$\langle \overline{x^3}, \overline{x^3} \rangle = (2 \quad -2) . \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4$$

$$r_{33} = \frac{\langle \overline{x^3}, \overline{x^3} \rangle}{\left|\overline{x^3}\right|_D . \left|\overline{x^3}\right|_D} = \frac{4}{2.2} = \frac{4}{4} = 1$$

Temos, então, a matriz de correlação:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz de correlação permite um estudo global das variáveis colocando em evidência ligações, semelhanças ou diferenças com o objetivo de transformar os dados para visualizá-los num plano ou classifica-los em grupos homogêneos, perdendo o mínimo de informação.

Podemos observar que as variáveis $\overline{x^1}$ e $\overline{x^2}$ estão altamente correlacionadas um vez que os elementos da matriz de correlação R são 1 ou -1.

Exemplo 5.4: Considerando os dados referentes ao exemplo 3.1, vamos calcular a matriz de correlação:

Variáveis centradas (calculadas no exemplo 5.2)

$$\overline{x^1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x^2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normas dos vetores

$$\left|\overline{x^1}\right|_D = s_1 = 2$$
$$\left|\overline{x^2}\right|_D = s_2 = 2$$

Cálculo de r_{11}

$$r_{11} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^1} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^1}\right|_D}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^1} \rangle = \overline{x^1}^T D \overline{x^1}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^1} \rangle = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 4$$

$$r_{11} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^1} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^1}\right|_D} = \frac{4}{2.2} = 1$$

Cálculo de r_{12}

$$r_{12} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^2} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^2}\right|_D}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^2} \rangle = \overline{x^1}^T D \overline{x^2}$$

$$\langle \overline{x^1}, \overline{x^2} \rangle = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 1$$

$$r_{12} = \frac{\langle \overline{x^1}, \overline{x^2} \rangle}{\left|\overline{x^1}\right|_D . \left|\overline{x^2}\right|_D} = \frac{1}{2.2} = 0{,}25$$

Cálculo de r_{21}

$$r_{21} = r_{12} = 0{,}25$$

Cálculo de r_{22}

$$r_{22} = \frac{\langle \overline{x^2}, \overline{x^2} \rangle}{\left|\overline{x^2}\right|_D . \left|\overline{x^2}\right|_D}$$

$$\langle \overline{x^2}, \overline{x^2} \rangle = \overline{x^2}^T D \overline{x^2}$$

$$\langle \overline{x^2}, \overline{x^2} \rangle = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 1$$

$$r_{22} = \frac{\langle \overline{x^2}, \overline{x^2} \rangle}{\left|\overline{x^2}\right|_D . \left|\overline{x^2}\right|_D} = \frac{1}{2.2} = 0,25.$$

Temos, então, a matriz de correlação:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,25 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que as variáveis 1 e 2 não estão altamente correlacionadas, pois $r_{12} = r_{21} = 0,25$ é um valor não muito próximo de 1.

6. Considerações Finais

Concluímos, afirmando que os conceitos de Álgebra Linear estão presentes na Estatística e esta pode assumir o papel de uma disciplina integradora. De uma forma geral, sabemos que os estudantes demonstram dificuldades em aprender Matemática, nos mais diversos níveis de ensino, porque não percebem o significado ou a importância do que estudam. A partir da correlação entre os conceitos apreendidos e as habilidades desenvolvidas em outras disciplinas é possível contribuir para uma visão mais ampla do conhecimento.

Os educadores de hoje têm a possibilidade cada vez maior de pesquisar nas mais diversas áreas do conhecimento, aumentando suas competências e os beneficiados com isso serão os estudantes, pelo simples fato de estarem diante de professores bem preparados.

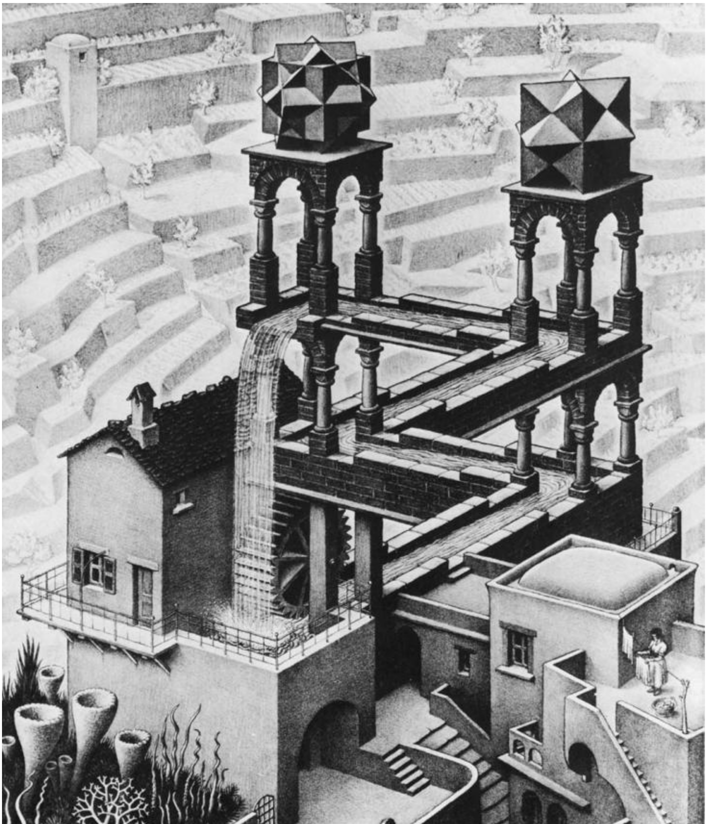
REFERÊNCIAS

BOUROCHE, Jean Marie; SAPORTA, Gilbert. **Análise de Dados**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1982.

DAGNELIE, Pierre. **Analyse Statistique à Plusieurs Variables**. Les Presses Agronomiques de Gembloux. Belgique, 1975.

HOWARD Anton; RORRES Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10.ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

MACHADO, Catia Maria dos Santos; ALMEIDA, Tabajara Lucas de. **Uma Visão Matemática do Método de Análise de Componentes Principais**. Vetor - Revista de Ciências Exatas e das Engenharias, Rio Grande, v. 08, p. 75-87, 1998.



Capítulo 4:
Geometria Analítica e Dinâmica:
o uso do *Software* Geogebra

GEOMETRIA ANALÍTICA E DINÂMICA: O USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Fabíola Aiub Sperotto
Daiane Silva de Freitas

1. Introdução

A Geometria é uma área da matemática muito antiga, surgida da necessidade da medição de terrenos, na qual o termo Geometria é composto por duas palavras gregas: *geos* (terra) e *metron* (medida). Desde então, muitos filósofos e matemáticos realizaram inúmeras descobertas.

Entre os gregos, destaca-se Pitágoras, discípulo de Thales, que estudou matemática por interesse e não somente por necessidade. Um importante teorema que relaciona o quadrado da hipotenusa com a soma dos quadrados dos catetos leva seu nome e é usado com frequência nas disciplinas de Geometria.

A Geometria Analítica é um ramo da matemática que utiliza como ferramenta a álgebra para ensinar a representar entes geométricos por meio de entes algébricos. Entre os que se destacaram no estudo da Geometria Analítica, temos René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), ambos estudaram de forma independente e não eram matemáticos de profissão.

Descartes publicou alguns ensaios e, em um deles, G*éométrie*, em 1637, criou os fundamentos da geometria analítica, representando figuras geométricas através de expressões algébricas.

Fermat nos deixou um legado de contribuições como o cálculo geométrico e infinitesimal, a teoria dos números, mas a contribuição de Fermat para a geometria analítica se encontra no trabalho intitulado *Ad locus planos et solidos isogoge*, que foi publicado em 1679.

Merece destaque também um pensador grego chamado Apolônio de Perga (262-190 a.C.), que ficou conhecido como o grande geômetra. Estudou em Alexandria com os sucessores de Euclides. Apolônio escreveu o tratado *As cônicas*, em que mostra que de um único cone podem ser obtidas as seções cônicas: parábola, elipse e a hipérbole, e também o círculo. Para mostrar tais seções, basta variar a inclinação do plano de corte da superfície cônica.

Foi Apolônio que usou pela primeira vez os termos parábola, elipse e hipérbole para designar essas curvas. O estudo das seções cônicas teve importante papel na física e na matemática, no estudo das órbitas dos planetas, trajetória de foguetes, nos espelhos telescópicos.

Desde o princípio a Geometria Analítica, trata das relações entre as equações algébricas e os objetos geométricos. Tem sido um ramo importante na área da matemática em vários campos de estudo, como na geometria algébrica, na geometria diferencial, na Física, nas Engenharias, na computação gráfica e até no Sistema de Posicionamento Global, o GPS.

Além de a geometria analítica ter como ferramenta básica a álgebra, ela também usa a álgebra vetorial. O conceito de vetor surgiu com o engenheiro Simon Stevin que, em 1586, apresentou o problema da composição de forças e enunciou uma regra para achar a soma de duas forças partindo de um mesmo ponto, hoje, conhecida como regra do paralelogramo. A teoria vetorial surgiu com os trabalhos de William Hamilton, Hermann Grasmann e do físico Josiah Gibbs.

Os vetores são importantes no estudo da geometria analítica e mostram-se como uma ferramenta moderna usada no estudo da matemática por possuírem uma grande capacidade de generalização. Vetores estão presentes no nosso cotidiano, por exemplo, se desejamos movimentar um móvel de lugar (posição inicial) arrastando até sua nova posição (posição final), quando estamos viajando percorremos estradas com orientações variadas até chegarmos ao nosso destino. No ramo da engenharia, grandezas como força, torque e velocidade são grandezas vetoriais que estão sempre presentes.

Geometria dinâmica é um termo usado para a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades. Existe hoje uma tendência forte na utilização de tecnologias em sala de aula e o bom uso destes recursos tem trazido uma motivação para os alunos.

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica que apresenta concomitantemente a representação geométrica e algébrica dos objetos. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter (Áustria e USA – 2001) e por uma equipe de programadores para ser usados nas escolas. O *software* GeoGebra é livre e está disponível no endereço eletrônico www.geogebra.org, onde também estão disponíveis todas as informações para a instalação e tutoriais. O diretor responsável pelo projeto Markus Hohenwarter reforça que a característica destacável do GeoGebra é a dupla percepção dos objetos, cada expressão na janela geométrica corresponde a um objeto na janela algébrica e vice-versa. Portanto, o aluno visualiza o que está calculando ou representando, facilitando assim a compreensão ao conteúdo.

Portanto, a disciplina de Geometria Analítica e Dinâmica, apresenta um conteúdo que aborda a álgebra vetorial, a equação da reta e do plano no espaço tridimensional e o estudo das seções cônicas. A disciplina tem intenção de aliar os conhecimentos matemáticos com as tecnologias, realizando uma revisão de tópicos importantes de Geometria Analítica e, desta forma, colaborar na superação de inúmeras dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem da mesma no ensino médio.

Portanto, estamos propondo atividades com o uso do *software* GeoGebra versão 4.4, para trabalhar as seções cônicas, mais especificamente a circunferência, a parábola e a elipse, que podem seguir de modelo, para que os professores criem suas próprias atividades a serem trabalhadas em sala de aula. As seções cônicas representam uma parte muito importante no estudo da Matemática. Suas definições, equações e gráficos são utilizados em vários estudos, portanto, possuem várias aplicações no nosso cotidiano.

2. O *Software* GeoGebra

A figura 1 mostra a tela principal do *Software* GeoGebra.

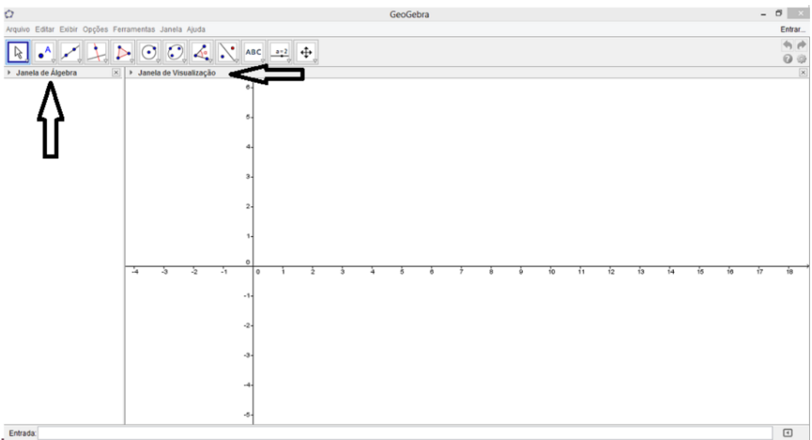


Figura 1: *software* GeoGebra

Observe que o GeoGebra possui duas janelas: a janela de álgebra, à esquerda, e a janela de visualização, à direita.

Na janela de álgebra, os objetos matemáticos são organizados em duas classes: objetos livres e objetos dependentes. Quando criamos um novo objeto sem usar outro já existente, ele é classificado como objeto livre. Caso contrário, se seu novo objeto for criado com recurso de um objeto já existente, ele é classificado como objeto dependente. Pela Janela Algébrica, é possível também visualizar o estado de cada objeto pelo ícone, à esquerda, que indica se ele está visível ou escondido.

Na janela de visualização, com o auxílio das ferramentas que estão disponíveis no Menu de Ferramentas, realizamos construções geométricas na Janela Geométrica. Cada objeto construído terá sua representação na Janela Algébrica. Observe que quando abrimos o GeoGebra, na janela Geométrica, os eixos coordenados estão exibidos, mostrando o plano coordenado, mas também é possível desabilitá-los usando um atalho pelo botão direito do *mouse* clicando em eixos, assim esse item será escondido na tela principal. Caso deseje trabalhar com a malha quadriculada, deve-se usar o mesmo atalho para exibi-la na tela principal.

O campo de entrada, que está localizado abaixo das janelas Algébrica e Geométrica, permite inserir diretamente expressões algébricas no GeoGebra. Assim que digitamos, a expressão algébrica aparece na janela Algébrica e a respectiva representação gráfica aparece na janela Geométrica. O GeoGebra possui uma lista de comandos que podem ser inseridos no campo entrada, no qual será informado a sintaxe e os argumentos requeridos para aplicar o correspondente comando.

No menu ferramentas, cada ícone possui uma subdivisão de acordo com cada função, possibilitando as mais diversas construções.

Não é a intenção deste trabalho ensinar a usar o *software* GeoGebra, mas mostrar sua aplicabilidade em aulas de Geometria Analítica. Sendo assim, vamos mostrar exemplos de atividades que podem ser trabalhados em sala de aula com o uso deste recurso.

2.1. Atividade 1

Os objetivos desta atividade são enfatizar aspectos geométricos da Geometria Analítica, localização no plano cartesiano, reconhecer lugares geométricos, relacionar os objetos geométricos com as correspondentes equações algébricas, noções de distância, equações de segmentos de reta, condição de alinhamento de três pontos, declividade de uma reta, posição relativa entre retas, ângulo entre retas, posições relativas entre ponto e circunferência, posições relativas de duas circunferências, reta tangente à circunferência.

Para criar o rosto do rei na janela de visualização do GeoGebra, os eixos e a malha quadriculada devem estar habilitados para facilitar tanto a construção do rosto, bem como para trabalhar a localização de pontos no plano cartesiano.

Observe na figura 2 que, no sexto ícone da barra de ferramentas, temos a opção “Círculo dados Centro e Raio”. Com esta opção, pode-se construir os cinco círculos que compõem o rosto de rei.

O rosto e o nariz têm centro na origem do plano cartesiano, O(0,0), e o raio depende do tamanho da figura desejada. Nos olhos, os centros são pontos simétricos e de mesmo raio.

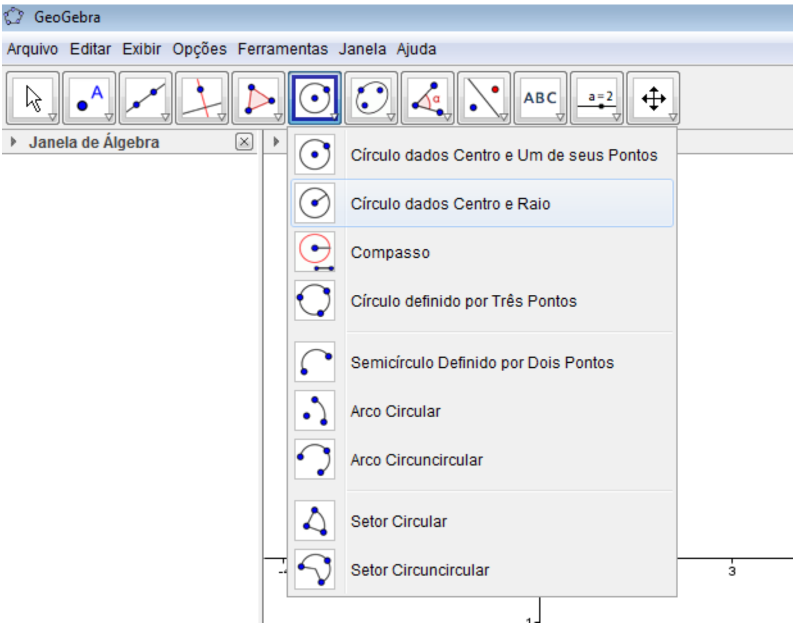


Figura 2: Comando Círculo dados Centro e Raio.

Para a construção da coroa, o GeoGebra tem a opção “reta tangente” que está no quarto ícone. Selecionando um ponto do círculo e o círculo o próprio *software* é feita a construção da reta tangente, conforme figura 3. Com a reta tangente, pode-se usar criatividade para criar a coroa do rei.

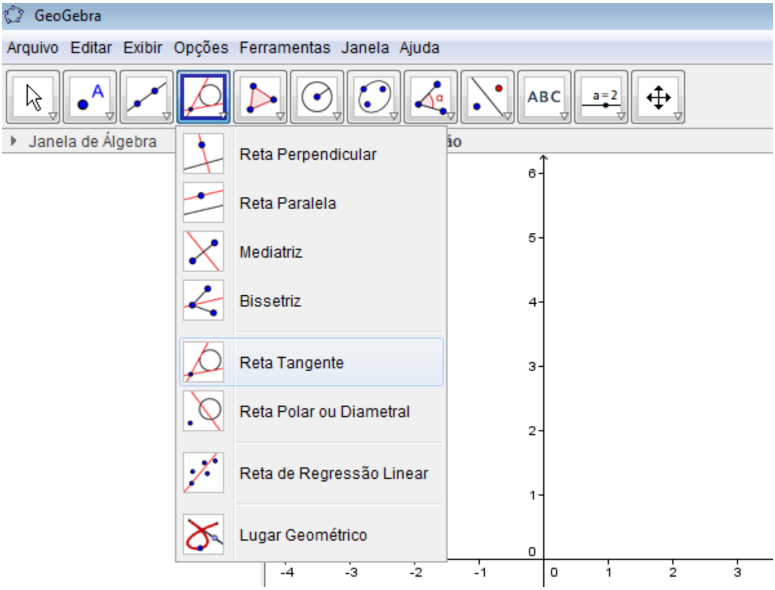


Figura 3: Comando Reta Tangente

Para a sugestão de gravata, escolhem-se pontos e, com a opção “Segmento”, localizada no terceiro ícone (ver figura 4), traçam-se os segmentos de reta que formam a gravata do rei.

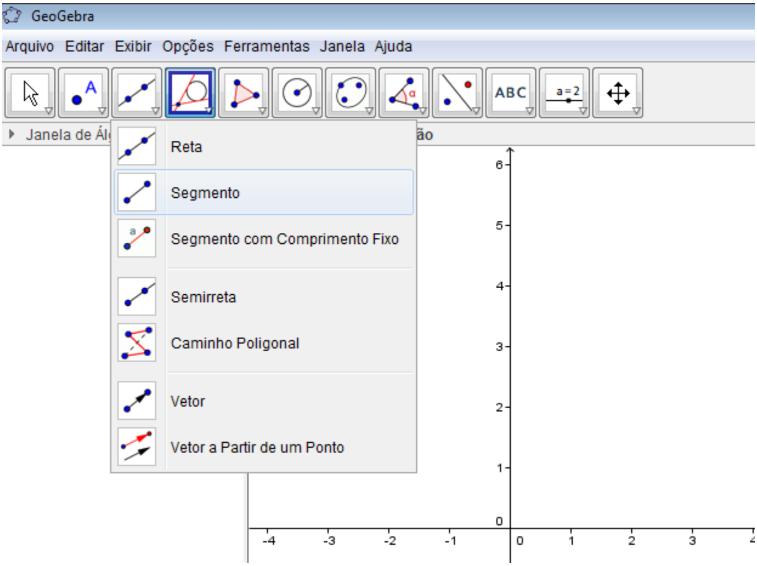


Figura 4: Comando Segmento

No quinto ícone, tem-se a opção “Polígono”, que foi usada na coroa e na gravata para dar cor realçando as construções geométricas.

O interessante da atividade é que o professor pode ensinar os comandos básicos do *software* aos alunos e solicitar que eles façam a construção do rosto e que sejam incentivados a criar novas formas a partir desta.

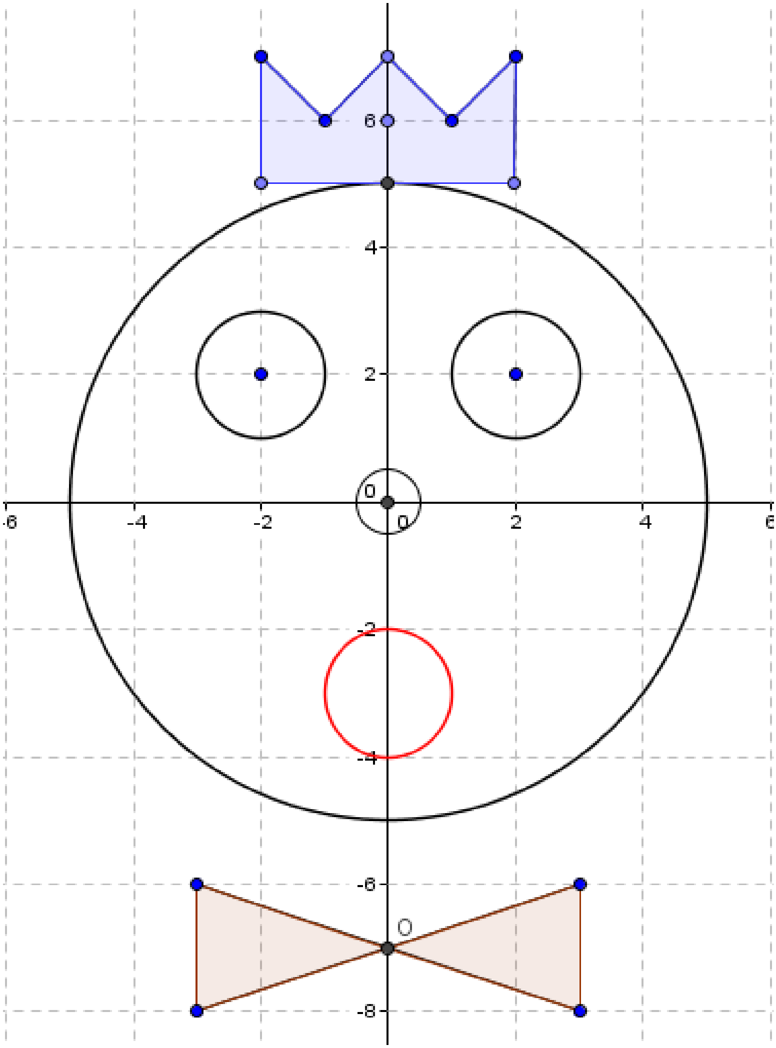


Figura 5: O Rei

A partir do desenho, o professor pode trabalhar vários conceitos da Geometria Analítica, seguem algumas sugestões:

1. O Plano cartesiano: a cada ponto no plano corresponde um único par ordenado *(x,y)* e a cada par ordenado está associado um único ponto, existe uma correspondência biunívoca. Como o sistema cartesiano é formado por duas retas perpendiculares, eixos *Ox, Oy*, a interseção desses eixos é o ponto *O*, a origem do sistema. Os eixos coordenados dividem o sistema cartesiano em quatro quadrantes. Para trabalhar estes conceitos, o professor pode usar o *software* e o rosto para:

- Localizar pontos no plano situá-los nos quadrantes, pontos simétricos, pontos sobre os eixos coordenados.

2. Distância entre dois pontos: escolhidos os pontos, pode-se trabalhar a medida do segmento de extremidades **A** e **B**. O *software* GeoGebra possui uma opção no oitavo ícone que fornece a Distância, Comprimento ou Perímetro, basta clicar nos pontos e ele calcula a distância. Pode-se escolher pontos estratégicos para construir um triângulo retângulo e usar a relação de Pitágoras.
3. Reta que passa por dois pontos dados: a Geometria Euclidiana diz que por dois pontos dados passa uma, e somente uma, reta. Pela construção, observe que a gravata do rei são dois segmentos de reta que possuem um ponto de interseção e também é possível trabalhar noções de declividade das retas, posição relativa entre retas.
4. Equações da circunferência: uma circunferência com centro **C** (a, b) e raio *r* é o conjunto de todos os pontos **P** (x, y) do plano equidistantes de **C.** Para trabalhar este tópico, pode-se fazer:

- Identificar as circunferências, seus centros e equações.
- Posições relativas entre ponto e circunferência: pontos que pertencem à circunferência, ponto interno à circunferência, ponto externo à circunferência.
- Posições relativas entre reta e circunferência: reta secante à circunferência, reta tangente à circunferência, reta exterior à circunferência. Usando o comando reta tangente, pode-se construir a coroa do rei e com o botão direito do *mouse*, clicando em uma das extremidades do segmento que tangencia a circunferência e arrastando, observa-se que a reta tangencia todo o rosto da circunferência.
- Posições relativas de duas circunferências: é possível mover as circunferências internas (olhos, nariz, boca), usando o botão direito do *mouse* e arrastando para identificar dois pontos comuns entre circunferências, um ponto comum (tangentes exteriormente) ou

(tangentes interiormente) ou nenhum ponto (circunferências externas) ou (uma circunferência interna à outra).

2.2 Atividade 2:

Os objetivos da atividade 2 são identificar as cônicas, bem como diferenciá-las. Reconhecer as componentes de cada uma (foco, eixo, vértice).

Observe o desenho mostrado na figura 6, representando um boneco, similar ao apresentado na atividade 1, mas agora seus olhos, boca e o boné mostram curvas formando parábolas.

Pela definição de parábola, sabemos que dados um ponto F e um reta d, pertencentes a um determinado plano, com $F \neq d$, e considerando p, a distância entre F e d, temos que a parábola é o conjunto dos pontos do plano que estão a mesma distância de F e d.

Com o desenho sugerido pela figura 6, o professor pode trabalhar os elementos principais da parábola, seu eixo de simetria, pontos simétricos, concavidade da parábola.

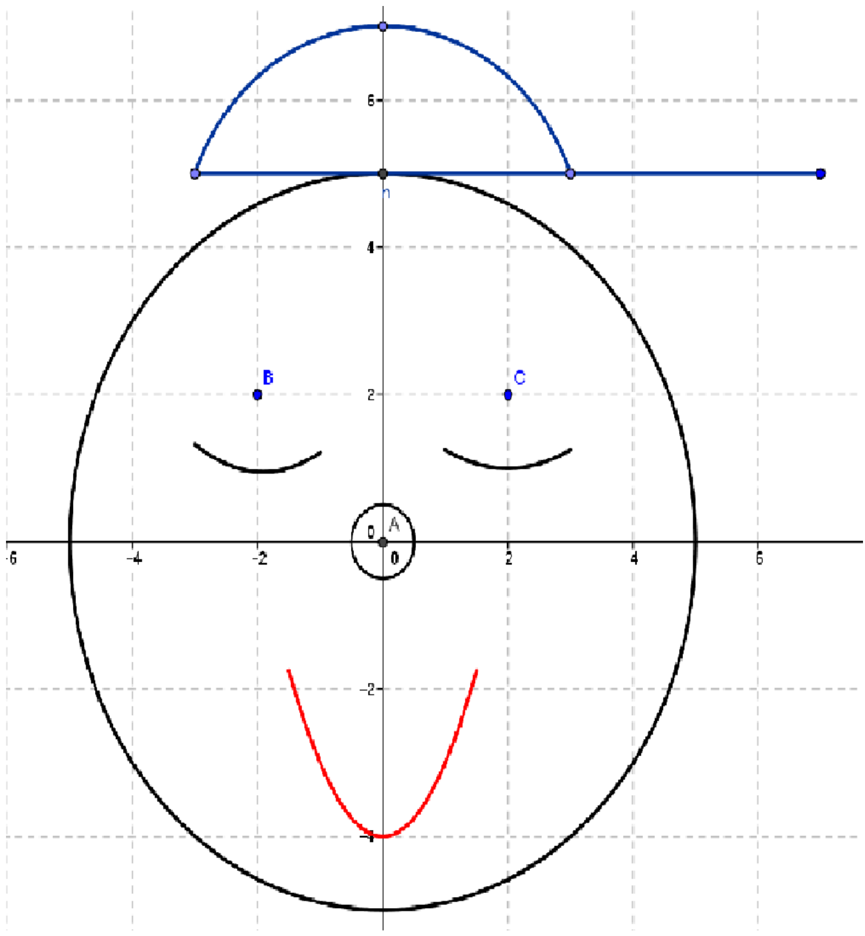


Figura 6: Boneco de boné

2.3 Atividade 3:

O objetivo principal da atividade 3 é construir a figura 7, usando equações de elipses, circunferências e parábolas. O professor pode sugerir aos alunos que escolham as equações para completar o desenho.

Todas as equações usadas serão inseridas no *software* através do campo entrada, pela figura 1. Este campo se encontra na parte inferior da janela principal do GeoGebra.

Para o rosto do ratinho, temos uma elipse de centro (0,-1), cuja equação é:

$$\frac{x^2}{12}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

O nariz também é uma elipse com centro na origem de equação

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{0.5}=1$$

Para os olhos, devemos ter pontos simétricos como centros das circunferências e raio 0.2. Também é possível usar a ferramenta que se encontra no sexto ícone, chamada círculo dados centro e raio. O mesmo pode ser feito com as orelhas do ratinho, com centros em pontos simétricos e raio 0.5.

Formamos o contorno dos olhos usando a ferramenta do quinto ícone chamada semicírculo definido por dois pontos.

Para a boca, criamos três controles deslizantes, opção do décimo primeiro ícone, nomeados respectivamente de a, b, c. Depois, digitamos na caixa de entrada o comando função cuja equação descreve uma função quadrática do tipo ax^2+bx+c, limitando o intervalo, neste caso [-1.5,1.5]. Conforme movemos os controles deslizantes, posicionamos a boca com vértice sobre o eixo *y* .

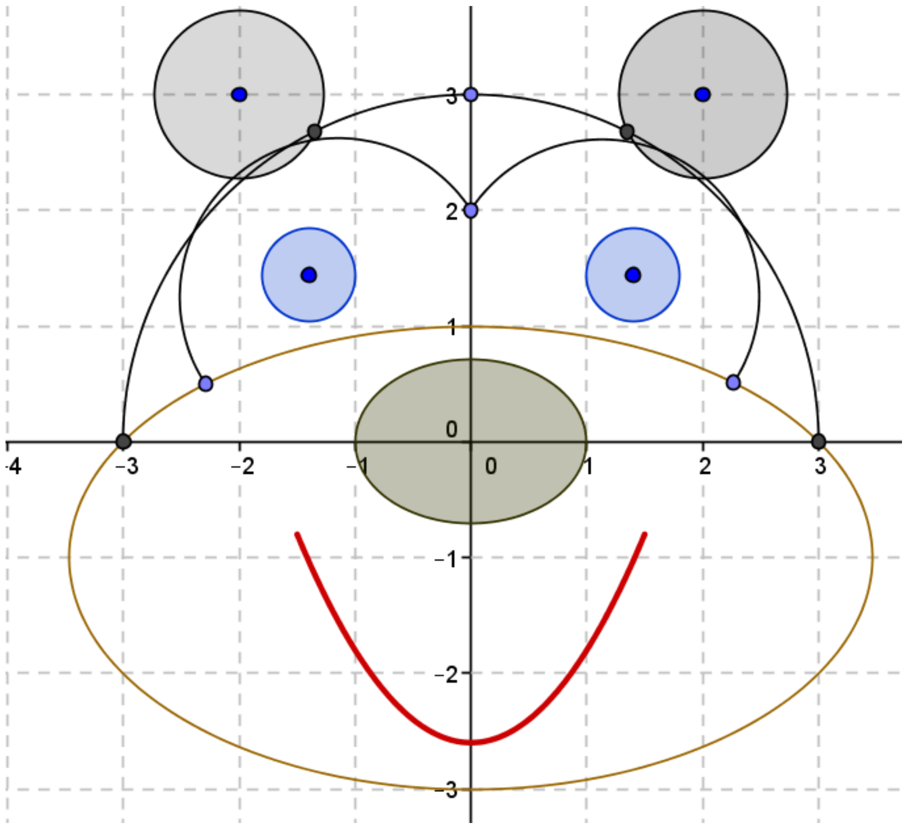


Figura 7: Ratinho

Atividade 4: Outras sugestões de atividades com o GeoGebra

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a posição relativa entre duas circunferências, estudando a relação entre o raio destas circunferências. Para tanto, sugerimos que usem o Geogebra e sigam as instruções abaixo:

- no sexto ícone, selecione a opção “círculo dados centro e um de seus pontos”;
- em seguida, trace dois círculos não concêntricos ;
- depois, no terceiro ícone, selecione a opção “segmento definido por dois pontos” e marque dois segmentos, ligando um ponto de

cada circunferência ao seu centro, estabelecendo assim o raio de cada uma delas;

- usando o procedimento anterior, trace um segmento que una os centros das circunferências, a este será atribuído um nome pelo GeoGebra;
- com o mouse no segmento de reta, clique no botão direito e selecione a opção " renomear" , atribuindo o nome "r" para o raio de uma circunferência e "R" para o raio da outra;
- no campo "Entrada", digite "r+R", o GeoGebra atribuirá um nome a esta equação;
- no primeiro ícone, selecione a opção "mover";
- clique no ponto da circunferência (o qual foi usado para traçar a circunferência) e mova de modo a aumentar ou diminuir o raio;
- observe o que ocorre, quando efetuamos o passo anterior;
- quais conclusões você pode tirar sobre a posição das circunferências em função das distâncias entre os centros e os seus raios?

Desta forma, o aluno pode deduzir as relações que estabelecem a posição relativa de duas circunferências não concêntricas.

2. Para esta atividade, sugerimos o uso de uma equação específica de uma parábola para que os alunos possam entender o real significado desta curva. Como sugestão, vamos considerar a equação (sem que a equação seja informada aos alunos): **$(x-1)^2 = 4(y+2)$**. O professor deverá orientar os alunos para que sigam os seguintes passos no Geogebra:

- no campo "Entrada", digite "y= - 3", dê "enter" e será traçada a reta;
- no campo "Entrada", digite "F=(1,-1)";
- a seguir, no décimo primeiro ícone, clique na opção "controle deslizante", atribua o nome "b", quando solicitado e determine os limites máximo e mínimo enter 10 e -10.
- novamente, no campo "Entrada", digite "P=(b,((b-1)^2 /4)-2)", dê "enter " para que o ponto P seja exibido;
- com o *mouse* no ponto P, clique no botão direito e selecione a opção "Habilitar rastro";
- no campo "Entrada", digite "Q=(b,-3)";
- no terceiro ícone, selecione a opção "Segmento definido por dois pontos" e faça dois segmentos, um ligando o ponto F ao

ponto P e outro ligando o ponto P ao ponto Q, que está localizado sobre a reta y= - 3;

- no primeiro ícone, clique em “mover”;
- a seguir, coloque o *mouse* em b (obtido com o controle deslizante), na janela de visualização e movimente-o da direita para esquerda e vice-versa. Qual a curva obtida? O que ocorre com as medidas dos segmentos FP e PQ?
- para finalizar, peça que o aluno digite no campo “Entrada”, “(x-1)²=4(y+2)”.

Com esta atividade, podemos explorar a definição de parábola, **d(F, P) = d(P, d)**, onde d representa a reta y = - 3.

3. Nesta atividade, vamos trabalhar com a cônica definida como o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é uma constante, ou seja, dados F e G, procuramos por pontos P tais que: **d(P, F) + d(G , P)= 2a.** Para tanto, o professor deve escolher a equação de uma elipse, sugerimos a equação $16x^2 + 25y^2 = 400$ (a princípio esta equação não deve ser informada aos alunos), em seguida, deve fornecer aos alunos as seguintes orientações:

- digite no campo “Entrada”, “F=(-3,0)” e “G=(3,0)”;
- no décimo primeiro ícone, selecione a opção “controle deslizante”, atribua o nome “r”, intervalos de -5 a 5, com incremento em 0,01;
- digite no campo “Entrada”, “P=(r,sqrt(16/25(25-b²)))” e “Q=(r, -sqrt(16/25(25-b²)))”; em seguida, habilite o rastro destes pontos, utilizando o botão direito do *mouse*, quando este estiver sobre os pontos em questão;
- no terceiro ícone, selecione a opção “segmento definido por dois pontos” e marque os segmentos PF e PG, bem como QF e QG, com o botão direito do *mouse* em cima dos segmentos, renomeie os segmentos da seguinte forma:

PF = a
PG= e
QF= c
QG=d

- no campo “Entrada”, digite “f = a+e” e em seguida “g = c+d”, o que você observa?;
- com o *mouse* nos pontos P e Q, clique no botão direito e habilite o rastro;
- movimente o controle deslizante, o que você observa?

- para finalizar, pode-se fornecer a equação ao aluno e pedir para que ele digite no campo “Entrada” e que compare com o rastro.

As atividades sugeridas 2 e 3 podem ser adaptadas ao estudo da hipérbole ou até mesmo do caso particular da elipse, a circunferência.

É possível trocar a cor dos elementos na janela de visualização. Para isto, basta clicar no botão direito do mouse (em cima do objeto) e selecionar “propriedades”. Neste momento, será possível escolher a corresponde.

O uso de tecnologias em sala de aula não é mais novidade. Acredita-se que a utilização de *softwares* no ambiente escolar contribui significativamente no processo de ensino.

Por meio do *software* GeoGebra, o professor poderá abordar vários tópicos matemáticos, construindo o conhecimento junto com os alunos. Desta forma, as aulas tornam-se mais dinâmicas e fazem com que os alunos sintam-se estimulados em participar destas e resolver desafios. Conforme as atividades descritas neste texto, observa-se que o *software* Geogebra é um recurso tecnológico ótimo para o ensino de matemática.

O trabalho em sala de aula dever ser valorizado, mas o *software* GeoGebra é um instrumento alternativo na prática pedagógica que auxiliará os alunos a compreenderem as construções geométricas associados aos conhecimentos adquiridos em sala de aula e com isto possibilitar novas descobertas.

REFERÊNCIAS

CAMARGO, I.; BOULOS, P. *Geometria Analítica*. 3.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar, 7*: Geometria Analítica. 5.ed. São Paulo: Atual, 2005.

WINTERLE, Paulo. *Vetores e Geometria Analítica.* São Paulo: Makron Books, 2000.

Sobre os autores

Antônio Maurício Medeiros Alves
Possui Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (1996), Especialização em Educação Matemática (1997) pela mesma universidade, Mestrado (2005) e Doutorado (2013) em Educação pela Universidade Federal de Pelotas. Professor Adjunto da referida universidade (UFPEL), lotado no Departamento de Matemática e Estatística (DME) do Instituto de Física e Matemática (IFM). Atua como docente do curso de Licenciatura em Matemática, na área de Ensino de Matemática. Pertence aos grupos de pesquisa cadastrados no CNPq: HISALES – História da Alfabetização, Leitura, Escrita e dos Livros Escolares (FaE/UFPel) e Multiplicidades em Educação Matemática (IFM/UFPEL). Tem experiência na área da educação, com ênfase em Ensino de Matemática, atuando principalmente nas seguintes áreas: formação de professores, prática e metodologia de ensino de matemática, alfabetização matemática, livro didático, história da educação e das disciplinas escolares, história da matemática e educação a distância.

Catia Maria dos Santos Machado
Possui Graduação em Matemática – Licenciatura Plena pela Universidade Federal do Rio Grande (1985), especialização em Matemática e Matemática Aplicada (1997), Mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1999) e Doutorado em Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2005), na área de Transporte e Logística. Atualmente, é Professora Associada I do Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada, atuando principalmente nos seguintes temas: Otimização combinatória; programação linear, algoritmos baseados em teoria de grafos.

Celiane Costa Machado
Possui Graduação em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande (1995), Mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1999) e Doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2007).

Atualmente, é professora adjunta da Universidade Federal do Rio Grande. Tem experiência na área de Educação e Matemática, com ênfase em Educação Matemática e Matemática Aplicada, atuando principalmente com o ensino de matemática.

Daiane Silva de Freitas
Possui Graduação em Matemática – Licenciatura Plena pela Universidade Federal do Rio Grande (2002), Mestrado em Matemática e Computação Científica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2006) e Doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2010). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Análise Funcional e Álgebra, atuando principalmente com Ação Parcial de Grupos, Ação Parcial de Álgebras de Hopf e Extensões de Galois-Azumaya-Hopf Parciais.

Darci Luiz Savicki
Possui Graduação em Ciências pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (1998), Mestrado em Modelagem Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (2000) e Doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2007). Atualmente, é professor adjunto da Universidade Federal do Rio Grande. Tem experiência na área de Física, com ênfase em Física, atuando principalmente nos seguintes temas: aeração, modelagem matemática, armazenamento de grãos, soja e resistência aerodinâmica.

Denise de Sena Pinho
Possui Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande (1995), Pós-Graduação em Matemática pela mesma universidade (1998), Mestrado em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (2008). Professora Assistente no Instituto de Matemática, Estatística e Física (IMEF/FURG). Coordenadora do Núcleo de Polos na Secretaria de Educação a Distância – SEAD/FURG. Coordenadora Adjunta do curso de Especialização para Professores de Matemática – SEAD/IMEF.

Elaine Corrêa Pereira
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande (1987). Especialista em Matemática e em Matemática Aplicada (1997)

pela Universidade Federal do Rio Grande. Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1999) e Doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2005). Atualmente, é professora associada da Universidade Federal do Rio Grande e tem experiência como docente e gestora na área educacional. Investiga os seguintes temas: ensino de matemática, modelagem matemática, formação docente e educação em ciências.

Fabíola Aiub Sperotto
Possui Graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2000), Graduação em Formação Pedagógica Matemática – EaD pela Universidade Luterana do Brasil (2006), Mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2003) e Doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2007). Atualmente, é professora (classe Adjunta III) da Universidade Federal do Rio Grande. Áreas de concentração: Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada, atuando principalmente nas áreas de educação (ensino superior), dispersão de poluentes, soluções de equações diferenciais, fenômenos de transporte. Integra o corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Narjara Mendes Garcia
Graduação em Pedagogia – Educação Infantil. Mestre e Doutora em Educação Ambiental. Professora Adjunta no Instituto de Educação da Universidade Federal do Rio Grande. Coordenadora Pedagógica na Secretaria de Educação a Distância – SEaD. Desenvolve projetos de extensão e pesquisa no Centro de Referência em Apoio às Famílias (CRAF) e no Núcleo de Estudo e Pesquisa em Educação da Infância (NEPE) da FURG. Aborda os seguintes temas: infâncias, educação parental; transgeracionalidade; famílias; educação infantil; formação de professores e educadores sociais; educação ambiental; e educação a distância.

Coleção Cadernos Pedagógicos da EaD

A Coleção Cadernos Pedagógicos da EaD, financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), é uma iniciativa da Secretaria de Educação a Distância da Universidade Federal do Rio Grande – SEaD/FURG. A referida Coletânea tem como propósito congregar textos que subsidiem os estudos dos discentes matriculados em cursos de graduação e pós-graduação, tanto da educação a distância como do ensino presencial.

Cada volume apresenta temáticas relevantes para o estudo de uma ou mais disciplinas dos cursos oferecidos pela FURG e tem o intuito de contribuir de maneira significativa para a formação dos seus leitores.

Suzane da Rocha Vieira
Organizadora da Coleção